

НОВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВАЖНЫХ ТЕОРЕМ БЕСТИПОВОГО ЭКСТЕНСИОНАЛЬНОГО λ -ИСЧИСЛЕНИЯ

Аннотация. Построены новые доказательства двух теорем бестипового экстенционального λ -исчисления: теоремы Карри о том, что произвольный λ -терм имеет $\beta\eta$ -нормальную форму тогда и только тогда, когда он имеет β -нормальную форму, и теоремы нормализации для $\beta\eta$ -редукции. Приведенный подход базируется на двух широко известных результатах: теореме об откладывании η -редукции и свойстве сильной нормализуемости η -редукции, которые позволяют естественным образом распространить некоторые утверждения с обычного λ -исчисления на экстенциональный случай.

Ключевые слова: бестиповое экстенциональное λ -исчисление, откладывание η -редукции, теорема о $\beta\eta$ -нормальной форме, теорема нормализации для $\beta\eta$ -редукции.

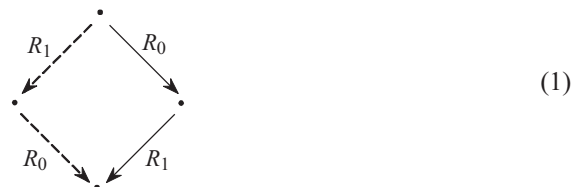
В настоящей статье приведены новые простые доказательства двух важных результатов бестипового экстенционального λ -исчисления: теоремы Карри о том, что произвольный λ -терм имеет $\beta\eta$ -нормальную форму тогда и только тогда, когда он имеет β -нормальную форму, и теоремы нормализации для $\beta\eta$ -редукции. Используемый подход базируется на двух широко известных результатах: теореме об откладывании η -редукции и очевидном свойстве сильной нормализуемости η -редукции, которые, как будет видно далее, позволят естественным образом распространить некоторые утверждения с обычного λ -исчисления на экстенциональный случай. При этом теорема об откладывании η -редукции допускает элементарное доказательство, не использующее никаких специальных знаний ни о β -редукции, ни об η -редукции, которое также приведено в данной работе.

Отметим, что в работах о λ -исчислении [1–3] рассмотрены довольно длинные и технически сложные доказательства указанных результатов, однако их преимущество — конструктивность. В настоящей статье строятся более короткие и логически более прозрачные доказательства, причем с помощью только элементарных методов λ -исчисления.

Используем далее терминологию из [1]. При рассмотрении λ -термов всюду предполагаем, что выполнено соглашение об употреблении переменных. Учитывая общую направленность данной работы и желая сделать ее содержание самодостаточным с точки зрения экстенционального λ -исчисления, будем приводить необходимые определения, а также формулировки и доказательства результатов, имеющих отношение к $\beta\eta$ -редукции и $\beta\eta$ -конверсии и использующихся при получении основных результатов; что касается β -редукции и β -конверсии, ограничимся ссылками на литературу.

Далее λ -термы будем обозначать символами t, p, q, u, v, w , переменные — символами x и y , редексы — символом Δ , совокупность всех λ -термов и множество всех переменных — символами Λ и X соответственно.

Определение 1. Пусть R_0 и R_1 — произвольные бинарные отношения, заданные на каком-то множестве A . Говорят, что R_0 откладывается относительно R_1 , если выполняется следующая диаграмма:



т.е. если $R_0 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_0$, где символ \circ обозначает обычную композицию бинарных отношений.

Заметим, что если отношения R_0 и R_1 являются функциональными (т.е. унарными операциями на A), то R_0 откладывается относительно R_1 тогда и только тогда, когда $R_0 \circ R_1 = R_1 \circ R_0$; однако в общем случае из того, что R_0 откладывается относительно R_1 , не следует, что R_1 откладывается относительно R_0 , в чем легко убедиться, рассмотрев примеры.

Будем обозначать R^* рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения R . Следующие две леммы можно рассматривать как прототипы различных теорем об откладывании.

Лемма 1. Пусть R_0 и R_1 — бинарные отношения, заданные на каком-то множестве A , причем R_0 откладывается относительно R_1 . Тогда

$$(R_0 \cup R_1)^* = (R_1)^* \circ (R_0)^*.$$

Доказательство. Очевидно, что $(R_0 \cup R_1)^* \supseteq (R_1)^* \circ (R_0)^*$. Докажем противоположное включение. Предположим, что для некоторых элементов a и b множества A имеет место отношение $a(R_0 \cup R_1)^* b$. При этом без умаления общности можно считать, что $a \neq b$. В этом случае существует конечная последовательность элементов множества A вида

$$a = a_0(R_0 \cup R_1)a_1(R_0 \cup R_1) \dots (R_0 \cup R_1)a_{n-1} = b,$$

т.е. любая пара a_i и a_{i+1} соседних элементов этой последовательности находится в отношении R_0 или в отношении R_1 . Если все пары соседних элементов находятся либо одновременно в отношении R_0 , либо одновременно в отношении R_1 , то утверждение леммы очевидно. В противном случае существует такое наибольшее число i , $0 \leq i \leq n-3$, что выполняются соотношения $a_i R_0 a_{i+1} R_1 a_{i+2}$, т.е. данная последовательность имеет вид

$$a_0(R_0 \cup R_1)a_1(R_0 \cup R_1) \dots (R_0 \cup R_1)a_i R_0 a_{i+1} R_1 a_{i+2} R_1 \dots R_1 a_{i+k} R_1 \dots R_1 a_{n-1}.$$

