УДК 510.584

**А.А. ЛЯЛЕЦКИЙ**

# НОВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВАЖНЫХ ТЕОРЕМ БЕСТИПОВОГО ЭКСТЕНСИОНАЛЬНОГО $\lambda$-ИСЧИСЛЕНИЯ

**Аннотация.** Построены новые доказательства двух теорем бестипового экстенсионального $\lambda$-исчисления: теоремы Карри о том, что произвольный $\lambda$-терм имеет $\beta\eta$-нормальную форму тогда и только тогда, когда он имеет $\beta$-нормальную форму, и теоремы нормализации для $\beta\eta$-редукции. Приведенный подход базируется на двух широко известных результатах: теореме об откладывании $\eta$-редукции и свойстве сильной нормализуемости $\eta$-редукции, которые позволяют естественным образом распространить некоторые утверждения с обычного $\lambda$-исчисления на экстенсиональный случай.

**Ключевые слова:** бестиповое экстенсиональное $\lambda$-исчисление, откладывание $\eta$-редукции, теорема о $\beta\eta$-нормальной форме, теорема нормализации для $\beta\eta$-редукции.

В настоящей статье приведены новые простые доказательства двух важных результатов бестипового экстенсионального $\lambda$-исчисления: теоремы Карри о том, что произвольный $\lambda$-терм имеет $\beta\eta$-нормальную форму тогда и только тогда, когда он имеет $\beta$-нормальную форму, и теоремы нормализации для $\beta\eta$-редукции. Используемый подход базируется на двух широко известных результатах: теореме об откладывании $\eta$-редукции и очевидном свойстве сильной нормализуемости $\eta$-редукции, которые, как будет видно далее, позволят естественным образом распространить некоторые утверждения с обычного $\lambda$-исчисления на экстенсиональный случай. При этом теорема об откладывании $\eta$-редукции допускает элементарное доказательство, не использующее никаких специальных знаний ни о $\beta$-редукции, ни об $\eta$-редукции, которое также приведено в данной работе.

Отметим, что в работах о $\lambda$-исчислении [1–3] рассмотрены довольно длинные и технически сложные доказательства указанных результатов, однако их преимущество — конструктивность. В настоящей статье строятся более короткие и логически более прозрачные доказательства, причем с помощью только элементарных методов $\lambda$-исчисления.

Используем далее терминологию из [1]. При рассмотрении $\lambda$-термов всюду предполагаем, что выполнено соглашение об употреблении переменных. Учитывая общую направленность данной работы и желая сделать ее содержание самодостаточным с точки зрения экстенсионального $\lambda$-исчисления, будем приводить необходимые определения, а также формулировки и доказательства результатов, имеющих отношение к $\beta\eta$-редукции и $\beta\eta$-конверсии и использующихся при получении основных результатов; что касается $\beta$-редукции и $\beta$-конверсии, ограничимся ссылками на литературу.

Далее $\lambda$-термы будем обозначать символами $t$, $p$, $q$, $u$, $v$, $w$, переменные — символами $x$ и $y$, редексы — символом $\Delta$, совокупность всех $\lambda$-термов и множество всех переменных — символами $\Lambda$ и $X$ соответственно.

**Определение 1.** Пусть $R_0$ и $R_1$ — произвольные бинарные отношения, заданные на каком-то множестве $A$. Говорят, что $R_0$ откладывается относительно $R_1$, если выполняется следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dl, dashed, "R_1"'] \arrow[dr, "R_0"] & \\
\cdot \arrow[dr, dashed, "R_0"'] & & \cdot \arrow[dl, "R_1"] \\
& \cdot &
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

т.е. если $R_0 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_0$, где символ $\circ$ обозначает обычную композицию бинарных отношений.

Заметим, что если отношения $R_0$ и $R_1$ являются функциональными (т.е. унарными операциями на $A$), то $R_0$ откладывается относительно $R_1$ тогда и только тогда, когда $R_0 \circ R_1 = R_1 \circ R_0$; однако в общем случае из того, что $R_0$ откладывается относительно $R_1$, не следует, что $R_1$ откладывается относительно $R_0$, в чем легко убедиться, рассмотрев примеры.

Будем обозначать $R^*$ рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения $R$. Следующие две леммы можно рассматривать как прототипы различных теорем об откладывании.

**Лемма 1.** Пусть $R_0$ и $R_1$ — бинарные отношения, заданные на каком-то множестве $A$, причем $R_0$ откладывается относительно $R_1$. Тогда

$$(R_0 \cup R_1)^* = (R_1)^* \circ (R_0)^*.$$

**Доказательство.** Очевидно, что $(R_0 \cup R_1)^* \supseteq (R_1)^* \circ (R_0)^*$. Докажем противоположное включение. Предположим, что для некоторых элементов $a$ и $b$ множества $A$ имеет место отношение $a(R_0 \cup R_1)^* b$. При этом без умаления общности можно считать, что $a \neq b$. В этом случае существует конечная последовательность элементов множества $A$ вида

$$a = a_0 (R_0 \cup R_1) a_1 (R_0 \cup R_1) \ldots (R_0 \cup R_1) a_{n-1} = b,$$

т.е. любая пара $a_i$ и $a_{i+1}$ соседних элементов этой последовательности находится в отношении $R_0$ или в отношении $R_1$. Если все пары соседних элементов находятся либо одновременно в отношении $R_0$, либо одновременно в отношении $R_1$, то утверждение леммы очевидно. В противном случае существует такое наибольшее число $i$, $0 \le i \le n-3$, что выполняются соотношения $a_i R_0 a_{i+1} R_1 a_{a+2}$, т.е. данная последовательность имеет вид

$$a_0 (R_0 \cup R_1) a_1 (R_0 \cup R_1) \ldots (R_0 \cup R_1) a_i R_0 a_{i+1} R_1 a_{i+2} R_1 \ldots R_1 a_{i+k} R_1 \ldots R_1 a_{n-1}.$$

