



Н.Ю. КУЗНЕЦОВ, О.Н. ХОМЯК

УДК 519.873

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ОТКАЗА РЕЗЕРВИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ СУЩЕСТВЕННОЙ ВЫБОРКИ

Аннотация. Исследована система, структура которой задается деревом отказов с эффективностями. Внешняя нагрузка на систему определяется как функция от состояний полумарковского процесса. Предложен метод ускоренного моделирования вероятности функционального отказа, когда эффективность системы становится ниже требуемой. Найдены условия, гарантирующие ограниченность относительной погрешности оценки с ростом надежности элементов. Численный пример иллюстрирует точность оценок, получаемых предложенным методом.

Ключевые слова: дерево отказов с эффективностями, полумарковский процесс, функциональный отказ, минимальные сечения, метод существенной выборки, дисперсия оценки, относительная среднеквадратическая погрешность.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие функционального отказа широко используется в атомной энергетике [1] для оценивания вероятности выполнения планового задания системой при случайной внешней нагрузке. Более конкретно, в каждый момент времени работа системы характеризуется некоторой эффективностью, однозначно определяемой набором отказавших элементов. В то же время от системы требуется эффективность, уровень которой определяется случайным процессом. Если в некоторый момент уровень требуемой эффективности становится выше эффективности системы, то наступает отказ, называемый функциональным.

Предположение об экспоненциальности распределений, характеризующих надежность элементов системы, является ключевым для использования аналитических методов, позволяющих вывести формулы в явном виде. В то же время оно часто не соответствует статистическим данным. В случае неэкспоненциальных распределений весьма эффективным является применение асимптотических методов [2–5]. Однако если поведение системы нельзя описать регенерирующим процессом, то возникают принципиальные трудности. В таком, наиболее сложном для исследования, случае эффективны методы ускоренного моделирования, основанные на сочетании метода Монте-Карло с аналитическим вычислением малых вероятностей. Основная цель этих методов — уменьшение дисперсии оценки, поэтому их еще называют методами уменьшения дисперсии. Среди разнообразия предложенных подходов отметим наиболее значимые направления исследований: метод существенной выборки [6–8], аналитико-статистический метод [9–13], метод многоуровневого расщепления [14] и ряд других. Обзоры методов ускоренного моделирования вероятностей редких событий приведены в [15–17].

В настоящей статье продолжены исследования, начатые в [18–20]. Рассматривается модель [21, 22], описывающая функционирование систем атомных

© Н.Ю. Кузнецов, О.Н. Хомяк, 2014

электростанций с точки зрения надежности. В отличие от указанных работ ни одно из распределений не предполагается экспоненциальным, т.е. модель описывает функционирование систем немарковского типа. Структура системы задается деревом отказов с эффективностями [23]. Внешняя нагрузка на систему описывается полумарковским процессом с конечным множеством состояний, а требуемая эффективность — функция от состояний этого процесса. Общая идея ускоренного моделирования надежности немарковских систем [12] используется для создания эффективного метода построения несмещенных оценок функционального отказа. Найдены условия, гарантирующие ограниченность относительной среднеквадратической погрешности оценок с возрастанием надежности элементов. Точность оценок, получаемых предложенным методом, демонстрируется на численном примере.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, структура которой задается деревом отказов с эффективностями [23]. Каждая вершина дерева представляет подсистему или элемент, текущая эффективность работы которых может принимать значение из промежутка $[0, 1]$. Эффективность работы элемента принимает только два значения: 0, если элемент исправен, и 1, если элемент отказал. Корень дерева — вершина, описывающая работу всей системы; корень не может быть входящей вершиной к какой-либо другой вершине. Каждая вершина g , представляющая подсистему, может быть одного из трех типов: «и», «или», « k из n ». Эффективность e_g работы подсистемы (вершина g) вычисляется по рекуррентным формулам по эффективностям e_1, \dots, e_n , $e_i \in [0, 1]$, входящих в нее вершин. В зависимости от типа вершины данная функция интерпретируется следующим образом.

1. Вершина типа «и» (параллельное соединение входящих вершин):

$$e_g = 1 - \sum_{i=1}^n c_g^{(i)} e_i,$$

где $\{c_g^{(i)}\}$ — весовые коэффициенты, определяющие значимости входящих вершин, т.е. падение эффективности вершины пропорционально падению эффективности входящей вершины с соответствующим весовым коэффициентом.

Предполагается, что $c_g^{(i)} \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n c_g^{(i)} \leq 1$. Возможен особый случай, когда все

$c_g^{(i)} = 0$. При этом предполагаем, что $e_g = 1$, если $e_i = 0$ для некоторого i , и $e_g = 0$, если $e_i = 1$, $i = 1, \dots, n$ (отказ каждой входящей вершины не приводит к падению эффективности вершины типа «и» до тех пор, пока не откажут все входящие вершины, — «классический» случай параллельного соединения подсистем или элементов).

2. Вершина типа «или» (последовательное соединение входящих вершин):

$$e_g = \min_{1 \leq i \leq n} \{1 - c_g^{(i)} e_i\},$$

где $\{c_g^{(i)}\}$ — соответствующие весовые коэффициенты, принимающие значения из $(0, 1]$. Если $c_g^{(i)} = 1$, то полный отказ i -й входящей вершины ($e_i = 0$) влечет полный отказ всего последовательного соединения вершин ($e_g = 0$) независимо от состояния других входящих вершин. Если $0 < c_g^{(i)} < 1$, то полный отказ входящей вершины может лишь понизить эффективность e_g .

3. Вершина типа « k из n » (в «классическом» определении отказ вершины происходит при отказе по крайней мере k из n входящих вершин); эффективность e_g вершины вычисляется по формуле

$$e_g = 1 - rc_g,$$

где c_g — весовой коэффициент (один и тот же для всех n входящих вершин), принимающий значение из $[0, 1/k]$, а r — число отказавших вершин. Предполагается, что эффективность каждой входящей вершины может принимать только два значения: 0 или 1. Если эффективности по крайней мере k входящих вершин равны 0, то $e_g = 0$.

