

УДК 539.3: 534.1

©2014. М.Н. Пачева

## ОТРАЖЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН ОТ НАКЛОННОЙ ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУСЛОЯ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Построено численно-аналитическое решение краевой задачи об отражении нормальной волны сдвига от наклоненной к граням под произвольным углом плоской боковой поверхности упругого полуслоя. Использована концепция метода частичных областей с выделением геометрических элементов сечения в виде полуполосы с ортогональной граням боковой границей и треугольной подобласти, дополняющей сечение до полуполосы с наклонным торцом. Волновые поля в указанных подобластях представляются рядами с неопределенными коэффициентами по удовлетворяющим краевым условиям на плоских гранях и на наклонной боковой поверхности базисным частным решениям волнового уравнения в прямоугольных и полярных координатах. Алгебраизация функциональных краевых условий механического сопряжения выделенных в сечении подобластей осуществляется методом наименьших квадратов. Представлены отдельные результаты расчета полей волновых упругих перемещений в окрестности скошенной боковой поверхности для ряда значений относительной длины падающей симметричной нормальной волны из низшей моды соответствующего дисперсионного спектра.

**Ключевые слова:** *рассеяние нормальной волны сдвига, метод частичных областей, ряды по базисным частным решениям волнового уравнения.*

Различные аспекты проблемы изучения эффектов рассеяния нормальных упругих волн, падающих на ортогональную плоским граням боковую граничную поверхность полуслоя, представлены в публикациях [1–7]. В гораздо меньшей степени исследованы эффекты отражения волн деформаций от боковой граничной поверхности полуслоя, наклоненной по отношению к его плоским граням [8].

Для полуслоя с наклонной торцевой поверхностью, все участки границы которого являются закрепленными, задачи описания полей, отражаемых от боковой границы нормальных волн, в том числе нормальных волн продольного сдвига, остаются неисследованными.

Целью настоящей работы является построение и анализ теоретического численно-аналитического решения задачи о падении симметричных и антисимметричных нормальных упругих волн сдвига на наклоненную по отношению к граням плоскую торцевую граничную поверхность в полуслое при допущении о том, что все участки границы рассматриваемого тела являются жестко закрепленными. Используемый подход основывается на концепции метода частичных областей.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается отнесенный к нормированным безразмерным прямоугольным координатам  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  ортотропный упругий полуслой  $L_h^{(\xi)}$  толщины  $h$  с наклоненной плоской боковой граничной поверхностью, которая составляет угол  $\psi_0^{(\xi)}$  с его верхней плоской гранью

(рис. 1).

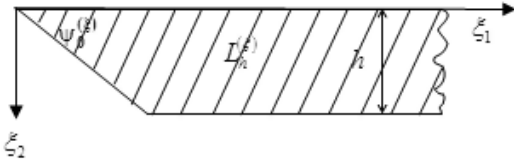


Рис. 1

Рассматриваемый полуслоя с наклонной боковой поверхность  $\Gamma_-^{(n)}$  интерпретируется как нижняя половина полуслоя  $L_{2h}^{(\xi)}$  толщины  $2h$  с треугольной клиновидной боковой поверхностью  $\Gamma_+^{(n)} \cup \Gamma_-^{(n)}$ . Сечение рассматриваемого тела с клиновидным профилем торца в плоскости

$O\xi_1\xi_2$  представлено на рис. 2. Грани  $\Gamma_{\pm}$ :  $\xi_2 = \pm h$  полуслоя  $L_{2h}^{(\xi)}$  и участки клиновидной боковой поверхности  $\Gamma_+^{(n)} \cup \Gamma_-^{(n)}$  полагаются закрепленными. Физико-механические свойства ортотропного материала полуслоя при динамической антиплоской деформации характеризуются упругими постоянными  $\{\tilde{c}_{44}, \tilde{c}_{55}\}$  и параметром плотности  $\rho$ .

Полагается, что в полуслое  $L_h^{(\xi)}$  вдоль направления, противоположного положительному координатному направлению  $O\xi_1$ , распространяется нормальная симметричная по толщине  $L_h^{(\xi)}$  поляризованная вдоль  $O\xi_3$  волна продольного сдвига с круговой частотой  $\omega$  из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра, характеризующая функцией упругих волновых перемещений  $u_3^{(i)}(\xi_1, \xi_2, t)$ .