В силу (1) существует такой элемент c_{i+1} , что $a_i R_1 c_{i+1} R_0 a_{i+2}$, и можно привести последнюю последовательность к виду

$$a_0(R_0 \cup R_1)a_1(R_0 \cup R_1) \dots (R_0 \cup R_1)a_i R_1 c_{i+1} R_0 a_{i+2} R_1 \dots R_1 a_{i+k-1} R_0 \dots R_0 a_{n-1}.$$

Повторив это действие $k-2$ раз, приходим к последовательности

$$a_0(R_0 \cup R_1)a_1(R_0 \cup R_1) \dots (R_0 \cup R_1)a_i R_1 c_{i+1} R_0 c_{i+2} R_0 \dots R_0 c_{i+k-1} R_0 \dots R_0 a_{n-1}.$$

Два последних члена этой последовательности удовлетворяют соотношению $c_{n-2} R_0 a_{n-1}$, и можно применить индукцию по длине последовательности.

Лемма доказана.

Определение 2. Пусть R_0 и R_1 — бинарные отношения, заданные на каком-то множестве A . Говорят, что R_0 откладывается относительно R_1 в ослабленном смысле, или что R_0 слабо откладывается относительно R_1 , если имеет место диаграмма



Лемма 2. Пусть R_0 и R_1 — бинарные отношения, заданные на каком-то множестве A . Тогда:

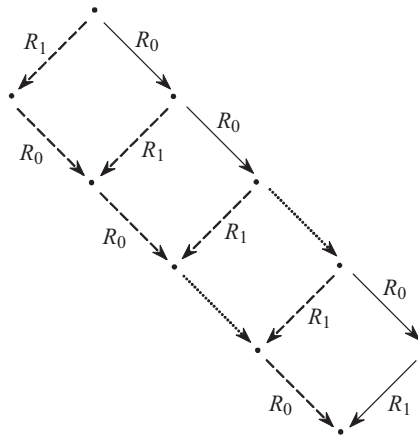
1) для того чтобы R_0^* откладывалось относительно R_1^* , необходимо и достаточно, чтобы R_0 слабо откладывалось относительно R_1 ;

2) если R_0^* откладывается относительно R_1^* , то $(R_0^* \cup R_1^*)^* = R_1^* \circ R_0^*$.

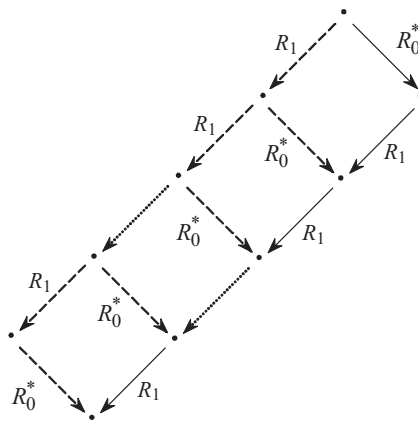
Доказательство. 1. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Вначале из диаграммы (2) выведем диаграмму



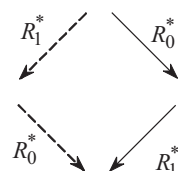
Действительно, она следует из диаграммы



Аналогично, из диаграммы (3) следует диаграмма



которая, в свою очередь, доказывает, что справедлива диаграмма



т.е. R_0^* действительно перестановочно с R_1^* .

2. Если R_0^* перестановочно с R_1^* , то в силу леммы 1 имеем

$$(R_0^* \cup R_1^*)^* = ((R_1^*)^* \circ (R_0^*))^* = R_1^* \circ R_0^*.$$

Лемма доказана.

Приведем следующие определения.

Определение 3. Понятие редукции R — это произвольное бинарное отношение на множестве Λ всех λ -термов. Каждое понятие редукции R порождает отношение \rightarrow_R одношаговой R -редукции как совместимое (с символическими операциями λ -исчисления) замыкание R , отношение \twoheadrightarrow_R многошаговой R -редукции — как рефлексивно-транзитивное замыкание \rightarrow_R и отношение $=_R$ R -конверсии — как эквивалентное замыкание \twoheadrightarrow_R . Если для каких-то двух λ -термов: Δ и Δ' , имеет место $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in R$, то Δ называется R -редексом, а Δ' — его сверткой (в общем случае R -редекс может иметь несколько свертки).

Следовательно, $u \rightarrow_R v$ имеет место тогда и только тогда, когда $u \equiv C[\Delta]$ и $v \equiv C[\Delta']$ для некоторого R -контекста $C[\]$ с одной дырой, где Δ является R -редексом и Δ' — его сверткой.

Для любого понятия редукции R обычным образом определяются так называемые R -редукционные цепочки и строятся R -редукционные графы $Gr_R(t)$ для любого λ -терма t .