Структурная модель системы будет полностью определена, если для каждой вершины дерева указать перечень всех входящих вершин, их типы и соответствующие весовые коэффициенты.

Предположим, что система состоит из m элементов, причем каждый элемент может принадлежать одному из следующих трех классов.

Класс C_1 : восстанавливаемые элементы с мгновенно обнаруживаемыми отказами (восстановление элемента начинается в момент его отказа); элементы этого типа характеризуются функциями распределения (ф.р.) $F_i(x)$ и $G_i(x)$ длительностей безотказной работы и восстановления соответственно.

Класс C_2 : периодически контролируемые элементы с детерминированным интервалом между последовательными моментами контроля (отказ остается необнаруженным до следующего момента контроля, в который и начинается восстановление); в дополнение к ф.р. $F_i(x)$ и $G_i(x)$ задаются постоянный период контроля Δ_i и время до первого момента контроля $\Delta_i^{(0)}$; предполагается, что длительность самого контроля — пренебрежимо малая величина.

Класс C_3 : невозстанавливаемые элементы (в случае отказа элемент остается неисправным до окончания рассматриваемого промежутка времени); элементы этого типа характеризуются ф.р. $\{F_i(x)\}$.

Предполагается, что элементы статистически независимы, т.е. длительности безотказной работы и восстановления — независимые случайные величины (сл. в.), причем функции $\{F_i(x)\}$ предполагаются абсолютно непрерывными, т.е. существуют плотности $\{f_i(x)\}$. Состояние системы в момент t обозначим $\bar{v}(t) = (v_i(t), 1 \leq i \leq m)$, где $v_i(t) = 1$, если i -й элемент исправен в момент t , и $v_i(t) = 0$ в противном случае. Эффективность работы системы, определяемую деревом отказов, обозначим $\Phi(\bar{v}(t))$.

В каждый момент времени от системы требуется определенный уровень эффективности, определяемый состоянием полумарковского процесса (ПМП) $\eta(t)$, $t \geq 0$, имеющего конечное множество состояний $I = \{1, \dots, N\}$ и задаваемого вероятностями $\{p_{ij}\}$ перехода вложенной цепи Маркова и условными ф.р. $\{H_{ij}(x)\}$ времени между переходами. Функции $\{H_{ij}(x)\}$ предполагаются абсолютно непрерывными, т.е. существуют плотности $\{h_{ij}(x)\}$. Предполагается, что все состояния образуют один класс существенных состояний, причем $\eta(0) = 1$ с вероятностью единица. Если $\eta(t) = i$, то уровень требуемой эффективности равен $\Psi(i)$, т.е. случайный процесс $\Psi(\eta(t))$ задает эффективность, требуемую от системы в момент t . Предполагается, что $\Psi(i)$ — монотонно возрастающая функция, $\Psi(1) > 0$. Система функционирует в штатном режиме, если $\Phi(\bar{v}(t)) \geq \Psi(\eta(t))$. Момент τ ее отказа определяется следующим образом: $\tau = \inf\{t: \Phi(\bar{v}(t)) < \Psi(\eta(t))\}$. Целью исследования является разработка метода ускоренного моделирования, позволяющего с высокой точностью оценивать вероятность $Q(T) = \mathbf{P}\{\tau < T\}$ функционального отказа высоконадежной системы в заданном промежутке $[0, T]$.

АЛГОРИТМ УСКОРЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ $Q(T)$

Введем непрерывный справа марковский процесс, описывающий как поведение системы с точки зрения ее надежности, так и поведение ПМП:

$$\zeta(t) = (\bar{v}(t), \bar{\gamma}(t); \eta(t), \theta(t)), \quad t \geq 0,$$

где $\bar{\gamma}(t) = (\gamma_i(t), 1 \leq i \leq m)$, $\gamma_i(t) = \sup \{z: v_i(u) = 0 \text{ для любого } u \in (t-z, t)\}$, если $v_i(t) = 0$, и $\gamma_i(t)$ — время до окончания восстановления элемента, если $v_i(t) = 1$, $i \in C_1 \cup C_2$ (если $i \in C_3$, то $\gamma_i(t) = T - t$); переменная $\theta(t)$ указывает время, прошедшее с предыдущего момента изменения состояния ПМП $\eta(t)$. Начальное состояние имеет следующий вид: $v_i(0) = 0$, $\gamma_i(0) = 0$, $1 \leq i \leq m$, $\eta(0) = 1$, $\theta(0) = 0$.

В дальнейшем необходимо определить условия функционального отказа системы при фиксированном состоянии ПМП $\eta(t)$. Пусть $\eta(t) = j$. Сечением $S^{(j)} = (s_1, \dots, s_r)$ назовем набор элементов, одновременная неисправность которых приводит к падению эффективности системы ниже уровня $\Psi(j)$. Сечение называется минимальным, если удаление какого-либо элемента из указанного набора приводит к повышению эффективности до уровня не ниже $\Psi(j)$. Алгоритм из [23] позволяет находить множество $M^{(j)}$ минимальных сечений для каждого $j \in I$. Поскольку число состояний N , как правило, весьма незначительно, то нахождение сечений не является трудоемкой процедурой.

Обозначим $\tau^{(k)}$, $k \geq 0$, последовательность моментов времени, когда происходит одно из событий: отказывает один из элементов; оканчивается восстановление элемента; ПМП изменяет свое состояние. Очевидно, что функциональный отказ может наступить только в один из этих моментов. Пусть $\zeta^{(k)} = \zeta(\tau^{(k)}) = (\bar{v}^{(k)}, \bar{\gamma}^{(k)}; \eta^{(k)}, \theta^{(k)}) = (v_i^{(k)}, \gamma_i^{(k)}, 1 \leq i \leq m; \eta^{(k)}, \theta^{(k)})$ — состояние марковского процесса в момент $\tau^{(k)}$. Начальное состояние процесса в момент $\tau^{(0)} = 0$ задает вектор $\zeta^{(0)} = \zeta(\tau^{(0)}) = (v_i^{(0)} = 0, \gamma_i^{(0)} = 0, 1 \leq i \leq m; \eta^{(0)} = 1, \theta^{(0)} = 0)$. Вероятность $Q(T)$ функционального отказа системы можно записать в виде

$$Q(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ \tau^{(n)} < T, (\bar{v}^{(1)}, \eta^{(1)}) \notin U, \dots, (\bar{v}^{(n-1)}, \eta^{(n-1)}) \notin U, (\bar{v}^{(n)}, \eta^{(n)}) \in U \}, \quad (1)$$