В силу (1) существует такой элемент $c_{i+1}$, что $a_i R_1 c_{i+1} R_0 a_{a+2}$, и можно привести последнюю последовательность к виду

$$a_0 (R_0 \cup R_1) a_1 (R_0 \cup R_1) \ldots (R_0 \cup R_1) a_i R_1 c_{i+1} R_0 a_{i+2} R_1 \ldots R_1 a_{i+k-1} R_0 \ldots R_0 a_{n-1}.$$

Повторив это действие $k-2$ раз, приходим к последовательности

$$a_0 (R_0 \cup R_1) a_1 (R_0 \cup R_1) \ldots (R_0 \cup R_1) a_i R_1 c_{i+1} R_0 c_{i+2} R_0 \ldots R_0 c_{i+k-1} R_0 \ldots R_0 a_{n-1}.$$

Два последних члена этой последовательности удовлетворяют соотношению $c_{n-2} R_0 a_{n-1}$, и можно применить индукцию по длине последовательности.

Лемма доказана.

**Определение 2.** Пусть $R_0$ и $R_1$ — бинарные отношения, заданные на каком-то множестве $A$. Говорят, что $R_0$ откладывается относительно $R_1$ в ослабленном смысле, или что $R_0$ слабо откладывается относительно $R_1$, если имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, dashed, "R_1^*"'] \arrow[dr, "R_0"] & \\ \cdot \arrow[dr, dashed, "R_0^*"'] & & \cdot \arrow[dl, "R_1"] \\ & \cdot & \end{tikzcd} \qquad (2)$$

**Лемма 2.** Пусть $R_0$ и $R_1$ — бинарные отношения, заданные на каком-то множестве $A$. Тогда:

1) для того чтобы $R_0^*$ откладывалось относительно $R_1^*$, необходимо и достаточно, чтобы $R_0$ слабо откладывалось относительно $R_1$;

2) если $R_0^*$ откладывается относительно $R_1^*$, то $(R_0^* \cup R_1^*)^* = R_1^* \circ R_0^*$.

**Доказательство.** 1. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Вначале из диаграммы (2) выведем диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, dashed, "R_1"'] \arrow[dr, "R_0^*"] & \\
\bullet \arrow[dr, dashed, "R_0^*"'] & & \bullet \arrow[dl, "R_1"] \\
& \bullet &
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

Действительно, она следует из диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, dashed, "R_1"'] \arrow[dr, "R_0"] & & & & \\
\bullet \arrow[dr, dashed, "R_0"'] & & \bullet \arrow[dl, dashed, "R_1"] \arrow[dr, "R_0"] & & & \\
& \bullet \arrow[dr, dashed, "R_0"'] & & \bullet \arrow[dl, dashed, "R_1"] \arrow[dr, dotted] & & \\
& & \bullet \arrow[dr, dotted] & & \bullet \arrow[dl, dashed, "R_1"] \arrow[dr, "R_0"] & \\
& & & \bullet \arrow[dr, dashed, "R_0"'] & & \bullet \arrow[dl, "R_1"] \\
& & & & \bullet &
\end{tikzcd}
$$

Аналогично, из диаграммы (3) следует диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
& & & & \bullet \arrow[dl, dashed, "R_1"'] \arrow[dr, "R_0^*"] & \\
& & & \bullet \arrow[dl, dashed, "R_1"'] \arrow[dr, dashed, "R_0^*"'] & & \bullet \arrow[dl, "R_1"] \\
& & \bullet \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dashed, "R_0^*"'] & & \bullet \arrow[dl, "R_1"] & \\
& \bullet \arrow[dl, dashed, "R_1"'] \arrow[dr, dashed, "R_0^*"'] & & \bullet \arrow[dl, dotted] & & \\
\bullet \arrow[dr, dashed, "R_0^*"'] & & \bullet \arrow[dl, "R_1"] & & & \\
& \bullet & & & &
\end{tikzcd}
$$

которая, в свою очередь, доказывает, что справедлива диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dl, dashed, "R_1^*"'] \arrow[dr, "R_0^*"] & \\
{} \arrow[dr, dashed, "R_0^*"'] & & {} \arrow[dl, "R_1^*"] \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

т.е. $R_0^*$ действительно перестановочно с $R_1^*$.

2. Если $R_0^*$ перестановочно с $R_1^*$, то в силу леммы 1 имеем

$$(R_0^* \cup R_1^*)^* = ((R_1^*)^* \circ (R_0^*))^* = R_1^* \circ R_0^*.$$

Лемма доказана.

Приведем следующие определения.

**Определение 3.** Понятие редукции $R$ — это произвольное бинарное отношение на множестве $\Lambda$ всех $\lambda$-термов. Каждое понятие редукции $R$ порождает отношение $\to_R$ одношаговой $R$-редукции как совместимое (с символическими операциями $\lambda$-исчисления) замыкание $R$, отношение $\twoheadrightarrow_R$ многошаговой $R$-редукции — как рефлексивно-транзитивное замыкание $\to_R$ и отношение $=_R$ $R$-конверсии — как эквивалентное замыкание $\twoheadrightarrow_R$. Если для каких-то двух $\lambda$-термов: $\Delta$ и $\Delta'$, имеет место $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in R$, то $\Delta$ называется $R$-редексом, а $\Delta'$ — его сверткой (в общем случае $R$-редекс может иметь несколько сверток).