Определение 4. Понятие η -редукции вводится как бинарное отношение $\eta = \{ \langle \lambda x. wx, w \rangle \mid x \notin w \}$, понятие $\beta\eta$ -редукции — равенством $\beta\eta = \beta \cup \eta$.

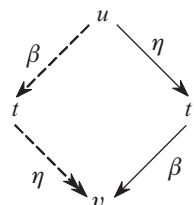
Эти понятия редукции описанным выше способом индуцируют соответствующие отношения одношаговой и многошаговой редукций, соответствующие отношения конверсии и прочие η - и $\beta\eta$ -термины. Экстенциональное λ -исчисление изучает, в основном, свойства отношений $\twoheadrightarrow_{\beta\eta}$ и $=_{\beta\eta}$. Заметим, что понятие $\beta\eta$ -редукции устроено таким образом, что свертка Δ' любого $\beta\eta$ -редекса Δ однозначно определяется по Δ (но обратное не верно).

Поскольку любое применение одношаговой η -редукции уменьшает длину терма, понятие η -редукции сильно нормализуемо, т.е. не существует бесконечных η -редукционных цепочек. Следовательно, любой λ -терм имеет η -нормальную форму, а из теоремы Черча–Россера для η -редукции (см. [1, с. 76–77]) следует, что такая η -нормальная форма единственна. Однако понятие β -редукции и, следовательно, понятие $\beta\eta$ -редукции не являются сильно нормализуемыми.

Карри в [2] впервые получил следующий результат для построения первого доказательства теоремы Черча–Россера для $\beta\eta$ -редукции. Приведенное далее доказательство близко к оригинальному доказательству Карри (другое доказательство см. в [1, с. 384–387]).

Теорема об откладывании η -редукции. Если $u \twoheadrightarrow_{\beta\eta} v$, то существует такой λ -терм t , что $u \twoheadrightarrow_{\beta} t \twoheadrightarrow_{\eta} v$.

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно доказать частный случай общего утверждения теоремы, который выражается диаграммой

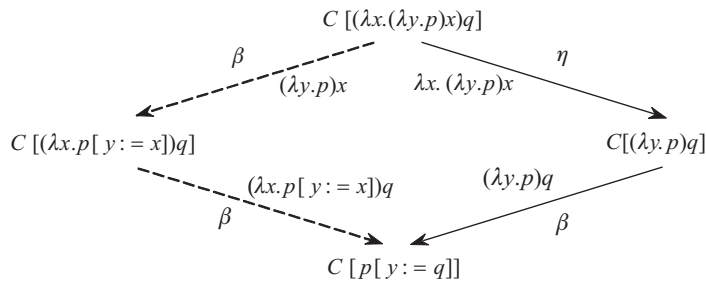


Иными словами, для каждой двухшаговой редукционной цепочки вида $u \xrightarrow{\Delta_\eta} t' \xrightarrow{\Delta_\beta} v$, где Δ_η и Δ_β являются вхождениями η -редекса и β -редекса соответственно, достаточно построить такой λ -терм t , что $u \xrightarrow{\beta} t \xrightarrow{\eta} v$. Пусть $\Delta_\eta \equiv \lambda x. wx$ и $\Delta_\beta \equiv (\lambda y. p)q$. Следовательно, свертка η -редекса Δ_η равна w . Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения Δ_β и w в λ -терме t' :

1. $\Delta_\beta \cap w = \emptyset$	
2. $\Delta_\beta \subseteq w$	
3. $w \subset \Delta_\beta$	3.1. $w \subseteq p$
	3.2. $w \equiv \lambda y. p$
	3.3. $w \subseteq q$

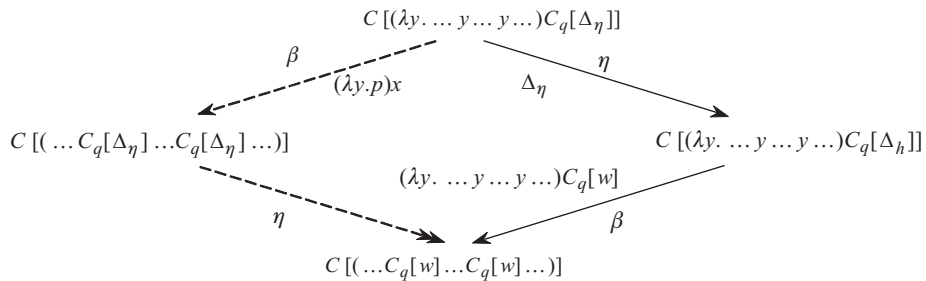
Легко заметить, что в случаях 1 и 2, а также подслучае 3.1 существует единственное вхождение β -редекса $\overleftarrow{\Delta}_\beta$ в u , которое переходит в Δ_β при осуществлении одношаговой η -редукции $u \xrightarrow{\Delta_\eta} t'$. Теперь очевидно, что если начать с λ -терма u и поменять порядок сворачивания редексов Δ_η и Δ_β (т.е. если вначале свернуть $\overleftarrow{\Delta}_\beta$, а затем — оставшееся от Δ_η), то результирующий терм не изменится.