где $U = \{(\bar{v}, j): \Phi(\bar{v}) < \Psi(j)\}$. Траектория процесса $\zeta(t)$, $t \geq 0$, обрывающаяся в момент функционального отказа системы, будет полностью определена, если в каждый момент $\tau^{(k)}$ указать причину изменения состояния (отказ или восстановление элемента, переход ПМП). Обозначим $E = \{-N, \dots, -1, 1, \dots, m\}$. Последовательность $\Pi^{(k)} = \{(\tau^{(1)}, e^{(1)}), \dots, (\tau^{(k)}, e^{(k)})\}$ однозначно определяет состояния $(\bar{v}^{(1)}, \eta^{(1)}), \dots, (\bar{v}^{(k)}, \eta^{(k)})$. Здесь $e^{(i)} \in E$, причем если $e^{(i)} > 0$, то в момент $\tau^{(i)}$ отказал элемент $e^{(i)}$ (если он был исправен) или окончилось его восстановление (если элемент был неисправен); если $e^{(i)} < 0$, то ПМП в момент $\tau^{(i)}$ перешел в состояние $-e^{(i)}$. Обозначим $D(x, e; \Pi^{(k)}) = \mathbf{P} \{ \tau^{(k+1)} - \tau^{(k)} < x, e^{(k+1)} = e | \Pi^{(k)} \}$ совместное распределение двумерной случайной величины $(\tau^{(k+1)} - \tau^{(k)}, e^{(k+1)})$, принимающей значения в $(0, \infty) \times E$. Формулу (1) можно переписать в виде

$$Q(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e_1 \in E: (\bar{v}^{(1)}, \eta^{(1)}) \notin U} \int_0^T D(dt_1, e_1; \Pi^{(0)}) \dots \\ \dots \sum_{e_{n-1} \in E: (\bar{v}^{(n-1)}, \eta^{(n-1)}) \notin U} \int_0^{T-t_1-\dots-t_{n-2}} D(dt_{n-1}, e_{n-1}; \Pi^{(n-2)}) \times$$

$$\times \sum_{e_n \in E: (\bar{v}^{(n)}, \eta^{(n)}) \in U} \int_0^{T-t_1-\dots-t_{n-1}} D(dt_n, m_n; \Pi^{(n-1)}), \quad (2)$$

где $\Pi^{(0)}$ — начальное состояние $\zeta^{(0)}$. При фиксированной последовательности $\Pi^{(k)}$ (а значит, и известном состоянии $\zeta^{(k)} = (\bar{v}^{(k)}, \bar{\gamma}^{(k)}; \eta^{(k)}, \theta^{(k)})$) введем функции

$$Z_i(x; \Pi^{(k)}) = \prod_{r: v_r^{(k)}=0, r \neq i} \frac{1 - F_r(\gamma_r^{(k)} + x)}{1 - F_r(\gamma_r^{(k)})} \times \frac{\sum_{l \neq \eta^{(k)}} P_{\eta^{(k)}l} [1 - H_{\eta^{(k)}l}(\theta^{(k)} + x)]}{\sum_{l \neq \eta^{(k)}} P_{\eta^{(k)}l} [1 - H_{\eta^{(k)}l}(\theta^{(k)})]}, \quad x \geq 0, \quad i: v_i^{(k)} = 0, \quad (3)$$

$$Z(x; \Pi^{(k)}) = Z_i(x; \Pi^{(k)}) \frac{1 - F_i(\gamma_i^{(k)} + x)}{1 - F_i(\gamma_i^{(k)})}, \quad x \geq 0, \quad (4)$$

$$V(x; \Pi^{(k)}) = \prod_{r: v_r^{(k)}=0} \frac{1 - F_r(\gamma_r^{(k)} + x)}{1 - F_r(\gamma_r^{(k)})}, \quad x \geq 0, \quad (5)$$

$$A_j(x; \Pi^{(k)}) = \frac{P_{\eta^{(k)}j} [H_{\eta^{(k)}j}(\theta^{(k)} + x) - H_{\eta^{(k)}j}(\theta^{(k)})]}{\sum_{l \neq \eta^{(k)}} P_{\eta^{(k)}l} [1 - H_{\eta^{(k)}l}(\theta^{(k)})]}, \quad j \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}, \quad x \geq 0. \quad (6)$$

Обозначив

$$w^{(k)} = \min_{i: v_i^{(k)}=1} \gamma_i^{(k)}, \quad i^{(k)} = \arg \min_{i: v_i^{(k)}=1} \gamma_i^{(k)}, \quad (7)$$

имеем $\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + w^{(k)}$, $e^{(k+1)} = i^{(k)}$ с вероятностью $Z(w^{(k)}; \Pi^{(k)})$; если $x \leq w^{(k)}$, то

$$D(x, i; \Pi^{(k)}) = \int_0^x Z_i(u; \Pi^{(k)}) \frac{dF_i(\gamma_i^{(k)} + u)}{1 - F_i(\gamma_i^{(k)})}, \quad i: v_i^{(k)} = 0, \quad (8)$$

$$D(x, -j; \Pi^{(k)}) = \int_0^x V(u; \Pi^{(k)}) dA_j(u; \Pi^{(k)}), \quad j \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}. \quad (9)$$

Приведенные соотношения имеют простую интерпретацию. Возможны три случая: 1) первым окончится восстановление элемента $i^{(k)}$ (вероятность чего равна $Z(w^{(k)}; \Pi^{(k)})$); 2) первым откажет элемент i (формула (8)); 3) первым изменит свое состояние ПМП $\eta(t)$ (формула (9)).