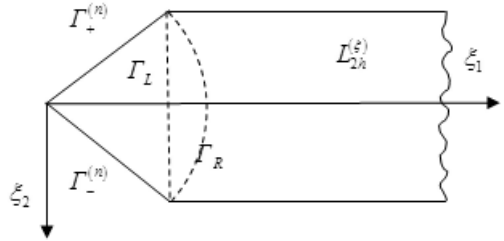


Рис. 2

При ее падении на наклонную боковую поверхность  $\Gamma_-^{(n)}$  формируется поле отраженных волн  $u_3^{(r)}(\xi_1, \xi_2, t)$ .

Комплексные амплитудные функции волновых перемещений в падающих и рассеянных волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнения стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации материала полуслоя, которое в случае отнесения всех характеристик с линейной размерностью к нормирующему параметру  $h$  принимает вид

$$(c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 - \rho h^2 c_*^{-1}\partial_t^2)u_3 = 0, \quad \partial_j = \partial/\partial\xi_j \quad (j = 1, 2), \quad \partial_t = \partial/\partial t. \quad (1)$$

Краевые условия рассматриваемой задачи на закрепленных плоских границах полуслоя  $L_{2h}^{(\xi)}$  и на закрепленных участках боковой границы  $\Gamma_{\pm}^{(n)}$  таковы

$$(u_3)_{\xi_2=\pm h} = 0, \quad (2)$$

$$(u_3)_{\Gamma_{\pm}^{(n)}} = 0. \quad (3)$$

В соотношениях (1)–(3)  $c_{55}$ ,  $c_{44}$  – отнесенные к нормирующему параметру  $c_* = \tilde{c}_{55}$  упругие постоянные материала полуслоя;  $u_3(\xi_1, \xi_2, t) = u_3^{(i)}(\xi_1, \xi_2, t) + u_3^{(r)}(\xi_1, \xi_2, t)$ . Задача заключается в описании и частотном параметрическом анализе волнового поля, являющегося суперпозицией полей падающих и отражаемых от  $\Gamma_{\pm}^{(n)}$  волн.

**2. Построение численно-аналитического решения задачи.** На исходном этапе построения решения осуществляется аффинное преобразование координат  $O\xi_1\xi_2$  в координаты  $Ox_1x_2$  на основе соотношений

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \mu\xi_2, \quad \mu = (c_{55}/c_{44})^{1/2}, \quad (4)$$

в результате которых уравнение (1) трансформируется в классическое волновое уравнение

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \rho h^2 c_*^{-1} \partial_t^2 \right) u_3 = 0. \quad (5)$$

В области сечения полуслоя  $L_{2h}$ , получаемого из  $L_{2h}^{(\xi)}$  преобразованиями (4), вводится вспомогательная система полярных координат  $Or\psi$  ( $x_1 = r \cos \psi$ ,  $x_2 = r \sin \psi$ ), а также выделяются частичные подобласти в виде полуполосы  $L = \{x_1 \in [l, \infty), x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$ ,  $h_\mu = \mu h$ , сектора  $L_R = \{r \in [0, R], \psi \in [-\psi_0, \psi_0]\}$ ,  $\psi_0 = \arctg(\mu \operatorname{tg} \psi_0^{(\xi)})$  и треугольника  $L_T = \{x_1 \in [0, l], x_2 \in [-x_1 \operatorname{tg} \psi_0, x_1 \operatorname{tg} \psi_0]\}$ ,  $L_T \subset L_R$ .