В подслучае 3.2 λ -терм u имеет вид $u \equiv C[(\lambda x. (\lambda y. p)x)q]$ для подходящего контекста $C[\]$ с одной дырой. Имеем



поскольку $(\lambda y. p)q \equiv (\lambda x. p[y:=x])q$.

В подслучае 3.3 λ -терм q можно представить в виде $q \equiv C_q[\Delta'_\eta]$, а λ -терм u — в виде $u \equiv C[(\lambda y. \dots y \dots y \dots)C_q[\Delta_\eta]]$, где $C_q[\]$ и $C[\]$ — подходящие контексты с одной дырой и $\lambda y. \dots y \dots y \dots \equiv p$. Получаем



Теорема доказана.

Докажем упомянутую ранее теорему Карри о том, что наличие у произвольного λ -терма $\beta\eta$ -нормальной формы равносильно наличию у него β -нормальной формы. Впервые эту теорему получил Карри в [3] с помощью прямого доказательства, подобного приведенному выше доказательству теоремы об откладывании η -редукции. Другое доказательство получил Х. Барендергт и др. в [4] (см. также [1, с. 384–386]). Ход приведенного далее доказательства в целом следует доказательству Карри, но базируется на одном специальном формализме из [1, 4], позволяющем существенно упростить логические построения и вычисления.

Теорема о $\beta\eta$ -нормальной форме. Произвольный λ -терм имеет $\beta\eta$ -нормальную форму тогда и только тогда, когда он имеет β -нормальную форму.

Доказательство. Достаточность. Действительно, если λ -терм t имеет β -нормальную форму, скажем, t' , то применения η -редукции к вхождениям η -редексов в t' уменьшают длину t' и не создают новых β -редексов.

Необходимость. В силу теоремы об откладывании η -редукции, достаточно установить следующее утверждение.

Утверждение 1. Если $t \twoheadrightarrow_{\eta} t'$ и t' является β -нормальной формой, то t имеет β -нормальную форму.

Для того чтобы удостовериться в справедливости утверждения 1, вначале введем вспомогательное расширение Λ^{η} языка Λ , элементы которого называются λ^{η} -термами.

Определение 5. Грубо говоря, λ^{η} -терм — это произвольный λ -терм, некоторые (например, все или никакие) вхождения подтермов в который помечены одной или несколькими η -метками. Более формально язык Λ^{η} определяется как наименьшее множество слов в алфавите языка обычных λ -термов, дополненном специальным символом η , удовлетворяющее следующим условиям:

- x — переменная \Rightarrow слово $x \in \Lambda^{\eta}$;
- $t_0, t_1 \in \Lambda^{\eta} \Rightarrow t_0 t_1 \in \Lambda^{\eta}$;
- x — переменная и $t \in \Lambda^{\eta} \Rightarrow \lambda_x.t \in \Lambda^{\eta}$;
- $t \in \Lambda^{\eta} \Rightarrow t^{\eta} \in \Lambda^{\eta}$.

Итак, λ^{η} -терм — это слово языка Λ^{η} .

Введем в рассмотрение следующие два отображения: $||$ и ψ .

Отображение $||: \Lambda^{\eta} \rightarrow \Lambda$ стирает все η -метки в любом λ^{η} -терме (никак более не изменяя его), а отображение $\psi: \Lambda^{\eta} \rightarrow \Lambda$ определяется индукцией по построению λ^{η} -терма:

- $\psi(x) = x$, x — переменная;
- $\psi(t_0 t_1) = \psi(t_0)\psi(t_1)$;
- $\psi(\lambda_x.t) = \lambda_x.\psi(t)$;
- $\psi(t^{\eta}) = \lambda_y.\psi(t)y$, y — новая переменная.

Иными словами, отображение ψ в каждом λ^{η} -терме «разворачивает» все его η -маркированные подтермы, начиная изнутри. Заметим, что из определений непосредственно следует (индукцией по построению λ^{η} -терма), что всегда $\psi(t) \twoheadrightarrow_{\eta} ||t||$. В контексте данного доказательства отображения $||$ и ψ были введены для того, чтобы сформулировать следующее утверждение: если t' является η -нормальной формой λ -терма t , то существует такой (единственный) λ^{η} -терм \tilde{t}' , что $||\tilde{t}'|| \equiv t'$ и $\psi(\tilde{t}') \equiv t$. Поэтому утверждение 1 логически эквивалентно следующему утверждению, заимствованному из [1, с. 385–386, 4]).

Лемма Барендрегта. Пусть t — произвольный λ^η -терм. Если $|t|$ является β -нормальной формой, то $\psi(t)$ имеет β -нормальную форму при любом λ^η -терме t .

Прежде, чем приступить к доказательству этой леммы, установим вспомогательные свойства отображения ψ , касающиеся отношения $=_\beta$ β -конверсии.

Подлемма. Для произвольных λ^η -термов u и v выполняются следующие соотношения:

- а) $\psi(u^m) =_\beta \psi(u^\eta)$;
- б) $\psi(\lambda x.u)^\eta =_\beta \psi(\lambda x.u) \equiv \lambda x.\psi(u)$;
- в) $\psi(u^\eta v) =_\beta \psi(u)\psi(v) \equiv \psi(uv)$.

