УДК 517.95:519.86:539.3

В.А. СТОЯН, К.В. ДВИРНИЧУК

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ. I. УПРАВЛЕНИЕ ПРИ НЕПРЕРЫВНО ЗАДАННОМ ЖЕЛАЕМОМ СОСТОЯНИИ

Аннотация. Ставятся и решаются задачи управления трехмерным полем поперечных динамических смещений упругих плит конечной толщины по среднеквадратическому согласованию его с наперед заданным непрерывно определенным желаемым состоянием. Управляющими факторами считаются поверхностно распределенные внешнединамические нагрузки, начальные и краевые возмущающие факторы, используемые отдельно, попарно и в комплексе. Описаны особенности решения этих задач для случая, когда начально определенные и краевые возмущения несущественны. Исследуются условия точности и однозначности полученных решений.

Ключевые слова: управление, толстые упругие плиты, динамические системы, математическое моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Упругие динамические объекты в виде пластин, оболочек и толстых плит являются неотъемлемым компонентом технического прогресса. Сложность их исследования состоит в том, что классические уравнения Ляме [1, 2], описывающие упруго-динамические процессы в таких механических конструкциях, в силу своей универсальности слишком громоздки для численно-аналитического решения. Уравнения, построенные [3, 4] с учетом вырожденности одного из размеров (толщины) механических элементов и более применимые для практики, не всегда эффективны при конечности такого размера [5–7]. Преодолеть эти две крайности удалось А.И. Лурье в работе [1], где с учетом геометрии упругого объекта трехмерная задача эластостатики толстого упругого слоя сведена к двухмерной дифференциальной модели. Его идеи, успешно развитые в [8], позволили построить подобную модель и для задачи динамики упругого слоя конечной толщины, загруженного, однако, только осесимметрическими поверхностными усилиями. Для общего случая динамики такого сложного механического объекта разрешающие уравнения были получены только в [9]. Эти уравнения, как и указанные выше, точно (без механических гипотез) описывая трехмерное поле поперечных динамических смещений толстого упругого слоя, являются бесконечно высокого порядка двухмерными (по пространственным координатам) дифференциальными уравнениями с параметрической зависимостью от вырожденной координаты. Уравнения ограниченного порядка соответствуют по точности известным ранее теориям изгиба и динамики упругих плит и могут быть исследованы классическими методами математической физики и вычислительной математики. Для общего случая решение уравнений [8, 9] дано в [10], где построено интегральное представление функции поперечных динамических смещений точек поверхностно загруженного упругого слоя конечной толщины.

Проблема применения уравнений [9] к исследованию динамики толстых упругих плит конечных размеров оставалась нерешенной, поскольку начально-краевые задачи в таком случае не могут быть сформулированы корректно по количеству начально-краевых условий. Для ее преодоления в работе [11] при решении прямых задач эластодинамики применен метод математического моделирования, предложенный в [12, 13]. Это позволило построить решение сформулированных в [11] начально-краевых задач для довольно сложных дифференциальных уравнений [8, 9] не только при количественной неполноте начально-краевых наблюдений за плитой, но и при их качественном несоответствии математической модели процесса. В частности, были решены задачи построения поля поперечных упруго-динамических смещений толстой плиты при неполных по количеству и пространственно-временному распределению (непрерывно в подобласти или даже дискретно) начально-краевых наблюдениях за ее состоянием. Нерешенными, однако, остались более сложные, актуальные и интересные для инженерной практики, вопросы исследования процессов управления динамикой плит конечной толщины.

Настоящая статья посвящена решению задач управления толстыми упругими плитами в условиях неполноты информации об их начально-краевом состоянии при дискретно и непрерывно заданном желаемом состоянии плиты. Методика псевдообращения линейных алгебраических, интегральных и функциональных систем [14] позволила, как и в [12, 13], решить эти сложные задачи для случаев, когда управление исследуемым объектом осуществляется поверхностными динамическими усилиями, начальными и краевыми возмущениями по отдельности, попарно и в комплексе. Ниже будут рассмотрены случаи неограниченности упругой плиты по пространственным координатам и ее динамики на неограниченном временном интервале, а также исследованы вопросы точности полученных решений и сформулированы условия однозначности некорректно поставленных задач эластодинамики плит.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ УПРУГОГО СЛОЯ