Для описания поля волн в подобласти сечения  $L$  вводится удовлетворяющее уравнению (5) и трансформированным краевым условиям (2) представление  $u_3^{(L)}$  в виде суммы падающей и отраженной составляющих

$$u_3^{(L)} = u_{30}^{(p)} \exp(-i(\omega t + k_p(x_1 - l))) \sin(p\pi x_2/h_\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-i(\omega t - k_n(x_1 - l))) \sin(n\pi x_2/h_\mu). \quad (6)$$

Поле волн, отраженных от боковой поверхности полуслоя с сечением  $L = \{x_1 \in [l, \infty), x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$ , в представлении (6) описывается суперпозицией базисных нормальных волн. В этом представлении  $A_n$  – произвольные коэффициенты;  $k_p$  и  $k_n$  – постоянные распространения для падающей и отражающихся нормальных волн из мод с соответствующими номерами. Структура представления (6) в пределах  $L$  обеспечивает выполнение условия  $(u_3)_{x_2=0} = 0$  и соответствует симметричному по толщине подобласти  $0 \leq x_2 \leq h_\mu$  распределению сдвиговых динамических перемещений в падающей волне при четных значениях  $p$ , либо их антисимметричному распределению при нечетных  $p$ . В соответствии с этим представление (6) в подобласти  $0 \leq x_2 \leq h_\mu$  описывает решение исходной сформулированной задачи о падении симметричных или антисимметричных нормальных упругих волн сдвига

в закрепленном анизотропном полуслое толщины  $h$  на наклоненную по отношению к граням плоскую торцевую граничную поверхность.

В частичной подобласти  $L_R$  для описания стационарного поля набегающих и рассеиваемых сдвиговых волн вводится удовлетворяющее уравнению (5) и краевому условию (3) представление

$$u_3^{(C)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\alpha_n}(kr) \exp(-i\omega t) \sin \alpha_n \psi, \quad (7)$$

в котором  $B_n$  – произвольные коэффициенты;  $\alpha_n = n\pi/\psi_0$ ,  $k = (\rho h^2 \omega^2 / c_*)^{1/2}$ ,  $J_{\alpha_n}(kr)$  – цилиндрические функции Бесселя первого рода. Коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$  в этом представлении подлежат определению из функциональных краевых условий на границе  $\Gamma = \{x_1 = l, x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$  контакта частичных областей  $L$  и  $L_T$

$$(u_3^{(L)})_\Gamma = (u_3^{(C)})_\Gamma, \quad (\sigma_{13}^{(L)})_\Gamma = (\sigma_{13}^{(C)})_\Gamma, \quad (8)$$

в которых

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(L)} &= -c_{55} u_{30} i k_p \exp(-i k_p (x_1 - l)) \sin \frac{p\pi x_2}{h} + \\ &+ c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} A_n i k_n \exp(i k_n (x_1 - l)) \sin \frac{n\pi x_2}{h}, \\ \sigma_{13}^{(C)} &= c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ k \left( \frac{\alpha_n}{kr} J_{\alpha_n}(kr) - J_{\alpha_n+1}(kr) \right) \sin \alpha_n \psi \cos \psi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_n}{r} J_{\alpha_n}(kr) \cos \alpha_n \psi \sin \psi \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

При использовании для алгебраизации функциональных краевых условий (8) метода наименьших квадратов эти условия сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} \Delta_{llnm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{B_m} \Delta_{lcnm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{lln}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} \Delta_{clnm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{B_m} \Delta_{ccnm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{cln}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Delta_{llnm} = \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{um}^{(L)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2,$

$$\Delta_{lcnm} = - \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{um}^{(C)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2,$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{lln} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{up}^{(L)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13p}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\
 \Delta_{clnm} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{um}^{(L)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\
 \Delta_{ccnm} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{um}^{(C)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(C)}(x_2)} dx_2, \\
 \delta_{cln} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{up}^{(L)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13p}^{(L)}(x_2)} dx_2; \\
 F_{up}^{(L)}(x_2) &= u_{30} \sin(p\pi x_2/h); \quad F_{un}^{(L)}(x_2) = \sin(n\pi x_2/h), \\
 F_{un}^{(C)}(x_2) &= J_{\alpha_n}(ks) \sin(\alpha_n \arcsin(x_2/s)), \\
 F_{13p}^{(L)}(x_2) &= c_{55}^{(L)} u_{30} (-ik_p) \sin(p\pi x_2/h), \quad F_{13n}^{(L)}(x_2) = ik_n c_{55}^{(L)} \sin(n\pi x_2/h), \\
 F_{13n}^{(C)}(x_2) &= c_{55}^{(L)} \cos \phi \sin(\alpha_n \phi) (\alpha_n J_{\alpha_n}(ks)/s - k J_{\alpha_n+1}(ks)) - \\
 &\quad - \sin \phi \cos(\alpha_n \phi) \alpha_n J_{\alpha_n}(ks)/s; \\
 s &= \sqrt{l^2 + x_2^2}, \quad \phi = \arcsin\left(x_2/\sqrt{l^2 + x_2^2}\right). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Система уравнений (10) в процессе численных исследований подлежит редукции, порядок которой устанавливается в соответствии с критериями требуемой точности удовлетворения краевым условиям и устойчивости результатов расчетов при варьировании параметра редукции. Расчеты характеристик динамического напряженно-деформированного состояния после определения искомым коэффициентов реализуются с переходом к исходным координатам.