Доказательство (подлеммы). Справедливы следующие равенства:

- а) $\psi(u^m) = \lambda y.\psi(u^\eta)y = \lambda y.(\lambda z.\psi(u)z)y =_\beta \lambda z.\psi(u)z = \psi(u^\eta)$;
- б) $\psi(\lambda x.u)^\eta = \psi(\lambda y.(\lambda x.u)y) \equiv \lambda y.(\lambda x.\psi(u))y =_\beta \lambda y.\psi(u) \equiv \psi(\lambda x.u)$;
- в) $\psi(u^\eta v) = (\lambda y.\psi(u)y)\psi(v) =_\beta \psi(u)\psi(v) \equiv \psi(uv)$.

Доказательство леммы Барендрегта проведем индукцией по построению λ -терма $|t|$.

Случай 1. Терм $|t|$ является переменной, $t \equiv x$. Следовательно, $|t| \equiv x^*$, где $*$ обозначает нуль, один или несколько маркеров η . Из тождества а) подлеммы следует, что терм $\psi(t)$ равен либо x , либо $\lambda y.x$ в зависимости от того, имеет ли переменная x хотя бы один маркер η в терме t .

Случай 2. Терм $|t|$ имеет вид $|t| \equiv \lambda x.u$, где u находится в β -нормальной форме. Тогда t можно представить в виде $t \equiv (\lambda x.t')^*$, где $|t'| \equiv u$. Из тождеств а) и б) подлеммы вытекает, что терм $\psi(t)$ равен $\lambda x.\psi(t')$, и доказываемое утверждение следует из предположения индукции.

Случай 3. Терм $|t|$ имеет вид $|t| \equiv x u_1 u_2 \dots u_k$, где все λ -термы u_i находятся в β -нормальной форме. Следовательно, терм t можно представить в виде $t \equiv ((\dots ((x^* t_1)^* t_2)^* \dots)^* t_k)^*$, где $|t_i| \equiv u_i$. Из равенств а) и в) подлеммы следует, что $\psi(t)$ равен либо $x\psi(u_1)\psi(u_2)\dots\psi(u_k)$, либо $\lambda y.x\psi(u_1)\psi(u_2)\dots\psi(u_k)y$ в зависимости от того, имеет ли терм t хотя бы один внешний маркер η . Теперь доказываемое утверждение следует из предположения индукции.

Это завершает доказательство леммы Барендрегта, а вместе с ней и утверждения 1.

Теорема о $\beta\eta$ -нормальной форме доказана.

Сформулируем и докажем теорему нормализации для $\beta\eta$ -редукции, которую доказал Я. Клоп в [5, с. 279–293] с помощью так называемых редукционных диаграмм. Доказательство, приводимое далее, строится на основании аналога этой теоремы для β -редукции и доказанных в настоящей статье результатов. Однако вначале исследуем некоторые дополнительные свойства общего понятия редукции для того, чтобы затем применить их к $\beta\eta$ -случаю.

Грубо говоря, два λ -терма: t_0 и t_1 , будем считать эквивалентными, если t_1 можно получить из t_0 одновременным инъективным переименованием свободных переменных (заметим, что в силу соглашения об употреблении переменных любые два λ -терма такие, что один из них можно получить из другого переименованием связывающих переменных, отождествляются). Например, $\lambda a.acxxz$ и $\lambda b.bdyxz$ эквивалентны. Более формально это понятие вводится следующим образом.

Определение 6. Символом S_X обозначим группу всех перестановок множества X , где X — множество всех переменных языка λ -термов. Продолжим дей-

ствие каждой перестановки $\pi \in S_X$ до перестановки Λ индукцией по построению λ -терма

$$(uv)^\pi = u^\pi v^\pi; (\lambda x.u)^\pi = \lambda x^\pi . u^\pi .$$

Наконец, λ -термы t_0 и t_1 называются эквивалентными, если $t_1 = t_0^\pi$ для некоторой перестановки $\pi \in S_X$; эквивалентность λ -термов t_0 и t_1 будем обозначать $t_0 \approx t_1$.

Очевидно, что \approx действительно является отношением эквивалентности. Обозначим Λ_s совокупность всех λ -термов, размер которых равен s . Поскольку произвольный λ -терм размера s имеет максимум s различных вхождений любых переменных, любое множество попарно неэквивалентных λ -термов фиксированного размера s является конечным, т.е. для любого s фактор-множество Λ_s / \approx конечно.

Определение 7. Бинарное отношение R на множестве Λ называется абстрактным, если R выдерживает применение любой подстановки $\pi \in S_X$, т.е. из $\langle t_0, t_1 \rangle \in R$ следует $\langle t_0^\pi, t_1^\pi \rangle \in R$.

По определению, каждое понятие редукции — это бинарное отношение на множестве Λ ; если понятие R редукции является абстрактным, то такими же будут отношения одношаговой и многошаговой R -редукций, а также отношение R -конверсии. Практически все важные понятия редукции являются абстрактными; например, понятия β - и η -редукций и, следовательно, понятие $\beta\eta$ -редукции.