Соотношения (8) и (9) лежат в основе рекуррентного алгоритма, позволяющего моделировать моменты изменения состояний дискретных компонент $\bar{v}(t)$ и $\eta(t)$ до тех пор, пока не наступит функциональный отказ. Для того чтобы повысить эффективность моделирования (уменьшить дисперсию оценки), введем весовые множители, позволяющие оценить вклад в отказ системы каждого из указанных событий. Пусть $(\bar{v}(t), \eta(t)) = (\bar{v}, j)$. Обозначим $\varphi(\bar{v}, j)$ некоторый положительный весовой множитель. В качестве $\varphi(\bar{v}, j)$ выбирается оценка вероятности монотонного функционального отказа сети при начальном состоянии (\bar{v}, j) . При этом используется принцип монотонных отказов, предложенный И.Н. Коваленко [24], со-

гласно которому преимущественный вклад в отказ высоконадежной системы вносят монотонные траектории (число отказавших элементов монотонно возрастает). Подробный алгоритм выбора множителей $\{\varphi(\bar{v}, j)\}$ описан далее. Предлагаемый алгоритм существенной выборки позволяет строить несмещенные оценки вероятности $Q(T)$ при любом выборе набора положительных $\{\varphi(\bar{v}, j)\}$. Однако только при определенном выборе $\{\varphi(\bar{v}, j)\}$ (см. следующий раздел) относительная погрешность оценок будет оставаться ограниченной с ростом надежности элементов. Соотношения (8) и (9) можно переписать в таком виде (с заменой x на $w^{(k)}$):

$$D(w^{(k)}, i; \Pi^{(k)}) = \int_0^{w^{(k)}} \dots \int_0^{w^{(k)}} \frac{B(\bar{u}; \Pi^{(k)})}{\varphi(\bar{\mu}_i^{(k)}, \eta^{(k)})} \frac{B_i(u_i; \Pi^{(k)})}{B(\bar{u}; \Pi^{(k)})} d\Phi(\bar{u}; \Pi^{(k)}), \quad i: v_i^{(k)} = 0, \quad (10)$$

$$D(w^{(k)}, -j; \Pi^{(k)}) = \int_0^{w^{(k)}} \dots \int_0^{w^{(k)}} \frac{B(\bar{u}; \Pi^{(k)})}{\varphi(\bar{v}^{(k)}, j)} \frac{B_{-j}(u_j; \Pi^{(k)})}{B(\bar{u}; \Pi^{(k)})} d\Phi(\bar{u}; \Pi^{(k)}), \quad j \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}, \quad (11)$$

где $\bar{u} = (u_i, i: v_i^{(k)} = 0, u_{-j}, j \in I \setminus \{\eta^{(k)}\})$,

$$d\Phi(\bar{u}; \Pi^{(k)}) = \prod_{r: v_r^{(k)} = 0} \frac{dF_r(\gamma_r^{(k)} + u_r)}{F_r(\gamma_r^{(k)} + w^{(k)}) - F_r(\gamma_r^{(k)})} \prod_{r \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}} \frac{dA_r(u_r; \Pi^{(k)})}{A_r(w^{(k)}; \Pi^{(k)})}, \quad (12)$$

$$B(\bar{u}; \Pi^{(k)}) = B_0(\Pi^{(k)}) + \sum_{i: v_i^{(k)} = 0} B_i(u_i; \Pi^{(k)}) + \sum_{j \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}} B_{-j}(u_j; \Pi^{(k)}), \quad (13)$$

$$B_0(\Pi^{(k)}) = \varphi(\bar{\mu}^{(k)}, \eta^{(k)}) Z(w^{(k)}; \Pi^{(k)}), \quad (14)$$

$$B_i(u_i; \Pi^{(k)}) = \varphi(\bar{\mu}_i^{(k)}, \eta^{(k)}) Z_i(u_i; \Pi^{(k)}) \times \times \frac{F_i(\gamma_i^{(k)} + w^{(k)}) - F_i(\gamma_i^{(k)})}{1 - F_i(\gamma_i^{(k)})}, \quad i: v_i^{(k)} = 0, \quad (15)$$

$$B_{-j}(u_j; \Pi^{(k)}) = \varphi(\bar{v}^{(k)}, j) V(u_j; \Pi^{(k)}) A_j(w^{(k)}; \Pi^{(k)}), \quad j \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}. \quad (16)$$

В формулах (10), (14) и (15) использованы обозначения $\bar{\mu}_i^{(k)} = \bar{v}^{(k)} + \bar{z}^{(i)}$ и $\bar{\mu}^{(k)} = \bar{v}^{(k)} - \bar{z}^{(i^{(k)})}$, где $\bar{z}^{(i)} = (z_i = 1, z_r = 0, r \neq i)$ — единичный вектор.

Формулы (2) и (10)–(16) позволяют сформулировать алгоритм построения оценки вероятности $Q(T)$ методом существенной выборки (строится оценка $\hat{Q}_1(T)$ в одной реализации).

1. Положим $k = 0$ (счетчик числа изменений состояний одного из элементов или ПМП в $[0, T]$), $\tau^{(0)} = 0$ и зададим начальное состояние $\zeta^{(0)} = \zeta(\tau^{(0)}) = (v_i^{(0)} = 0, \gamma_i^{(0)} = 0, 1 \leq i \leq m; \eta^{(0)} = 1, \theta^{(0)} = 0)$.

2. Предположим, что в момент $\tau^{(k)}$ марковский процесс перешел в состояние $\xi^{(k)} = \zeta(\tau^{(k)}) = (\bar{v}^{(k)}, \bar{\gamma}^{(k)}; \eta^{(k)}, \theta^{(k)}) = (v_i^{(k)}, \gamma_i^{(k)}, 1 \leq i \leq m; \eta^{(k)}, \theta^{(k)})$, $(\bar{v}^{(k)}, \eta^{(k)}) \notin U$. Согласно (7) вычисляем $w^{(k)}$ и $i^{(k)}$. Для каждого i с $v_i^{(k)} = 0$ строим реализацию

сл.в. α_i с ф.р. $\frac{F_r(\gamma_r^{(k)} + x) - F_r(\gamma_r^{(k)})}{F_r(\gamma_r^{(k)} + w^{(k)}) - F_r(\gamma_r^{(k)})}$, $x \in [0, w^{(k)}]$, и для каждого $j \in I \setminus \{\eta^{(k)}\}$

строим реализацию сл.в. α_{-j} с ф.р. $\frac{A_j(x; \Pi^{(k)})}{A_j(w^{(k)}; \Pi^{(k)})}$, $x \in [0, w^{(k)}]$. Реализации этих

сл.в. обозначим $\{u_i\}$ и $\{u_{-j}\}$, т.е. построен вектор \bar{u} .