**3. Результаты численных исследований.** Приведенные результаты численных исследований получены применительно к изотропному полуслою с торцевой поверхностью, наклоненной под углом  $\psi_0^{(\xi)} = \pi/3$  и под углом  $\psi_0^{(\xi)} = \pi/4$  в случаях рассеяния нормальной волны из низшей моды дисперсионного спектра симметричных сдвиговых волн в закрепленном изотропном слое с варьируемым параметром относительной длины  $\lambda = 2\pi/(kh)$ . Представлены расчеты полей волновых упругих перемещений в подобласти  $\xi_1 \leq 6h/\text{tg}(\psi_0^{(\xi)})$  для моментов времени, соответствующих началу периода волновых колебаний. Анализируемые поля иллюстрируются тонированными изображениями, в которых переход от темных тонов к светлым соответствует росту интенсивности описываемой характеристики.

На рис. 3–7 соответственно отражены распределения интенсивностей полей волновых перемещений для полуслоя с  $\psi_0^{(\xi)} = \pi/3$  при значениях  $\lambda$ , равных 0.7; 1.0; 1.3; 1.6; 3.0. На рис. 8–12 соответственно приведены аналогичные распределения в случае полуслоя с  $\psi_0^{(\xi)} = \pi/4$ .

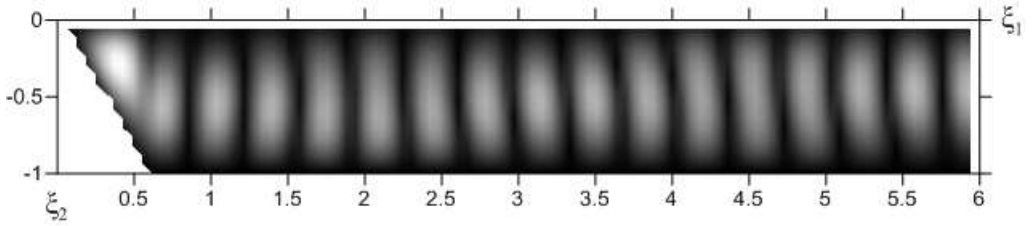


Рис. 3

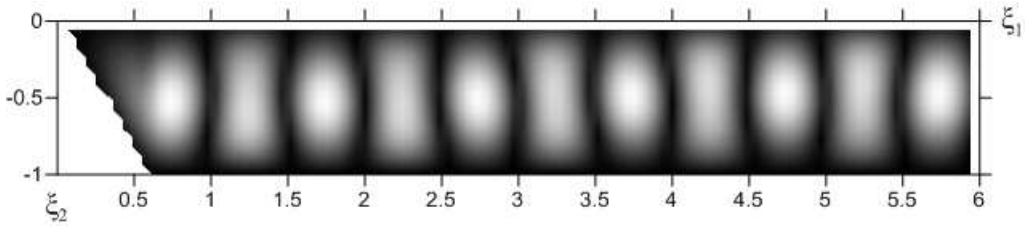


Рис. 4

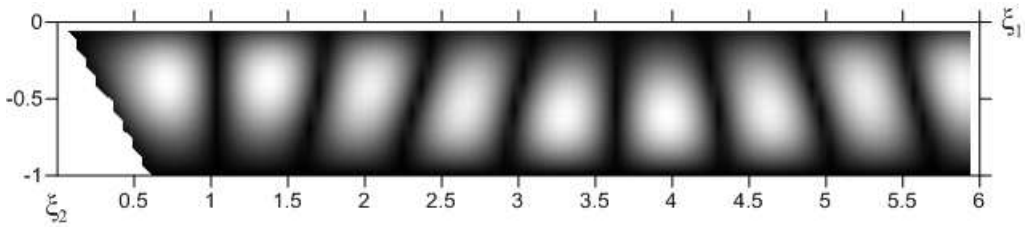


Рис. 5

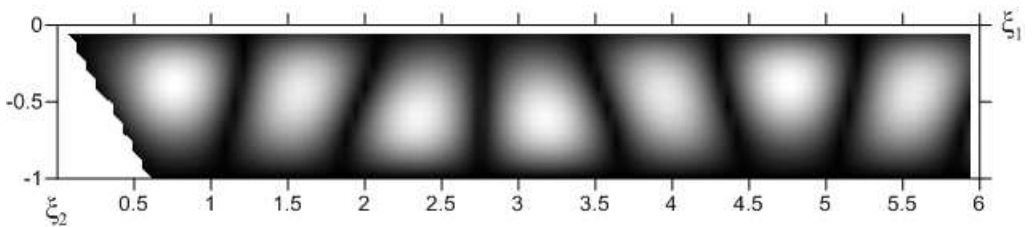


Рис. 6

На основе полученных данных можно констатировать малое влияние наклона торцевой поверхности на дальнейшее поле рассеиваемых волн при падении относительно длинной волны с  $\lambda \geq 3.0$ . Для более коротких волн с  $\lambda = 1.6$  и  $\lambda = 1.3$  основные эффекты заключаются в колебательных изменениях ориен-