На содержательном уровне можно сказать, что понятие редукции R абстрактно, если все эквивалентные между собой λ -термы имеют равноправные относительно R свойства. В предположении абстрактности R отсюда вытекает, в частности, следующее. Во-первых, множество R -NF всех R -нормальных форм замкнуто относительно отношения \approx : $t \in R\text{-NF} \ \& \ t \approx t' \Rightarrow t' \in R\text{-NF}$. Во-вторых, если $t_0 \approx t_1$, т.е. $t_1 = t_0^\pi$ для некоторой подстановки $\pi \in S_X$, то R -редукционные графы $Gr_R(t_0)$ и $Gr_R(t_1)$ λ -термов t_0 и t_1 изоморфны, а именно: $Gr_R(t_1) = Gr_R^\pi(t_0) = Gr_R(t_0^\pi)$, где обозначение $Gr_R^\pi(t)$ имеет очевидный смысл.

Определение 8. Пусть R — произвольное понятие редукции. Напомним, что под R -стратегией понимается любая такая функция $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$, что:

- $t = f(t)$, если t является R -нормальной формой;
- $t \rightarrow_R f(t)$ в противном случае.

Каждую R -стратегию f можно рассматривать как частный случай понятия редукции; f является абстрактной тогда и только тогда, когда равенство $f(t^\pi) = (f(t))^\pi$ выполняется при любых λ -терме t и перестановке $\pi \in S_X$. Заметим, что в общем случае из того, что понятие R редукции является абстрактным, не следует абстрактность R -стратегии f , даже при дополнительном предположении, о том, что f является одношаговой. Но если R функционально, т.е. если каждый R -редекс имеет в точности одну свертку, то из абстрактности R следует абстрактность всех одношаговых R -стратегий.

Обозначим $R\text{-NF}$ множество всех R -нормальных форм, $\overline{R\text{-NF}}$ — множество всех λ -термов, имеющих R -нормальную форму и наконец, положим $\overline{R\text{-NF}}_s = \overline{R\text{-NF}} \cap \Lambda_s$.

Определение 9. Напомним, что R -стратегия f называется нормализующей, если из того, что λ -терм t имеет R -нормальную форму, следует, что $f^n(t) \in R\text{-NF}$ для некоторого натурального числа n .

Лемма 3. Пусть даны абстрактное понятие R редукции и нормализующая абстрактная R -стратегия f . Для любого натурального числа s найдется натуральное число $m = m(f, s)$ такое, что $f^m(t) \in R\text{-NF}$, если только $t \in \overline{R\text{-NF}}_s$.

Доказательство. Как уже установлено, фактор-множество $\overline{R\text{-NF}_s}/\approx$ конечно. Произвольным образом выберем из каждого класса эквивалентности по одному представителю, которые обозначим r_0, r_1, \dots, r_{k-1} . Для любого λ -терма $t \in R\text{-NF}_s$ найдется такое число i , что $t \approx r_i$. В силу абстрактности R и f следующие f -редукционные цепочки

$$\begin{aligned} t &\rightarrow_f f(t) \rightarrow_f f^2(t) \rightarrow_f \dots, \\ r_i &\rightarrow_f f(r_i) \rightarrow_f f^2(r_i) \rightarrow_f \dots \end{aligned}$$

имеют одинаковые абстрактные $\{R, f\}$ -порожденные свойства. В частности, если m_i — такое наименьшее натуральное число, что $f^{m_i}(r_i) \in R\text{-NF}$, то m_i имеет такое же свойство и для f -редукционной цепочки, начинающейся термом t (такое число m_i существует, поскольку $t \in R\text{-NF}_s$ и f — нормализующая стратегия). Теперь, положив $m = \max_{i=0, k-1} m_i$, найдем искомое натуральное число m (и даже наименьшее число, которое имеет нужное свойство).

Лемма доказана.

Определение 10. Пусть Δ_0 и Δ_1 — два вхождения $\beta\eta$ -редексов в какой-то λ -терм t . Будем говорить, что Δ_0 расположен (строго) левее Δ_1 в t , и записывать $\Delta_0 < \Delta_1$, если либо первый символ из Δ_0 расположен в t строго левее, чем первый символ из Δ_1 , либо расположение первых символов из Δ_0 и Δ_1 в t совпадают (а тогда и сами эти символы совпадают) и при этом $\Delta_0 \subset \Delta_1$.

Заметим, что $\Delta_0 < \Delta_1$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется в точности одно из следующих условий: либо первый символ из Δ_0 расположен в t строго левее, чем первый символ из Δ_1 ; либо местоположения в t первых символов из Δ_0 и Δ_1 совпадают, но Δ_0 является η -редексом, а Δ_1 — β -редексом. В частности, если вхождения Δ_0 и Δ_1 являются либо одновременно β -редексами, либо одновременно η -редексами, то $\Delta_0 < \Delta_1$ тогда и только тогда, когда первый символ из Δ_0 расположен в t строго левее, чем первый символ из Δ_1 .