Следовательно, $u \to_R v$ имеет место тогда и только тогда, когда $u \equiv C[\Delta]$ и $v \equiv C[\Delta']$ для некоторого $R$-контекста $C[\ ]$ с одной дырой, где $\Delta$ является $R$-редексом и $\Delta'$ — его сверткой.

Для любого понятия редукции $R$ обычным образом определяются так называемые $R$-редукционные цепочки и строятся $R$-редукционные графы $Gr_R(t)$ для любого $\lambda$-терма $t$.

**Определение 4.** Понятие $\eta$-редукци вводится как бинарное отношение $\eta = \{\langle \lambda x.wx, w\rangle \mid x \notin w\}$, понятие $\beta\eta$-редукции — равенством $\beta\eta = \beta \cup \eta$.

Эти понятия редукции описанным выше способом индуцируют соответствующие отношения одношаговой и многошаговой редукций, соответствующие отношения конверсии и прочие $\eta$- и $\beta\eta$-термины. Экстенсиональное $\lambda$-исчисление изучает, в основном, свойства отношений $\twoheadrightarrow_{\beta\eta}$ и $=_{\beta\eta}$. Заметим, что понятие $\beta\eta$-редукции устроено таким образом, что свертка $\Delta'$ любого $\beta\eta$-редекса $\Delta$ однозначно определяется по $\Delta$ (но обратное не верно).

Поскольку любое применение одношаговой $\eta$-редукции уменьшает длину терма, понятие $\eta$-редукции сильно нормализуемо, т.е. не существует бесконечных $\eta$-редукционных цепочек. Следовательно, любой $\lambda$-терм имеет $\eta$-нормальную форму, а из теоремы Черча–Россера для $\eta$-редукции (см. [1, с. 76–77]) следует, что такая $\eta$-нормальная форма единственна. Однако понятие $\beta$-редукции и, следовательно, понятие $\beta\eta$-редукции не являются сильно нормализуемыми.

Карри в [2] впервые получил следующий результат для построения первого доказательства теоремы Черча–Россера для $\beta\eta$-редукции. Приведенное далее доказательство близко к оригинальному доказательству Карри (другое доказательство см. в [1, с. 384–387]).

**Теорема об откладывании $\eta$-редукции.** Если $u \twoheadrightarrow_{\beta\eta} v$, то существует такой $\lambda$-терм $t$, что $u \twoheadrightarrow_{\beta} t \twoheadrightarrow_{\eta} v$.

**Доказательство.** В силу леммы 2 достаточно доказать частный случай общего утверждения теоремы, который выражается диаграммой

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
t \arrow[dr, dashed, two heads, "\eta"'] & & t' \arrow[dl, "\beta"] \\
 & v &
\end{tikzcd}$$

Иными словами, для каждой двухшаговой редукционной цепочки вида $u \overset{\Delta_\eta}{\rightarrow}_\eta t' \overset{\Delta_\beta}{\rightarrow}_\beta v$, где $\Delta_\eta$ и $\Delta_\beta$ являются вхождениями $\eta$-редекса и $\beta$-редекса соответственно, достаточно построить такой $\lambda$-терм $t$, что $u \twoheadrightarrow_\beta t \twoheadrightarrow_\eta v$. Пусть $\Delta_\eta \equiv \lambda x.wx$ и $\Delta_\beta \equiv (\lambda y.p)q$. Следовательно, свертка $\eta$-редекса $\Delta_\eta$ равна $w$. Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения $\Delta_\beta$ и $w$ в $\lambda$-терме $t'$:

| | |
|---|---|
| 1. $\Delta_\beta \bigcap w = \varnothing$ | |
| 2. $\Delta_\beta \subseteq w$ | |
| 3. $w \subset \Delta_\beta$ | 3.1. $w \subseteq p$ |
| | 3.2. $w \equiv \lambda y.\, p$ |
| | 3.3. $w \subseteq q$ |

Легко заметить, что в случаях 1 и 2, а также подслучае 3.1 существует единственное вхождение $\beta$-редекса $\overleftarrow{\Delta}_\beta$ в $u$, которое переходит в $\Delta_\beta$ при осуществлении одношаговой $\eta$-редукции $u \overset{\Delta_\eta}{\rightarrow}_\eta t'$. Теперь очевидно, что если начать с $\lambda$-терма $u$ и поменять порядок сворачивания редексов $\Delta_\eta$ и $\Delta_\beta$ (т.е. если вначале свернуть $\overleftarrow{\Delta}_\beta$, а затем — оставшееся от $\Delta_\eta$), то результирующий терм не изменится.

В подслучае 3.2 $\lambda$-терм $u$ имеет вид $u \equiv C\,[(\lambda x.(\lambda y.p)x)q]$ для подходящего контекста $C\,[\;]$ с одной дырой. Имеем

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & C\,[(\lambda x.(\lambda y.p)x)q] \arrow[dl, dashed, "\beta"', "(\lambda y.p)x"] \arrow[dr, "\eta", "\lambda x.\,(\lambda y.p)x"'] & \\
C\,[(\lambda x.p[\,y:=x])q] \arrow[dr, dashed, "(\lambda x.p[\,y:=x])q", "\beta"'] & & C[(\lambda y.\,p)q] \arrow[dl, "(\lambda y.p)q"', "\beta"] \\
 & C\,[\,p[\,y:=q]] &
\end{tikzcd}$$

поскольку $(\lambda y.\,p)q \equiv (\lambda x.\,p[\,y:=x])q$.