3. На основе формул (3)–(6) и (13)–(16) вычисляем $B_0(\Pi^{(k)})$, $\{B_i(u_i; \Pi^{(k)})\}$, $\{B_{-j}(u_j; \Pi^{(k)})\}$ и $B(\bar{u}; \Pi^{(k)})$.

4. Реализуем сл.в. β , которая принимает следующие значения: 0 с вероятностью $B_0(\Pi^{(k)})/B(\bar{u}; \Pi^{(k)})$; i с вероятностью $B_i(u_i; \Pi^{(k)})/B(\bar{u}; \Pi^{(k)})$; $-j$ с вероятностью $B_{-j}(u_j; \Pi^{(k)})/B(\bar{u}; \Pi^{(k)})$.

5. Если $\beta = 0$, то в момент $\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + w^{(k)}$ окончилось восстановление элемента $i^{(k)}$, в результате процесс перешел в состояние $\zeta^{(k+1)} = \zeta(\tau^{(k+1)}) = (\bar{v}^{(k+1)}, \bar{\gamma}^{(k+1)}; \eta^{(k+1)}, \theta^{(k+1)})$ (заметим, что $\bar{v}^{(k+1)} = \bar{\mu}^{(k)}$, $\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)}$). При этом вычисляем нормирующий множитель $J^{(k+1)} = B(\bar{u}; \Pi^{(k)}) / \varphi(\bar{\mu}^{(k)}, \eta^{(k)})$.

Если $\beta = i$, то в момент $\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + u_i$ отказал i -й элемент, в результате процесс перешел в состояние $\zeta^{(k+1)}$ с $\bar{v}^{(k+1)} = \bar{\mu}_i^{(k)}$, $\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)}$. В качестве нормирующего множителя выбираем $J^{(k+1)} = B(\bar{u}; \Pi^{(k)}) / \varphi(\bar{\mu}_i^{(k)}, \eta^{(k)})$.

Если $\beta = -j$, то в момент $\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + u_j$ ПМП совершил переход в состояние j , в результате новым состоянием процесса $\zeta(t)$ будет $\zeta^{(k+1)}$ с $\bar{v}^{(k+1)} = \bar{v}^{(k)}$, $\eta^{(k+1)} = j$. В качестве нормирующего множителя выбираем $J^{(k+1)} = B(\bar{u}; \Pi^{(k)}) / \varphi(\bar{v}^{(k)}, j)$.

6. Если $(\bar{v}^{(k+1)}, \eta^{(k+1)}) \notin U$, то повторяем алгоритм с новым значением k начиная с шага 2. Если $(\bar{v}^{(k+1)}, \eta^{(k+1)}) \in U$, то наступил функциональный отказ, алгоритм окончен и в качестве оценки выбираем

$$\hat{Q}_1(T) = J^{(1)} J^{(2)} \dots J^{(k+1)}. \quad (17)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для произвольного набора положительных чисел $\{\varphi(\bar{v}, j)\}$ оценка $\hat{Q}_1(T)$ является несмещенной, т.е. $\mathbf{M}\hat{Q}_1(T) = Q(T)$.

Несмещенность оценки вытекает непосредственно из сформулированного алгоритма и формул (2), (10)–(17).

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ

При статистическом моделировании количество реализаций, необходимых для достижения заданной точности оценки, пропорционально квадрату относительной среднеквадратической погрешности (ОСКП)

$$\rho(T) = \sqrt{\mathbf{D}\hat{Q}_1(T) / [Q(T)]^2} = \sqrt{\mathbf{M} [\hat{Q}_1(T)]^2 / [Q(T)]^2 - 1},$$

причем алгоритм моделирования считается устойчивым, если $\rho(T)$ остается ограниченным при возрастании надежности элементов.

Найдем условия, гарантирующие ограниченность ОСКП оценок при определенном выборе весовых множителей $\{\varphi(\bar{v}, j)\}$. Естественно считать, что время

безотказной работы элемента существенно превосходит время его восстановления. Кроме того, переходы ПМП в состояния с более высоким уровнем требуемой эффективности являются маловероятными событиями. Данные особенности формализуем следующим образом.

Предположим, что ф.р. $F_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, и $H_{ij}(x)$, $1 \leq i < j \leq N$, могут быть представлены в виде $F_i(x) = F_i^{(0)}(\varepsilon^{\delta_i} x)$ и $H_{ij}(x) = H_{ij}^{(0)}(\varepsilon^{\sigma_{ij}} x)$, где $\varepsilon > 0$ — некоторый малый параметр, $\delta_i > 0$, $\sigma_{ij} \geq 0$, а $F_i^{(0)}(x)$ и $H_{ij}^{(0)}(x)$ — ф.р. «умеренных» сл.в. Воспользуемся условием, введенным в [25]. Предположим, что плотности $f_i^{(0)}(x)$, $1 \leq i \leq m$, и $h_{ij}^{(0)}(x)$, $1 \leq i < j \leq N$, $p_{ij} > 0$, удовлетворяют условию: существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\beta_i > 0$, $\mu_i > 0$, $\Delta \in \left(0, \frac{T}{N}\right)$ и функции $\psi_i^{(1)}(x)$, $\psi_i^{(2)}(x)$, $\pi_{ij}^{(1)}(x)$, $\pi_{ij}^{(2)}(x)$ такие, что неравенства

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\beta_i-1} \psi_i^{(1)}(x) &\leq f_i^{(0)}(\varepsilon x) \leq \varepsilon^{\beta_i-1} \psi_i^{(2)}(x), \\ \varepsilon^{\mu_{ij}-1} \pi_{ij}^{(1)}(x) &\leq h_{ij}^{(0)}(\varepsilon x) \leq \varepsilon^{\mu_{ij}-1} \pi_{ij}^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (18)$$