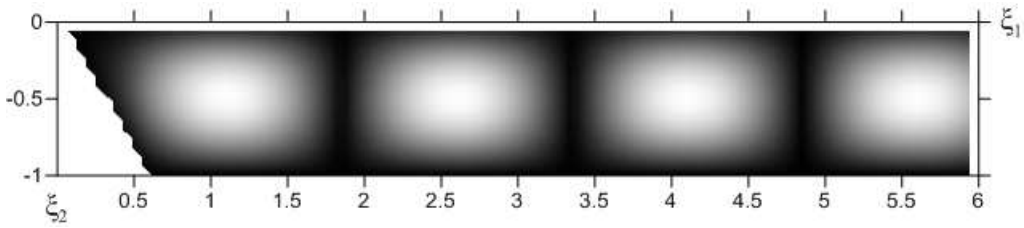


Рис. 7

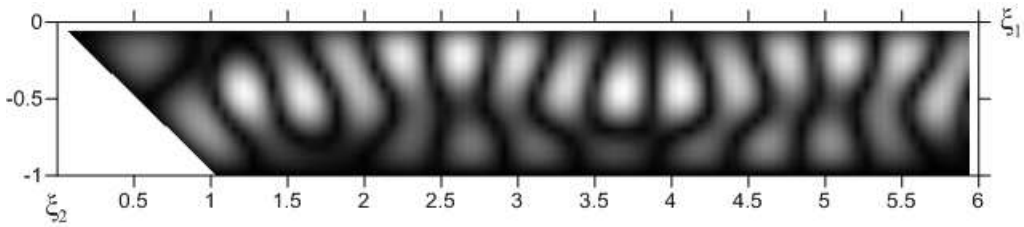


Рис. 8

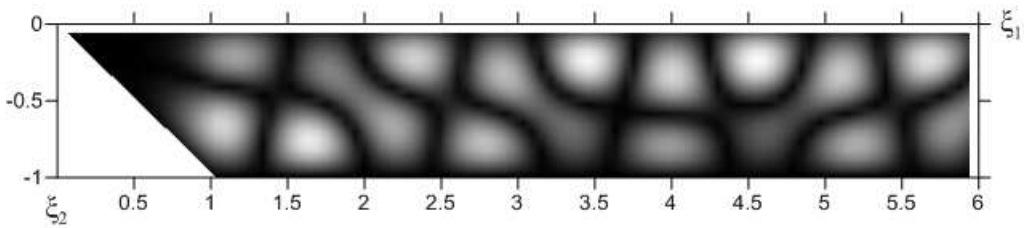


Рис. 9

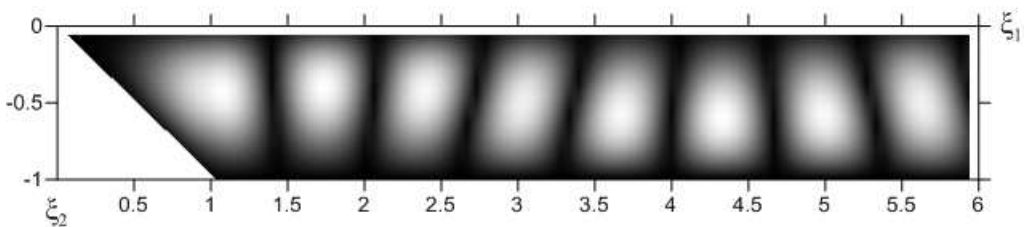


Рис. 10

тации нормалей к фронтам генерируемых в результате падения-отражения волн вдоль продольного направления волновода.

Для волн с  $\lambda = 1.0$  при рассматриваемых углах наклона торца карти-

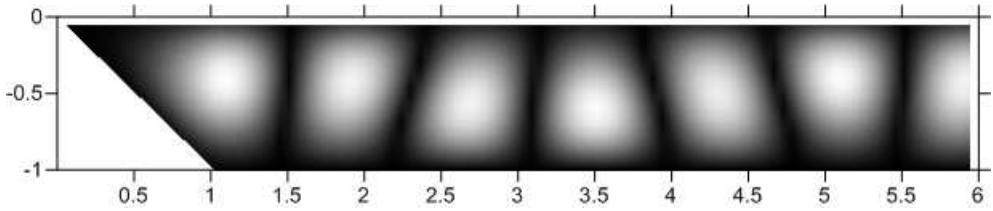


Рис. 11

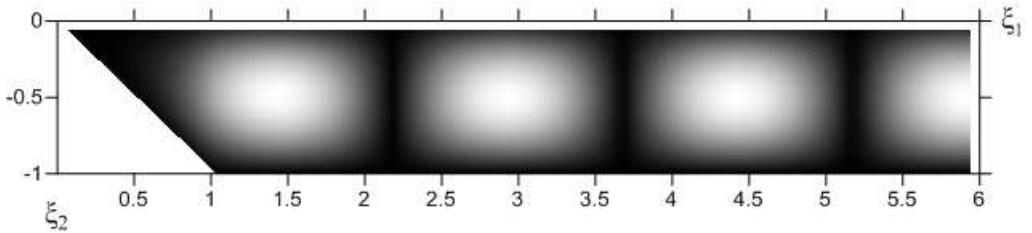


Рис. 12

на рассеяния существенно отличается. Если при  $\psi_0^{(\xi)} = \pi/3$  влияние наклона торцевой поверхности для волн этой относительной длины по сути уменьшается в сравнении со случаями  $\lambda = 1.6$  и  $\lambda = 1.3$ , то при  $\psi_0^{(\xi)} = \pi/4$  картина поля рассеянных волн качественно трансформируется. Наблюдается перестройка поля рассеиваемых волн во всей рассматриваемой зоне полуслоя. Подобные выводы касаются и случая еще более коротких волн с  $\lambda = 0.7$ , для которых в клиновидной приграничной подобласти также начинает формироваться фокусное пятно повышенной интенсивности волновых смещений и наблюдается эффект концентрации интенсивности волновых перемещений в окрестности ее вершины.