Определение 11. Стратегией $\beta\eta$ -левой редукции называется стратегия $f_{\beta\eta}^{left}$, которая сворачивает самое левое вхождение $\beta\eta$ -редекса (если рассматриваемый λ -терм не находится в $\beta\eta$ -нормальной форме); аналогично определяется стратегия f_{β}^{left} β -левой редукции.

Условимся вместо $f_{\beta\eta}^{left}(t) = t'$ писать $t \xrightarrow{\beta\eta\text{-left}} t'$, а вместо $f_{\beta}^{left}(t) = t'$ — писать $t \xrightarrow{\beta\text{-left}} t'$. Очевидно, стратегии $f_{\beta\eta}^{left}$ и f_{β}^{left} являются $\beta\eta$ -одношаговыми, т.е. если λ -терм t не является $\beta\eta$ -нормальной формой, то из $t \xrightarrow{\beta\eta\text{-left}} t'$ следует, что $t \rightarrow_{\beta\eta} t'$. Если, например, одновременно имеют место редукции $t \xrightarrow{\beta\eta\text{-left}} t'$ и $t \rightarrow_{\beta} t'$, то будем писать $t \xrightarrow[\beta]{\beta\eta\text{-left}} t'$.

Теорема нормализации для $\beta\eta$ -редукции. Стратегия $\beta\eta$ -левой редукции является нормализующей.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует такой λ -терм t , что $t \in \beta\eta\text{-NF}$, но $f_{\beta\eta}^{left}$ -редукционная цепочка

$$t \equiv t_0 \xrightarrow{\beta\eta\text{-left}} t_1 \xrightarrow{\beta\eta\text{-left}} t_2 \xrightarrow{\beta\eta\text{-left}} \dots \quad (4)$$

не содержит ни одного члена t_i , являющегося $\beta\eta$ -нормальной формой. Поскольку стратегия $\beta\eta$ -левой редукции одношаговая, то в этой редукционной цепочке каждый λ -терм t_{i+1} получается из предыдущего сворачиванием либо

β -редекса, либо η -редекса. Так как понятие η -редукции сильно нормализуемо, рассматриваемая редукционная цепочка содержит бесконечное число сворачиваемых вхождений β -редексов; в соответствии с очередностью их сворачивания обозначим их $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$. Запишем цепочку (4) в виде

$$t \equiv t_0 \twoheadrightarrow_{\eta} t_{i_0} \xrightarrow[\beta\eta\text{-left}]{\Delta_0} \beta t_{i_0+1} \twoheadrightarrow_{\eta} t_{i_1} \xrightarrow[\beta\eta\text{-left}]{\Delta_1} \beta t_{i_1+1} \twoheadrightarrow_{\eta} \dots \xrightarrow[\beta\eta\text{-left}]{\Delta_2} \beta t_{i_2+1} \twoheadrightarrow_{\eta} \dots \quad (5)$$

Согласно теореме о $\beta\eta$ -нормальной форме λ -терм t имеет какую-то β -нормальную форму. Поскольку стратегия f_{β}^{left} β -левой редукции является нормализующей (доказательство теоремы нормализации для β -редукции см. в [1, с. 328–329]), будет получено противоречие с леммой 3, если для некоторого натурального числа n такого, что $n > m(f_{\beta}^{\text{left}}, s)$, удастся перестроить какой-то начальный сегмент цепочки (5) в цепочку вида

$$t \equiv t'_{i_0} \xrightarrow[\beta\text{-left}]{\Delta'_0} \beta t'_{i_1} \xrightarrow[\beta\text{-left}]{\Delta'_1} \beta t'_{i_2} \xrightarrow[\beta\text{-left}]{\Delta'_2} \beta \dots \dots \xrightarrow[\beta\text{-left}]{\Delta'_{n-2}} \beta t'_{i_{n-2}} \xrightarrow[\beta\text{-left}]{\Delta'_{n-1}} \beta t'_{i_{n-1}} \twoheadrightarrow_{\beta\eta} \dots \quad (6)$$

(здесь первые n вхождений редексов $\Delta'_0, \Delta'_1, \dots, \Delta'_{n-1}$ являются самыми левыми β -редексами).

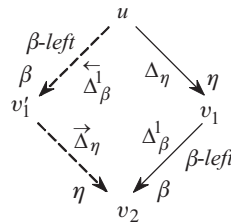
Выберем любое такое натуральное число n , что $n > m(f_{\beta}^{\text{left}}, s)$, и рассмотрим начальный сегмент цепочки (5), оканчивающийся сворачиванием вхождения β -редекса Δ_{n-1} :

$$t \equiv t_0 \twoheadrightarrow_{\eta} t_{i_0} \xrightarrow[\beta\eta\text{-left}]{\Delta_0} \beta t_{i_0+1} \twoheadrightarrow_{\eta} t_{i_1} \xrightarrow[\beta\eta\text{-left}]{\Delta_1} \beta t_{i_1+1} \twoheadrightarrow_{\eta} \dots \dots \twoheadrightarrow_{\eta} t_{i_{n-1}} \xrightarrow[\beta\eta\text{-left}]{\Delta_{n-1}} \beta t_{i_{n-1}+1}. \quad (7)$$

Для того чтобы преобразовать (7) к виду (6), воспользуемся приводимой ниже леммой 4; при этом без умаления общности можно считать, что в цепочке (7) сворачивается хотя бы один η -редекс (иначе поставленная цель уже достигнута).