выполнены для любых $0 < x \leq T$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, причем

$$V^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq m} \inf_{0 \leq z \leq T-\Delta} \int_z^{z+\Delta} \psi_i^{(1)}(u) du > 0, \quad V^{(2)} = \max_{1 \leq i \leq m} \int_0^T \psi_i^{(2)}(u) du < \infty, \quad (19)$$

$$W^{(1)} = \min_{1 \leq i < j \leq N} \inf_{0 \leq z \leq T-\Delta} \int_z^{z+\Delta} \pi_{ij}^{(1)}(u) du > 0, \quad (20)$$

$$W^{(2)} = \max_{1 \leq i < j \leq N} \int_0^T \pi_{ij}^{(2)}(u) du < \infty.$$

Условия (18)–(20) не являются ограничительными, большинство распределений, используемых в теории надежности, удовлетворяют им (например, распределения Эрланга и Вейбулла, гамма-распределение).

Предположим также, что $p_{ij} = p_{ij}^{(0)} \varepsilon^{\kappa_{ij}}$, $1 \leq i < j \leq N$, где $p_{ij}^{(0)} \geq 0$, $\beta_{ij} \geq 0$.

Переход ПМП $\eta(t)$ из j в $k > j$ назовем монотонным, если для некоторого $n \geq 1$ процесс последовательно принимал состояния $j = j_0 < j_1 < j_2 < \dots < j_n = k$. Множество всех возможных траекторий указанного вида обозначим Θ_{jk} . Каждой траектории $\bar{s} = (j_0, j_1, \dots, j_n)$ из Θ_{jk} присвоим ранг, определяемый по формуле $r(\bar{s}) = \sum_{i=1}^n (\kappa_{j_{i-1}j_i} + \sigma_{j_{i-1}j_i} \mu_{j_{i-1}j_i})$. Соответственно ранг множества Θ_{jk} определим как

$$R_{jk} = \min_{\bar{s} \in \Theta_{jk}} r(\bar{s}),$$

причем $R_{jj} = 0$. Нормирующий множитель $\varphi(\bar{v}, j)$ определим следующим образом. Пусть $\bar{v} = (v_i, 1 \leq i \leq m)$ — произвольное состояние сети, причем $\Phi(\bar{v}) \geq \Psi(j)$. Тогда

$$\varphi(\bar{v}, j) = \varepsilon^{R(\bar{v}, j)},$$

где

$$R(\bar{v}, j) = \min \left\{ \min_{k: \Psi(k) > \Phi(\bar{v})} R_{jk}, \min_{k: \Psi(k) \leq \Phi(\bar{v}), k \geq j} \left\{ R_{jk} + \min_{S \in M^{(k)}} \sum_{i: i \in S, v_i=0} \delta_i \beta_i \right\} \right\}.$$

Величина $R(\bar{v}, j)$ устанавливает порядок наиболее вероятной монотонной траектории, приводящей к функциональному отказу: либо наиболее вероятной является монотонная траектория ПМП из Θ_{jk} для некоторого k такого, что $\Psi(k) > \Phi(\bar{v})$, либо наиболее вероятным является переход в состояние функционального отказа за счет перехода ПМП из j в $k \geq j$, $\Psi(k) \leq \Phi(\bar{v})$, и отказа ребер наиболее вероятного сечения из $M^{(k)}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) плотности $f_i^{(0)}(x), 1 \leq i \leq m$, и $h_{ij}^{(0)}(x), 1 \leq i < j \leq N, p_{ij}^{(0)} > 0$, удовлетворяют условиям (18)–(20), причем $\kappa_{ij} + \sigma_{ij} \mu_{ij} > 0, i, j: 1 \leq i < j \leq N$;
- 2) если $i < j$ и $p_{ji} > 0$, то $R_{jk} \leq R_{ik}$ для любого $k > j$;
- 3) $g = \min \left\{ \min_{i \in C_1 \cup C_2} \{1 - G_i(\Delta)\}, \min_{j \in I} \left\{ \sum_{k \neq j} p_{jk} [1 - H_{jk}(\Delta)] \right\} \right\} > 0$ для того

же Δ , что и в условиях (19), (20).

Тогда оценка $\hat{Q}_1(T)$ имеет ограниченную ОСКП, т.е. $\rho(T) = \rho(T; \varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство данной теоремы приводить не будем, поскольку оно в значительной степени повторяет доказательство соответствующих теорем в [26, 20]. Отметим только основные этапы. Вначале строится нижняя оценка для вероятности $Q(T)$. Используя соотношения (18)–(20), а также третье условие теоремы, можно показать (см. [20]), что порядок наиболее вероятного монотонного пути из состояния $(\bar{v}^{(0)}, 1)$, $\bar{v}^{(0)} = (v_i = 0, 1 \leq i \leq m)$, в состояние функционального отказа равен $R(\bar{v}^{(0)}, 1)$. Иначе говоря, $Q(T) = O(\varepsilon^{R(\bar{v}^{(0)}, 1)})$. На следующем этапе в полном соответствии со схемой, приведенной в [26], строится верхняя оценка для $\mathbf{M}[\hat{Q}_1(T)]^2$. В частности, используя первые два условия теоремы, нетрудно показать, что $B(\bar{u}; \Pi^{(0)}) = O(\varepsilon^{R(\bar{v}^{(0)}, 1)})$ и $B(\bar{u}; \Pi^{(k+1)}) / \varphi(\bar{v}^{(k+1)}, \eta^{(k+1)}) = O(1)$ равномерно относительно компонент вектора \bar{u} . В результате получим оценку

$$\mathbf{M}[\hat{Q}_1(T)]^2 = O(\varepsilon^{R(\bar{v}^{(0)}, 1)} Q(T)),$$

которая в сочетании с нижней оценкой для $Q(T)$ дает утверждение теоремы.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Предположим, что система состоит из $m = 23$ элементов, а ее структура задается деревом отказов с эффективностями, изображенным на рис. 1.