В подслучае 3.3 $\lambda$-терм $q$ можно представить в виде $q \equiv C_q[\Delta'_\eta]$, а $\lambda$-терм $u$ — в виде $u \equiv C\,[(\lambda y.\dots\, y\dots\, y\dots)C_q[\Delta_\eta]]$, где $C_q[\;]$ и $C[\;]$ — подходящие контексты с одной дырой и $\lambda y.\dots\, y\dots\, y\dots \equiv p$. Получаем

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & C\,[(\lambda y.\,\dots\, y\dots\, y\dots)C_q[\Delta_\eta]] \arrow[dl, dashed, "\beta"', "(\lambda y.p)x"] \arrow[dr, "\eta", "\Delta_\eta"'] & \\
C\,[(\,\dots C_q[\Delta_\eta]\,\dots C_q[\Delta_\eta]\,\dots)] \arrow[dr, dashed, "\eta"'] & & C\,[(\lambda y.\,\dots y\dots y\dots)C_q[\Delta_h]] \arrow[dl, "(\lambda y.\,\dots y\dots y\dots)C_q[w]"', "\beta"] \\
 & C\,[(\dots C_q[w]\dots C_q[w]\dots)] &
\end{tikzcd}$$

Теорема доказана.

Докажем упомянутую ранее теорему Карри о том, что наличие у произвольного $\lambda$-терма $\beta\eta$-нормальной формы равносильно наличию у него $\beta$-нормальной формы. Впервые эту теорему получил Карри в [3] с помощью прямого доказательства, подобного приведенному выше доказательству теоремы об откладывании $\eta$-редукции. Другое доказательство получил Х. Барендергт и др. в [4] (см. также [1, с. 384–386]). Ход приведенного далее доказательства в целом следует доказательству Карри, но базируется на одном специальном формализме из [1, 4], позволяющем существенно упростить логические построения и вычисления.

**Теорема о $\beta\eta$-нормальной форме.** Произвольный $\lambda$-терм имеет $\beta\eta$-нормальную форму тогда и только тогда, когда он имеет $\beta$-нормальную форму.

**Доказательство.** Достаточность. Действительно, если $\lambda$-терм $t$ имеет $\beta$-нормальную форму, скажем, $t'$, то применения $\eta$-редукции к вхождениям $\eta$-редексов в $t'$ уменьшают длину $t'$ и не создают новых $\beta$-редексов.

**Необходимость.** В силу теоремы об откладывании $\eta$-редукции, достаточно установить следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Если $t \twoheadrightarrow_\eta t'$ и $t'$ является $\beta$-нормальной формой, то $t$ имеет $\beta$-нормальную форму.

Для того чтобы удостовериться в справедливости утверждения 1, вначале введем вспомогательное расширение $\Lambda^\eta$ языка $\Lambda$, элементы которого называются $\lambda^\eta$-термами.

**Определение 5.** Грубо говоря, $\lambda^\eta$-терм — это произвольный $\lambda$-терм, некоторые (например, все или никакие) вхождения подтермов в который помечены одной или несколькими $\eta$-метками. Более формально язык $\Lambda^\eta$ определяется как наименьшее множество слов в алфавите языка обычных $\lambda$-термов, дополненном специальным символом $\eta$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $x$ — переменная $\Rightarrow$ слово $x \in \Lambda^\eta$;
- $t_0,\ t_1 \in \Lambda^\eta \Rightarrow t_0 t_1 \in \Lambda^\eta$;
- $x$ — переменная и $t \in \Lambda^\eta \ \Rightarrow\ \lambda_x . t \in \Lambda^\eta$;
- $t \in \Lambda^\eta \Rightarrow t^\eta \in \Lambda^\eta$.

Итак, $\lambda^\eta$-терм — это слово языка $\Lambda^\eta$.

Введем в рассмотрение следующие два отображения: $|\ |$ и $\psi$.

Отображение $|\ | : \Lambda^\eta \to \Lambda$ стирает все $\eta$-метки в любом $\lambda^\eta$-терме (никак более не изменяя его), а отображение $\psi : \Lambda^\eta \to \Lambda$ определяется индукцией по построению $\lambda^\eta$-терма:

- $\psi(x) = x$, $x$ — переменная;
- $\psi(t_0 t_1) = \psi(t_0)\psi(t_1)$;
- $\psi(\lambda x.t) = \lambda x.\psi(t)$;
- $\psi(t^\eta) = \lambda y.\psi(t)\,y$, $y$ — новая переменная.

Иными словами, отображение $\psi$ в каждом $\lambda^\eta$-терме «разворачивает» все его $\eta$-маркированные подтермы, начиная изнутри. Заметим, что из определений непосредственно следует (индукцией по построению $\lambda^\eta$-терма), что всегда $\psi(t) \twoheadrightarrow_\eta |t|$. В контексте данного доказательства отображения $|\ |$ и $\psi$ были введены для того, чтобы сформулировать следующее утверждение: если $t'$ является $\eta$-нормальной формой $\lambda$-терма $t$, то существует такой (единственный) $\lambda^\eta$-терм $\widetilde{t'}$, что $|\widetilde{t'}| \equiv t'$ и $\psi(\widetilde{t'}) \equiv t$. Поэтому утверждение 1 логически эквивалентно следующему утверждению, заимствованному из [1, с. 385–386, 4]).

**Лемма Барендрегта.** Пусть $t$ — произвольный $\lambda^\eta$-терм. Если $|t|$ является $\beta$-нормальной формой, то $\psi(t)$ имеет $\beta$-нормальную форму при любом $\lambda^\eta$-терме $t$.

Прежде, чем приступить к доказательству этой леммы, установим вспомогательные свойства отображения $\psi$, касающиеся отношения $=_\beta$ $\beta$-конверсии.