**Выводы.** В итоге проведенных исследований получено решение задачи о рассеянии нормальной волны сдвига, падающей на закрепленную плоскую боковую поверхность прямолинейно ортотропного полуслоя, наклоненную под произвольным углом к его закрепленным плоским граням. Использована концепция метода частичных областей с выделением геометрических элементов сечения в виде полуслоя с ортогональной граням боковой поверхностью и треугольной подобласти, дополняющей сечение до полуслоя с наклонной границей. Волновые поля в указанных подобластях после применения к исходному уравнению антиплоских колебаний ортотропной упругой среды приема аффинного преобразования координат соответственно представляются рядами с неопределенными коэффициентами по априори удовлетворяющим краевым условиям на плоских гранях и на наклонной боковой поверхности базисным частным решениям волнового уравнения в прямоугольных и полярных коор-



динатах. Алгебраизация функционального уравнения, следующего из краевых условий механического сопряжения выделенных в сечении подобластей, реализована с использованием метода наименьших квадратов. С использованием построенного решения осуществлены расчеты полей волновых перемещений в окрестности скошенной боковой поверхности для отдельных значений относительной длины падающей нормальной волны из низшей моды соответствующего дисперсионного спектра и варьируемых углах наклона торца. Дана характеристика некоторых ведущих свойств анализируемых полей.