Возле каждой входящей вершины указан коэффициент, определяющий величину падения уровня эффективности подсистемы в случае отказа этой вершины. Изменение эффективности системы происходит согласно правилам, приведенным выше. В соответствии с описанием модели зададим характеристики надежности элементов. Предположим, что $\{F_i(x)\}$ и $\{G_i(x)\}$ являются распределениями Вейбулла вида

$$F_i(x) = 1 - \exp\{-(\varepsilon^{\delta_i} x)^{\beta_i}\}, \quad G_i(x) = 1 - \exp\{-(\mu_i x)^{\theta_i}\}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. В табл. 1 для каждого элемента указаны класс, которому он принадлежит, значения параметров $\delta_i, \beta_i, \mu_i, \theta_i$, а также период контроля Δ_i и время до первого момента контроля $\Delta_i^{(0)}$ (если это элемент класса C_2). Все временные характеристики измеряются в часах.

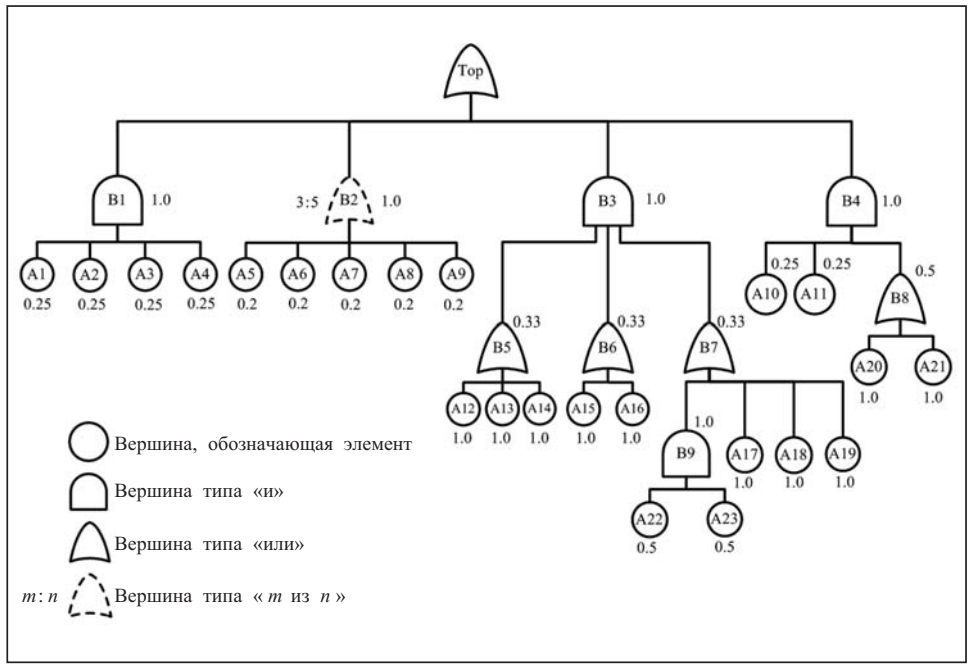


Рис. 1. Дерево отказов

Таблица 1

Номер элемента, i	Класс	Параметры, задающие характеристики элементов					
		δ_i	β_i	μ_i	θ_i	Δ_i	$\Delta_i^{(0)}$
1	C_2	1,0	1,5	0,03	2	960	0
2	C_2	1,0	1,5	0,03	2	960	240
3	C_2	1,0	1,5	0,03	2	960	480
4	C_2	1,0	1,5	0,03	2	960	720
5	C_3	1,2	1,3	—	—	—	—
6	C_3	1,2	1,3	—	—	—	—
7	C_3	1,2	1,3	—	—	—	—
8	C_3	1,2	1,3	—	—	—	—
9	C_3	1,2	1,3	—	—	—	—
10	C_1	1,5	1,0	0,02	2	—	—
11	C_1	1,5	1,0	0,02	2	—	—
12	C_2	1,0	1,5	0,05	0,5	720	0
13	C_2	1,0	1,5	0,05	0,5	720	240
14	C_2	1,0	1,5	0,05	0,5	720	480
15	C_1	1,7	1,0	0,02	2	—	—
16	C_1	1,7	1,0	0,02	2	—	—
17	C_2	1,2	1,1	0,01	2	720	0
18	C_2	1,2	1,1	0,01	2	720	240
19	C_2	1,2	1,1	0,01	2	720	480
20	C_2	1,2	1,5	0,02	0,5	480	0
21	C_2	1,2	1,5	0,02	0,5	480	240
22	C_3	0,8	1,2	—	—	—	—
23	C_3	0,8	1,2	—	—	—	—

Полумарковский процесс $\eta(t), t \geq 0$, может принимать три состояния, т.е. $I = \{1, 2, 3\}$. Если $i < j$, то $H_{ij}(x) = 1 - \exp\{-(\varepsilon^{\sigma_{ij}} x)^2\}$, где $\sigma_{12} = 0,8$, $\sigma_{13} = 2$, $\sigma_{23} = 0,9$. Если $i > j$, то $H_{ij}(x) = 1 - \exp\{-(0,01x)^2\}$. Переходные вероятности $\{p_{ij}\}$ зададим следующим образом: $p_{12} = 0,7$, $p_{13} = 0,3$, $p_{23} = \varepsilon^{0,6}$, $p_{21} = 1 - \varepsilon^{0,6}$, $p_{31} = p_{32} = 0,5$. В качестве уровней требуемой эффективности выберем $\Psi(1) = 0,1$, $\Psi(2) = 0,4$, $\Psi(3) = 0,7$.

Таблица 2

Параметр, "n"	Оценки		
	$\hat{Q}(T)$	$\hat{r}(\varepsilon)$	$\hat{N}(\varepsilon)$
8	$1,76 \cdot 10^{-3}$	3,10	158814
9	$5,83 \cdot 10^{-6}$	3,51	203977
10	$7,38 \cdot 10^{-9}$	3,78	237470
11	$7,47 \cdot 10^{-12}$	3,93	255904
12	$7,55 \cdot 10^{-15}$	4,22	295167

Предположим, что надежность системы исследуется на протяжении одного года, т.е. $T = 8760$ часов. В качестве малого параметра ε выберем $\varepsilon = 4^{-n}$, $n = 8, 9, \dots$. Оценки $\hat{Q}(T)$ для вероятности $Q(T)$ функционального отказа, построенные с относительной погрешностью 2% и достоверностью 0,99 при различных значениях ε , представлены в табл. 2 ($\hat{r}(\varepsilon)$ — ОСКП соот-

ветствующей оценки, $\hat{N}(\varepsilon)$ — количество реализаций, потребовавшихся для достижения указанной точности оценки).