Рассмотрим вопросы исследования динамики упругой плиты, срединная поверхность которой совпадает с плоскостью Oxy декартовой системы координат x, y, z, в предположении, что толщина $2h$ плиты соизмерима с ее геометрическими размерами, а граничные поверхности $z=\pm h$ находятся под действием нормальных $(k=1)$ и касательных $(k=2)$ к ним динамических возмущений $q_k^{\pm}(x, y, z, t)$ $(k=\overline{1,2})$ (здесь и далее t — временная координата). Не ограничивая (пока) исследуемую плиту по пространственным координатам, рассмотрим ее как толстый упругий слой толщины $2h$. Дифференциальные уравнения, определяющие симметрическую и антисимметрическую части $w_k^{(1)}(x, y, z, t)$ и $w_k^{(2)}(x, y, z, t)$ $(k=\overline{1,2})$ функции

$$w(x, y, z, t)=\sum_{k,l=1}^{2} w_k^{(l)}(x, y, z, t) \tag{1}$$

смещений такого слоя, построены в [9].

Обозначив $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ смещения точек слоя в направлении координатных осей Ox, Oy, а d и Δ — операторы такие, что

$$\partial_x u+\partial_y v=d(u+v),\ \ d(\partial_x+\partial_y)=\Delta$$

(здесь и далее $\partial_x, \partial_y, \partial_t$ — производные по пространственным координатам x, y и времени t) при

$$Q^{(1)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t)=(\Delta+D_2^2)((\lambda+2\mu)D_1^2-\lambda\Delta)\cos(hD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2}-$$

$$-4\mu\Delta D_1^2\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(hD_2),$$

$$Q^{(2)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t)=(\Delta+D_2^2)(\lambda\Delta-(\lambda+2\mu)D_1^2)\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(hD_2)+$$

$$+4\mu\Delta D_2^2\cos(hD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2}, \tag{2}$$

$$d_1^{(1)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)=D_1^2\left[(\Delta+D_2^2)\frac{\sin(zD_1)}{D_1}\frac{\sin(hD_2)}{D_2}-2\Delta\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\frac{\sin(zD_2)}{D_2}\right],$$

$$d_2^{(1)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)=$$

$$=2d\left[\frac{1}{\mu}((\lambda+2\mu)D_1^2-\lambda\Delta)\cos(hD_1)\frac{\sin(zD_2)}{D_2}-2D_1^2\frac{\sin(zD_1)}{D_1}\cos(hD_2)\right],$$

$$d_1^{(2)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)=(\Delta+D_2^2)\cos(zD_1)\cos(hD_2)-2\Delta\cos(hD_1)\cos(zD_2), \quad (3)$$

$$d_2^{(2)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)=$$

$$=2d\left[2D_2^2\cos(zD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2}+\frac{1}{\mu}(\lambda\Delta-(\lambda+2\mu)D_1^2)\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(zD_2)\right],$$

эти уравнения запишем в виде

$$Q^{(l)}(\partial_x,\partial_y,\partial_t)w_k^{(l)}(x,y,z,t)=d_k^{(l)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)q_k^{(l)}(x,y,t) \quad (k,l=\overline{1,2}). \quad (4)$$

Здесь λ и μ — константы Ляме [1, 2], характеризующие упругие свойства слоя,

$$q_1^{(1)}(x,y,t)=\frac{1}{2}(q_1^+(x,y,t)+q_1^-(x,y,t)),\ q_2^{(1)}(x,y,t)=\frac{1}{2}(q_2^+(x,y,t)-q_2^-(x,y,t)),$$

$$q_1^{(2)}(x,y,t)=\frac{1}{2}(q_1^+(x,y,t)-q_1^-(x,y,t)),\ q_2^{(2)}(x,y,t)=\frac{1}{2}(q_2^+(x,y,t)+q_2^-(x,y,t)),$$

операторы Δ_1, Δ_2, D_m^2 $(m=\overline{1,2})$ определяются соотношениями

$$\Delta_1=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\Delta+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\Delta_2,\ \Delta_2=\partial_x^2+\partial_y^2,\ D_m^2=\Delta_m-\frac{1}{c_m^2}\partial_t^2 \quad (m=\overline{1,2})$$

через удельную плотность ρ материала слоя, скорости $c_2=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$, $c_1=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ распространения упругих волн расширения и сдвига, а $Q^{(l)}(\partial_x,\partial_y,\partial_t)$, $d_k^{(l)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)$ — операторы, дифференциальное содержание которых получим после возвращения символам Δ и D_m^2 $(m=\overline{1,2})$ их дифференциального содержания в разложениях функций $\dfrac{\sin(zD_m)}{D_m}$, $\cos(zD_m)$ в ряды по степеням zD_m.