**Подлемма.** Для произвольных $\lambda^\eta$-термов $u$ и $v$ выполняются следующие соотношения:

а) $\psi(u^{\eta\eta}) =_\beta \psi(u^\eta)$;

б) $\psi(\lambda x.u)^\eta =_\beta \psi(\lambda x.u) \equiv \lambda x.\psi(u)$;

в) $\psi(u^\eta v) =_\beta \psi(u)\psi(v) \equiv \psi(uv)$.

**Доказательство (подлеммы).** Справедливы следующие равенства:

а) $\psi(u^{\eta\eta}) = \lambda y.\psi(u^\eta)y = \lambda y.(\lambda z.\psi(u)z)y =_\beta \lambda z.\psi(u)z = \psi(u^\eta)$;

б) $\psi(\lambda x.u)^\eta = \psi(\lambda y.(\lambda x.u)y) \equiv \lambda y.(\lambda x.\psi(u))y =_\beta \lambda y.\psi(u) \equiv \psi(\lambda x.u)$;

в) $\psi(u^\eta v) = (\lambda y.\psi(u)y)\psi(v) =_\beta \psi(u)\psi(v) \equiv \psi(uv)$.

**Доказательство леммы Барендрегта** проведем индукцией по построению $\lambda$-терма $|t|$.

Случай 1. Терм $|t|$ является переменной, $t \equiv x$. Следовательно, $|t| \equiv x^*$, где * обозначает нуль, один или несколько маркеров $\eta$. Из тождества а) подлеммы следует, что терм $\psi(t)$ равен либо $x$, либо $\lambda y.xy$ в зависимости от того, имеет ли переменная $x$ хотя бы один маркер $\eta$ в терме $t$.

Случай 2. Терм $|t|$ имеет вид $|t| \equiv \lambda x.u$, где $u$ находится в $\beta$-нормальной форме. Тогда $t$ можно представить в виде $t \equiv (\lambda x.t')^*$, где $|t'| \equiv u$. Из тождеств а) и б) подлеммы вытекает, что терм $\psi(t)$ равен $\lambda x.\psi(t')$, и доказываемое утверждение следует из предположения индукции.

Случай 3. Терм $|t|$ имеет вид $|t| \equiv xu_1u_2\ldots u_k$, где все $\lambda$-термы $u_i$ находятся в $\beta$-нормальной форме. Следовательно, терм $t$ можно представить в виде $t \equiv ((\ldots((x^*t_1)^*t_2)^*\ldots)^*t_k)^*$, где $|t_i| = u_i$. Из равенств а) и в) подлеммы следует, что $\psi(t)$ равен либо $x\psi(u_1)\psi(u_2)\ldots\psi(u_k)$, либо $\lambda y.x\psi(u_1)\psi(u_2)\ldots\psi(u_k)y$ в зависимости от того, имеет ли терм $t$ хотя бы один внешний маркер $\eta$. Теперь доказываемое утверждение следует из предположения индукции.

Это завершает доказательство леммы Барендрегта, а вместе с ней и утверждения 1.

Теорема о $\beta\eta$-нормальной форме доказана.

Сформулируем и докажем теорему нормализации для $\beta\eta$-редукции, которую доказал Я. Клоп в [5, с. 279–293] с помощью так называемых редукционных диаграмм. Доказательство, приводимое далее, строится на основании аналога этой теоремы для $\beta$-редукции и доказанных в настоящей статье результатов. Однако вначале исследуем некоторые дополнительные свойства общего понятия редукции для того, чтобы затем применить их к $\beta\eta$-случаю.

Грубо говоря, два $\lambda$-терма: $t_0$ и $t_1$, будем считать эквивалентными, если $t_1$ можно получить из $t_0$ одновременным инъективным переименованием свободных переменных (заметим, что в силу соглашения об употреблении переменных любые два $\lambda$-терма такие, что один из них можно получить из другого переименованием связывающих переменных, отождествляются). Например, $\lambda$-термы $\lambda a.acxxyz$ и $\lambda b.bdyyxz$ эквивалентны. Более формально это понятие вводится следующим образом.

**Определение 6.** Символом $S_X$ обозначим группу всех перестановок множества $X$, где $X$ — множество всех переменных языка $\lambda$-термов. Продолжим действие каждой перестановки $\pi \in S_X$ до перестановки $\Lambda$ индукцией по построению $\lambda$-терма

$$(uv)^{\pi} = u^{\pi} v^{\pi}; \ (\lambda x. u)^{\pi} = \lambda x^{\pi}. u^{\pi}.$$

Наконец, $\lambda$-термы $t_0$ и $t_1$ называются эквивалентными, если $t_1 = t_0^{\pi}$ для некоторой перестановки $\pi \in S_X$; эквивалентность $\lambda$-термов $t_0$ и $t_1$ будем обозначать $t_0 \approx t_1$.

Очевидно, что $\approx$ действительно является отношением эквивалентности. Обозначим $\Lambda_s$ совокупность всех $\lambda$-термов, размер которых равен $s$. Поскольку произвольный $\lambda$-терм размера $s$ имеет максимум $s$ различных вхождений любых переменных, любое множество попарно неэквивалентных $\lambda$-термов фиксированного размера $s$ является конечным, т.е. для любого $s$ фактор-множество $\Lambda_s / \approx$ конечно.

**Определение 7.** Бинарное отношение $R$ на множестве $\Lambda$ называется абстрактным, если $R$ выдерживает применение любой подстановки $\pi \in S_X$, т.е. из $\langle t_0, t_1 \rangle \in R$ следует $\langle t_0^{\pi}, t_1^{\pi} \rangle \in R$.