Приведенные данные показывают, что в широком диапазоне изменения вероятности функционального отказа (от $1,76 \cdot 10^{-3}$ до $7,55 \cdot 10^{-15}$) ОСКП оценок лишь незначительно возрастает с возрастанием надежности элементов, что соответствует утверждению теоремы 2 о равномерной ограниченности ОСКП.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен метод ускоренного моделирования, позволяющий оценивать надежность систем, состоящих из разнотипных элементов с существенно отличающимися характеристиками надежности. При этом не предполагается экспоненциальность каких-либо распределений. Полученные легко проверяемые условия гарантируют устойчивость предложенного метода при возрастании надежности элементов.

Авторы благодарны академику НАН Украины И.Н. Коваленко за внимание к работе и полезные советы, способствующие ее улучшению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойлов О.Б., Усынин Г.Б., Бахметьев А.М. Безопасность ядерных энергетических установок. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 280 с.
2. Kovalenko I.N., Atkinson J.B., Mikhalevich K.V. Three cases of light-traffic insensitivity of the loss probability in a $GI/G/m/0$ loss system to the shape of the service time distribution // Queueing Systems. — 2003. — **45**, N 3. — P. 245–271.
3. Baccelli F., Borovkov A., Mairesse J. Asymptotic results on infinite tandem queueing networks // Probab. Theory and Rel. Fields. — 2000. — **118**, N 3. — P. 365–405.
4. Miyazawa M., Rolski T. Tail asymptotics for a Lévy-driven tandem queue with an intermediate input // Queueing Systems. — 2009. — **63**, N 1. — P. 323–353.
5. Asymptotic behavior of total times for jobs that must start over if a failure occurs / S. Asmussen, P. Fiorini, L. Lipsky et al. // Math. Oper. Res. — 2008. — **33**, N 4. — P. 932–944.
6. Heidelberger P. Fast simulation of rare events in queueing and reliability models // ACM Trans. Modeling Comput. Simul. — 1995. — **5**, N 1. — P. 43–85.

7. Li J., Mosleh A., Kang R. Likelihood ratio gradient estimation for dynamic reliability applications // *Reliab. Eng. and System Safety*. — 2011. — **96**, N 12. — P. 1667–1679.
8. Glasserman P. Monte Carlo methods in financial engineering. — New York: Springer, 2004. — 575 p.
9. Коваленко И. Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. — М.: Сов. радио, 1980. — 209 с.
10. Коваленко И. Н. К расчету характеристик высоконадежных систем аналитико-статистическим методом // *Электрон. моделирование*. — 1980. — **2**, № 4. — С. 5–8.
11. Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю. Методы расчета высоконадежных систем. — М.: Радио и связь, 1988. — 176 с.
12. Kuznetsov N.Yu. Fast simulation technique in reliability evaluation of Markovian and non-Markovian systems // *Simulation and Optimization Methods in Risk and Reliability Theory*. — New York: Nova Sci. Publ., 2009. — P. 69–112.
13. Кузнецов Н. Ю., Шумская А. А. Оценка опасности отказа резервированной системы методом ускоренного моделирования // *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. — 2013. — № 3. — С. 50–62.
14. Glasserman P., Heidelberger Ph., Shahabuddin P., Zajic T. Multilevel splitting for estimating rare event probabilities // *Oper. Res.* — 1999. — **47**, N 4. — P. 585–600.
15. Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A. Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. — Chichester: Wiley, 1997. — 303 p.
16. Lagnoux A. Rare event simulation // *Probab. Eng. and Inf. Sci.* — 2006. — **20**, N 1. — P. 45–66.
17. Blanchet J., Lam H. Rare event simulation techniques // *Proc. of the 2011 Winter Simulation Conf.* — 2011. — P. 217–231.
18. Хомяк О. Н. Нахождение вероятности пересечения функционалов от траекторий двух цепей Маркова методом существенной выборки // *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. — 2013. — № 4. — С. 123–128.
19. Хомяк О. Н. Применение ускоренного моделирования для оценки вероятности пересечения случайного уровня марковским процессом // *Там же*. — 2014. — № 1. — С. 110–118.
20. Кузнецов Н. Ю., Хомяк О. Н., Шумская А. А. Ускоренное моделирование функционального отказа $s-t$ -сети с восстановлением // *Кибернетика и системный анализ*. — 2014. — № 3. — С. 39–50.
21. Caldarola L., Wickenhäuser A. The Karlsruhe computer program for the evaluation of the availability and reliability of complex repairable systems // *Nuclear Eng. and Design*. — 1977. — **43**. — P. 463–470.
22. Hennings W., Kuznetsov N. FAMOCUTN & CUTQN: programs for fast analysis of large fault trees with replicated & negated gates // *IEEE Trans. Reliab.* — 1995. — **44**, N 3. — P. 368–376.
23. Кузнецов Н. Ю., Михалеви́ч К. В. Анализ надежности систем, описываемых деревьями отказа с эффективностями // *Кибернетика и системный анализ*. — 2003. — № 5. — С. 142–151.
24. Коваленко И. Н. Об оценке надежности сложных систем // *Вопр. радиоэлектроники*. — 1965. — **12**, № 9. — С. 50–68.
25. Шумская А. А. Ускоренное моделирование коэффициента неготовности восстанавливаемой системы с ограниченной относительной погрешностью оценки // *Кибернетика и системный анализ*. — 2003. — № 3. — С. 45–58.
26. Кузнецов Н. Ю. Оценка надежности восстанавливаемых ($s-t$)-сетей методом ускоренного моделирования // *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. — 2014. — № 3. — С. 61–73.

Поступила 29.09.2013