1. *Бабенкова Е. В., Каплунов Ю. Д., Устинов Ю. А.* О принципе Сен-Венана в случае низкочастотных колебаний полуполосы // Прикл. математика и механика. – 2005. – **69**, № 3. – С. 445–457.
2. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
3. *Пельц С. П., Шихман В. М.* О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы // Докл. АН СССР. – 1987. – **295**. – № 4. – С. 821–824.
4. *Cho Y. H., Rose J. L.* A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves // J. Acoust. Soc. Amer. – 1996. – **99**, № 4. – P. 2097–2109.
5. *Gregory R. D., Gladwell I. G.* The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate // J. Elasticity. – 1983. – **13**. – P. 185–206.
6. *Ragneux V.* Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semiinfinite plate // J. Acoust. Soc. Amer. – 2006. – **120**, № 2. – P. 649–656.
7. *Torvic P. J.* Reflection of wave trains in semiinfinite plates // J. Acoust. Soc. Amer. – 1967. – **41**, № 2. – P. 346–353.
8. *Суворова Т. В.* О напряжениях в пространственном упругом полуслое с наклонной боковой гранью, возникающих под действием осциллирующей нагрузки // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. VIII Междунар. конф. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ. – 2002. – С. 178–182.

**M.N. Pacheva**

### **Reflection of normal shear waves from the inclined flat side surface of rigidly fixed semilayer**

Numerical-analytical algorithm for solving the problem of the reflection of normal shear wave incident on a flat side surface of rigidly fixed orthotropic semilayer inclined at an arbitrary angle to the flat faces is constructed. The approach is based on the concept of the method of partial domains. After applying of affine transformation of coordinates to the original equations of antiplanar vibrations of orthotropic elastic medium, wave fields in subareas are presented in the form of series in basic particular solutions of the wave equation in rectangular and polar coordinates with undetermined coefficients. This series a priori satisfy the boundary conditions on the flat faces and on the inclined side surface. Algebraization of functional equations of boundary conditions of the full mechanical coupling of subareas is implemented using the least-squares method. Some results are presented obtained by calculation of the elastic wave displacement fields in the vicinity of the beveled side surface for the individual values of the relative length of the incident waves of the lower mode from corresponding dispersion spectrums.

**Keywords:** *reflection of normal shear wave, method of partial domains, least-squares method, series of basic particular solutions of the wave equation.*

М.М. Пачева

**Відбиття нормальних хвиль зсуву від нахиленої торцевої поверхні напівшару з закріпленою межею**

Побудовано чисельно-аналітичний розв'язок крайової задачі про відбиття нормальної хвилі зсуву від нахиленої до граней під довільним кутом плоскої бічної поверхні пружного напівшару. Використано концепцію методу часткових областей з виділенням геометричних елементів перетину у вигляді напівсмуги з ортогональною граням бічною межею і трикутної підобласті, доповнюючої перетин до напівсмуги з нахиленим торцем. Хвильові поля в указаних підобластях зображуються рядами з невизначеними коефіцієнтами за задоволенняю крайовим умовам на плоских гранях і на нахиленій бічній поверхні базисними частинними розв'язками хвильового рівняння в прямокутних і полярних координатах. Алгебраїзація функціональних крайових умов механічного контакту виділених в перетині підобластей здійснюється методом найменших квадратів. Подано окремі результати розрахунку полів хвильових пружних переміщень в околі скошеної бічної поверхні для низки значень відносної довжини падаючої симетричної нормальної хвилі з нижчої моди відповідного дисперсійного спектру.

**Ключові слова:** розсіювання нормальної хвилі зсуву, метод часткових областей, ряди за базисними частинними розв'язками хвильового рівняння.

Донецький національний ун-т  
pacheva.m@i.ua

Получено 04.03.14