По определению, каждое понятие редукции — это бинарное отношение на множестве $\Lambda$; если понятие $R$ редукции является абстрактным, то такими же будут отношения одношаговой и многошаговой $R$-редукций, а также отношение $R$-конверсии. Практически все важные понятия редукции являются абстрактными; например, понятия $\beta$- и $\eta$-редукций и, следовательно, понятие $\beta\eta$-редукции.

На содержательном уровне можно сказать, что понятие редукции $R$ абстрактно, если все эквивалентные между собой $\lambda$-термы имеют равноправные относительно $R$ свойства. В предположении абстрактности $R$ отсюда вытекает, в частности, следующее. Во-первых, множество $R$-NF всех $R$-нормальных форм замкнуто относительно отношения $\approx$: $t \in R\text{-NF} \ \& \ t \approx t' \Rightarrow t' \in R\text{-NF}$. Во-вторых, если $t_0 \approx t_1$, т.е. $t_1 = t_0^{\pi}$ для некоторой подстановки $\pi \in S_X$, то $R$-редукционные графы $Gr_R(t_0)$ и $Gr_R(t_1)$ $\lambda$-термов $t_0$ и $t_1$ изоморфны, а именно: $Gr_R(t_1) = Gr_R^{\pi}(t_0) = Gr_R(t_0^{\pi})$, где обозначение $Gr_R^{\pi}(t)$ имеет очевидный смысл.

**Определение 8.** Пусть $R$ — произвольное понятие редукции. Напомним, что под $R$-стратегией понимается любая такая функция $f: \Lambda \to \Lambda$, что:

- $t = f(t)$, если $t$ является $R$-нормальной формой;
- $t \twoheadrightarrow_R f(t)$ в противном случае.

Каждую $R$-стратегию $f$ можно рассматривать как частный случай понятия редукции; $f$ является абстрактной тогда и только тогда, когда равенство $f(t^{\pi}) = (f(t))^{\pi}$ выполняется при любых $\lambda$-терме $t$ и перестановке $\pi \in S_X$. Заметим, что в общем случае из того, что понятие $R$ редукции является абстрактным, не следует абстрактность $R$-стратегии $f$, даже при дополнительном предположении, о том, что $f$ является одношаговой. Но если $R$ функционально, т.е. если каждый $R$-редекс имеет в точности одну свертку, то из абстрактности $R$ следует абстрактность всех одношаговых $R$-стратегий.

Обозначим $R$-NF множество всех $R$-нормальных форм, $\overline{R\text{-NF}}$ — множество всех $\lambda$-термов, имеющих $R$-нормальную форму и наконец, положим $\overline{R\text{-NF}}_s = \overline{R\text{-NF}} \cap \Lambda_s$.

**Определение 9.** Напомним, что $R$-стратегия $f$ называется нормализующей, если из того, что $\lambda$-терм $t$ имеет $R$-нормальную форму, следует, что $f^n(t) \in R\text{-NF}$ для некоторого натурального числа $n$.

**Лемма 3.** Пусть даны абстрактное понятие $R$ редукции и нормализующая абстрактная $R$-стратегия $f$. Для любого натурального числа $s$ найдется натуральное число $m = m(f, s)$ такое, что $f^m(t) \in R\text{-NF}$, если только $t \in \overline{R\text{-NF}}_s$.

**Доказательство.** Как уже установлено, фактор-множество $\overline{R\text{-NF}_s / \approx}$ конечно. Произвольным образом выберем из каждого класса эквивалентности по одному представителю, которые обозначим $r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}$. Для любого $\lambda$-терма $t \in R\text{-NF}_s$ найдется такое число $i$, что $t \approx r_i$. В силу абстрактности $R$ и $f$ следующие $f$-редукционные цепочки

$$t \to_f f(t) \to_f f^2(t) \to_f \ldots,$$

$$r_i \to_f f(r_i) \to_f f^2(r_i) \to_f \ldots$$

имеют одинаковые абстрактные $\{R, f\}$-порожденные свойства. В частности, если $m_i$ — такое наименьшее натуральное число, что $f^{m_i}(r_i) \in R\text{-NF}$, то $m_i$ имеет такое же свойство и для $f$-редукционной цепочки, начинающейся термом $t$ (такое число $m_i$ существует, поскольку $t \in R\text{-NF}_s$ и $f$ — нормализующая стратегия). Теперь, положив $m = \max\limits_{i=\overline{0, k-1}} m_i$, найдем искомое натуральное число $m$ (и даже наименьшее число, которое имеет нужное свойство).

Лемма доказана.

**Определение 10.** Пусть $\Delta_0$ и $\Delta_1$ — два вхождения $\beta\eta$-редексов в какой-то $\lambda$-терм $t$. Будем говорить, что $\Delta_0$ расположен (строго) левее $\Delta_1$ в $t$, и записывать $\Delta_0 < \Delta_1$, если либо первый символ из $\Delta_0$ расположен в $t$ строго левее, чем первый символ из $\Delta_1$, либо расположение первых символов из $\Delta_0$ и $\Delta_1$ в $t$ совпадают (а тогда и сами эти символы совпадают) и при этом $\Delta_0 \subset \Delta_1$.

Заметим, что $\Delta_0 < \Delta_1$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется в точности одно из следующих условий: либо первый символ из $\Delta_0$ расположен в $t$ строго левее, чем первый символ из из $\Delta_1$; либо местоположения в $t$ первых символов из $\Delta_0$ и $\Delta_1$ совпадают, но $\Delta_0$ является $\eta$-редексом, а $\Delta_1$ — $\beta$-редексом. В частности, если вхождения $\Delta_0$ и $\Delta_1$ являются либо одновременно $\beta$-редексами, либо одновременно $\eta$-редексами, то $\Delta_0 < \Delta_1$ тогда и только тогда, когда первый символ из $\Delta_0$ расположен в $t$ строго левее, чем первый символ из $\Delta_1$.