Введем следующие вспомогательные обозначения. Зафиксируем какую-то одношаговую $\beta\eta$ -редукционную цепочку $p \xrightarrow{\Delta} q$. Если w является вхождением $\beta\eta$ -редекса в p и имеет единственный остаток при сворачивании Δ , то этот остаток обозначим \vec{w} . Аналогично, если w является вхождением $\beta\eta$ -редекса в q и при этом существует такое единственное вхождение $\beta\eta$ -редекса в p , которое переходит в w при сворачивании Δ , то это вхождение обозначим $\overset{\leftarrow}{w}$; иными словами, $\overset{\leftarrow}{w}$ — это «коостаток».

Лемма 4. Пусть задана двухшаговая редукционная цепочка вида $u \xrightarrow{\Delta_{\eta}} v_1 \xrightarrow[\beta\text{-left}]{\Delta_{\beta}^1} \beta v_2$, причем $\Delta_{\eta} < \overset{\leftarrow}{\Delta}_{\beta}^1$. Тогда имеет место следующая диаграмма:



где всегда $\overleftarrow{\Delta}_\beta^1$ является вхождением β -редекса, а $\overrightarrow{\Delta}_\eta$ — вхождением η -редекса. При этом, если терм v_1 имеет самое левое вхождение Δ_β^1 β -редекса, то $\overrightarrow{\Delta}_\eta < \overleftarrow{\Delta}_\beta^1$.

Доказательство (леммы 4). Заметим, что эта лемма является специальным уточнением теоремы об откладывании η -редукции. А именно из условия $\Delta_\eta < \overleftarrow{\Delta}_\beta^1$ следует, что либо $\Delta_\eta \cap \overleftarrow{\Delta}_\beta^1 = \emptyset$, либо $\Delta_\eta \supset \overleftarrow{\Delta}_\beta^1$. Эти ситуации являются соответственно случаем 1 и подслучаем 3.1 из доказательства теоремы об откладывании η -редукции. Второе утверждение очевидно.

Лемма доказана.

Определение 12. Пусть задана какая-то конечная $\beta\eta$ -редукционная цепочка σ . Она допускает единственное представление в виде $\sigma = \sigma' + \sigma_\eta$, где σ_η — η -редукционная цепочка максимальной длины; цепочки σ' и σ_η назовем соответственно телом и хвостом цепочки σ .

Заметим, что в вырожденных случаях как тело, так и хвост цепочки σ могут оказаться пустыми.

Наконец, можем преобразовать цепочку (7) к виду (6) и тем самым закончить доказательство теоремы нормализации для $\beta\eta$ -редукции. Цепочку (7) обозначим σ_0 . Заметим, что σ_0 совпадает со своим телом и ее хвост пуст. Пусть Δ_η^0 — последнее вхождение η -редекса в σ_0 (без умаления общности можно считать, что в цепочке (7) сворачивается хотя бы один η -редекс, так как иначе указанная цель уже достигнута). Итеративно применяя лемму 4 к Δ_η^0 , через какое-то конечное число шагов отложим Δ_η^0 в хвост редукционной цепочки. Получим $\beta\eta$ -редукционную цепочку σ_1 , в теле которой количество сворачиваемых η -редексов на единицу меньше, а количество сворачиваемых β -редексов — на единицу больше, чем в теле σ_0 . Обозначим Δ_η^1 последнее вхождение η -редекса в тело цепочки σ_1 . Повторив указанный процесс откладывания Δ_η^1 в хвост σ_1 , опять получим $\beta\eta$ -редукционную цепочку σ_2 , в теле которой количество сворачиваемых η -редексов на единицу меньше, а количество сворачиваемых β -редексов на единицу больше, чем в теле σ_1 . Аналогично построим цепочки σ_3, σ_4 и т.д. Следовательно, для некоторого натурального числа k тело цепочки σ_k содержит ровно n сворачиваемых β -редексов и не содержит сворачиваемых η -редексов. Это означает, что σ_k — искомая цепочка вида (6).

Теорема нормализации для $\beta\eta$ -редукции доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барендрегт Х. λ -исчисление. Его синтаксис и семантика. — М.: Мир, 1985. — 606 с.
2. Curry H.B., Feys R., Craig W. Combinatory logic. — Amsterdam: North-Holland, 1958. — 1.
3. Curry H.B., Hindley J.R., Seldin J.P. Combinatory logic. — Amsterdam: North-Holland, 1972. — 2.
4. Barendregt H.P., Bergstra J., Klop J.W., Voken H. Some notes on lambda reduction // Degrees, reductions, and representability in the lambda calculus. — Utrecht: Univ. of Utrecht, Dep. of Math., 1976. Preprint N 22. — P. 13–53.
5. Klop J.W. Combinatory reduction systems // Ph.D. Thesis. — Utrecht: Utrecht univ., 1980. — 323 p.

Поступила 17.06.2013