**Определение 11.** Стратегией $\beta\eta$-левой редукции называется стратегия $f_{\beta\eta}^{left}$, которая сворачивает самое левое вхождение $\beta\eta$-редекса (если рассматриваемый $\lambda$-терм не находится в $\beta\eta$-нормальной форме); аналогично определяется стратегия $f_{\beta}^{left}$ $\beta$-левой редукции.

Условимся вместо $f_{\beta\eta}^{left}(t) = t'$ писать $t \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t'$, а вместо $f_{\beta}^{left}(t) = t'$ — писать $t \xrightarrow[\beta\text{-}left]{} t'$. Очевидно, стратегии $f_{\beta\eta}^{left}$ и $f_{\beta}^{left}$ являются $\beta\eta$-одношаговыми, т.е. если $\lambda$-терм $t$ не является $\beta\eta$-нормальной формой, то из $t \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t'$ следует, что $t \to_{\beta\eta} t'$. Если, например, одновременно имеют место редукции $t \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t'$ и $t \to_{\beta} t'$, то будем писать $t \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{}{}_{\beta}\, t'$.

**Теорема нормализации для $\beta\eta$-редукции.** Стратегия $\beta\eta$-левой редукции является нормализующей.

**Доказательство** проведем от противного. Предположим, что существует такой $\lambda$-терм $t$, что $t \in \beta\eta\text{-NF}$, но $f_{\beta\eta}^{left}$-редукционная цепочка

$$t \equiv t_0 \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t_1 \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t_2 \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} \ldots \tag{4}$$

не содержит ни одного члена $t_i$, являющегося $\beta\eta$-нормальной формой. Поскольку стратегия $\beta\eta$-левой редукции одношаговая, то в этой редукционной цепочке каждый $\lambda$-терм $t_{i+1}$ получается из предыдущего сворачиванием либо

$\beta$-редекса, либо $\eta$-редекса. Так как понятие $\eta$-редукции сильно нормализуемо, рассматриваемая редукционная цепочка содержит бесконечное число сворачиваемых вхождений $\beta$-редексов; в соответствии с очередностью их сворачивания обозначим их $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ Запишем цепочку (4) в виде

$$t \equiv t_0 \twoheadrightarrow_\eta t_{i_0} \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{\Delta_0}{}_\beta\, t_{i_0+1} \twoheadrightarrow_\eta t_{i_1} \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{\Delta_1}{}_\beta\, t_{i_1+1} \twoheadrightarrow_\eta$$

$$\twoheadrightarrow_\eta t_{i_2} \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{\Delta_2}{}_\beta\, t_{i_2+1} \twoheadrightarrow_\eta \cdots \tag{5}$$

Согласно теореме о $\beta\eta$-нормальной форме $\lambda$-терм $t$ имеет какую-то $\beta$-нормальную форму. Поскольку стратегия $f_\beta^{left}$ $\beta$-левой редукции является нормализующей (доказательство теоремы нормализации для $\beta$-редукции см. в [1, с. 328–329]), будет получено противоречие с леммой 3, если для некоторого натурального числа $n$ такого, что $n > m(f_\beta^{left}, s)$, удастся перестроить какой-то начальный сегмент цепочки (5) в цепочку вида

$$t \equiv t'_{i_0} \xrightarrow[\beta\text{-}left]{\Delta'_0}{}_\beta\, t'_{i_1} \xrightarrow[\beta\text{-}left]{\Delta'_1}{}_\beta\, t'_{i_2} \xrightarrow[\beta\text{-}left]{\Delta'_2}{}_\beta \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow[\beta\text{-}left]{\Delta'_{n-2}}{}_\beta\, t'_{i_{n-2}} \xrightarrow[\beta\text{-}left]{\Delta'_{n-1}}{}_\beta\, t'_{i_{n-1}} \twoheadrightarrow_{\beta\eta} \cdots \tag{6}$$

(здесь первые $n$ вхождений редексов $\Delta'_0, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_{n-1}$ являются самыми левыми $\beta$-редексами).

Выберем любое такое натуральное число $n$, что $n > m(f_\beta^{left}, s)$, и рассмотрим начальный сегмент цепочки (5), оканчивающийся сворачиванием вхождения $\beta$-редекса $\Delta_{n-1}$:

$$t \equiv t_0 \twoheadrightarrow_\eta t_{i_0} \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{\Delta_0}{}_\beta\, t_{i_0+1} \twoheadrightarrow_\eta t_{i_1} \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{\Delta_1}{}_\beta\, t_{i_1+1} \twoheadrightarrow_\eta \cdots$$

$$\cdots \twoheadrightarrow_\eta t_{i_{n-1}} \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{\Delta_{i_{n-1}}}{}_\beta\, t_{i_{n-1}+1}. \tag{7}$$

Для того чтобы преобразовать (7) к виду (6), воспользуемся приводимой ниже леммой 4; при этом без умаления общности можно считать, что в цепочке (7) сворачивается хотя бы один $\eta$-редекс (иначе поставленная цель уже достигнута).

Введем следующие вспомогательные обозначения. Зафиксируем какую-то одношаговую $\beta\eta$-редукционную цепочку $p \xrightarrow{\Delta} q$. Если $w$ является вхождением $\beta\eta$-редекса в $p$ и имеет единственный остаток при сворачивании $\Delta$, то этот остаток обозначим $\overrightarrow{w}$. Аналогично, если $w$ является вхождением $\beta\eta$-редекса в $q$ и при этом существует такое единственное вхождение $\beta\eta$-редекса в $p$, которое переходит в $w$ при сворачивании $\Delta$, то это вхождение обозначим $\overleftarrow{w}$; иными словами, $\overleftarrow{w}$ — это «коостаток».

**Лемма 4.** Пусть задана двухшаговая редукционная цепочка вида $u \xrightarrow{\Delta_\eta}{}_\eta\, v_1 \xrightarrow[\beta\text{-}left]{\Delta^1_\beta}{}_\beta\, v_2$, причем $\Delta_\eta < \overleftarrow{\Delta^1_\beta}$. Тогда имеет место следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
& u \arrow[dl, dashed, "\beta\text{-}left"', "\beta"] \arrow[dr, "\eta"] & \\
v'_1 \arrow[rr, phantom, "\overleftarrow{\Delta^1_\beta}\quad \Delta_\eta"] \arrow[dr, dashed, "\eta"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\overrightarrow{\Delta}_\eta \quad \Delta^1_\beta"] & & v_1 \arrow[dl, "\beta\text{-}left", "\beta"'] \\
& v_2 &
\end{tikzcd}$$

где всегда $\overleftarrow{\Delta}_{\beta}^{1}$ является вхождением $\beta$-редекса, а $\overrightarrow{\Delta}_{\eta}$ — вхождением $\eta$-редекса. При этом, если терм $v_1$ имеет самое левое вхождение $\Delta_{\beta}^{1}$ $\beta$-редекса, то $\overrightarrow{\Delta}_{\eta} < \overleftarrow{\Delta}_{\beta}^{1}$.

**Доказательство** (леммы 4). Заметим, что эта лемма является специальным уточнением теоремы об откладывании $\eta$-редукции. А именно из условия $\Delta_{\eta} < \overleftarrow{\Delta}_{\beta}^{1}$ следует, что либо $\Delta_{\eta} \bigcap \overleftarrow{\Delta}_{\beta}^{1} = \varnothing$, либо $\Delta_{\eta} \supset \overleftarrow{\Delta}_{\beta}^{1}$. Эти ситуации являются соответственно случаем 1 и подслучаем 3.1 из доказательства теоремы об откладывании $\eta$-редукции. Второе утверждение очевидно.

Лемма доказана.

**Определение 12.** Пусть задана какая-то конечная $\beta\eta$-редукционная цепочка $\sigma$. Она допускает единственное представление в виде $\sigma = \sigma' + \sigma_{\eta}$, где $\sigma_{\eta}$ — $\eta$-редукционная цепочка максимальной длины; цепочки $\sigma'$ и $\sigma_{\eta}$ назовем соответственно телом и хвостом цепочки $\sigma$.

Заметим, что в вырожденных случаях как тело, так и хвост цепочки $\sigma$ могут оказаться пустыми.

Наконец, можем преобразовать цепочку (7) к виду (6) и тем самым закончить доказательство теоремы нормализации для $\beta\eta$-редукции. Цепочку (7) обозначим $\sigma_0$. Заметим, что $\sigma_0$ совпадает со своим телом и ее хвост пуст. Пусть $\Delta_{\eta}^{0}$ — последнее вхождение $\eta$-редекса в $\sigma_0$ (без умаления общности можно считать, что в цепочке (7) сворачивается хотя бы один $\eta$-редекс, так как иначе указанная цель уже достигнута). Итеративно применяя лемму 4 к $\Delta_{\eta}^{0}$, через какое-то конечное число шагов отложим $\Delta_{\eta}^{0}$ в хвост редукционной цепочки. Получим $\beta\eta$-редукционную цепочку $\sigma_1$, в теле которой количество сворачиваемых $\eta$-редексов на единицу меньше, а количество сворачиваемых $\beta$-редексов — на единицу больше, чем в теле $\sigma_0$. Обозначим $\Delta_{\eta}^{1}$ последнее вхождение $\eta$-редекса в тело цепочки $\sigma_1$. Повторив указанный процесс откладывания $\Delta_{\eta}^{1}$ в хвост $\sigma_1$, опять получим $\beta\eta$-редукционную цепочку $\sigma_2$, в теле которой количество сворачиваемых $\eta$-редексов на единицу меньше, а количество сворачиваемых $\beta$-редексов на единицу больше, чем в теле $\sigma_1$. Аналогично построим цепочки $\sigma_3$, $\sigma_4$ и т.д. Следовательно, для некоторого натурального числа $k$ тело цепочки $\sigma_k$ содержит ровно $n$ сворачиваемых $\beta$-редексов и не содержит сворачиваемых $\eta$-редексов. Это означает, что $\sigma_k$ — искомая цепочка вида (6).

Теорема нормализации для $\beta\eta$-редукции доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Барендрегт Х. $\lambda$-исчисление. Его синтаксис и семантика. — М.: Мир, 1985. — 606 с.
2. Curry H.B., Feyes R., Craig W. Combinatory logic. — Amsterdam: North-Holland., 1958. — **1**.
3. Curry H.B., Hindley J.R., Seldin J.P. Combinatory logic. — Amsterdam: North-Holland, 1972. — **2**.
4. Barendregt H.P., Bergstra J., Klop J.W., Voken H. Some notes on lambda reduction // Degrees, reductions, and representability in the lambda calculus. — Utrecht: Univ. of Utrecht, Dep. of Math., 1976. Preprint N 22. — P. 13–53.
5. Klop J.W. Combinatory reduction systems // Ph.D. Thesis. — Utrecht: Utrecht univ., 1980. — 323 p.


*Поступила 17.06.2013*