Заметим, что уравнения (4), записанные с разной степенью точности, включают как классические уравнения [1, 3] двухмерной теории пластин, так и их обобщения [4], полученные на базе неклассических моделей механики деформирования упругих плит. Учитывая, что механические гипотезы, положенные в основу построения разрешающих уравнений этих моделей, не превышают h^3-порядок, запишем и дифференциальные операторы уравнений (4) соответствующей точности. При этом для осесимметрического загружения рассматриваемого слоя имеем следующие соотношения [10]:

$$Q^{(1)}(\partial_x,\partial_y,\partial_t)=\mu h\left\{\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\Delta-\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2\right\}-$$

$$-\mu\frac{h^3}{3!}\left\{\frac{8(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\Delta\Delta-\frac{4(2\lambda^2+8\lambda\mu+7\mu^2)}{(\lambda+2\mu)^2}\Delta\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2+\frac{\lambda+5\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2\right)^2\right\},$$

$$Q^{(2)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) =$$

$$= h\mu \frac{\rho}{\mu}\partial_t^2 + \mu \frac{h^3}{3!}\left\{ \frac{8(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\Delta\Delta - \frac{4(3\lambda+4\mu)}{\lambda+2\mu}\Delta \frac{\rho}{\mu}\partial_t^2 + \frac{3\lambda+7\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2\right)^2 \right\},$$

$$d_1^{(1)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) = zh\left\{ \Delta - \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\partial_t^2 \right\},$$

$$d_2^{(1)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) =$$

$$= zd\left\{ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} + \frac{1}{2}h^2\left(\Delta - \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\partial_t^2\right)\right\} - \frac{1}{3!}z^3 d\left\{ \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\Delta - \frac{\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2 \right\},$$

$$d_1^{(2)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) = 1 - \frac{1}{2}h^2\left\{ \frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\Delta - \frac{\rho}{\mu}\partial_t^2 \right\} + \frac{1}{2}z^2\left\{ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Delta + \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\partial_t^2 \right\},$$

$$d_2^{(2)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) =$$

$$= hd\left\{ 1 - \frac{1}{3!}h^2\left(\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\Delta - \frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\rho}{\mu}\partial_t^2 \right)\right\} + \frac{1}{2}hz^2 d\left\{ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\Delta - \frac{\rho}{\mu}\partial_t^2\right)\right\},$$

что совпадает с результатами, полученными в [8].

Уравнения (4), (2), (3), точно описывая трехмерную картину упругих динамических смещений $w(x, y, z, t)$, являются сложными как для анализа, так и для их решения. Более удобна для практического использования интегральная форма математической модели (4), а именно [10]

$$w_k^{(l)}(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_k^{(l)}(\xi - \xi', z) q_k^{(l)}(\xi') d\xi' \quad (k, l = \overline{1,2}), \tag{5}$$

где $\xi = (x, y, t)$, $\xi' = (x', y', t')$,

$$G_k^{(l)}(\xi - \xi', z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d_k^{(l)}(p_1, p_2, z, q)}{Q^{(l)}(p_1, p_2, q)} e^{p_1(x-x') + p_2(y-y') + q(t-t')} dp_1 dp_2 dq \quad (k, l = \overline{1,2})$$

— функции, аналитическое выражение которых можно построить [15] с применением теории интегральных вычетов [16]. Заметим при этом, что

$$Q^{(l)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) G_k^{(l)}(\xi - \xi', z) = d_k^{(l)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t)\delta(\xi - \xi') \quad (k, l = \overline{1,2}), \tag{6}$$

где $\delta(\xi - \xi')$ — δ-функция Дирака.

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ

Остановимся на вопросах исследования динамики толстых упругих плит в смысле управления полем поперечных динамических смещений $w(x, y, z, t)$. Будем считать, что тело плиты вырезано цилиндром $\Gamma(x, y)$ из рассмотренного выше упругого слоя толщины $2h$. Дифференциальную модель (4) для составляющих $w_k^{(l)}(x, y, z, t)$ функции $w(x, y, z, t)$ смещений внутренних точек $(x, y, z) \in S_0$ плиты дополним условиями, определяющими ее начально-краевое состояние. При этом рассмотрим два случая:

— начально-краевое состояние наблюдается непрерывно:

$$L_r^0(\partial_t)w(s)_{|t=0}=W_r^0(\sigma)\ \ (r=\overline{1,R_0},\ \sigma\in\Sigma_0), \tag{7}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)=W_\rho^\Gamma(s)\ \ (\rho=\overline{1,R_\Gamma},\ s\in\Sigma_\Gamma); \tag{8}$$

— начально-краевое состояние наблюдается дискретно:

$$L_r^0(\partial_t)w(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0\in\Sigma_0}}=W_{rj}^0\ \ (j=\overline{1,J_r},\ r=\overline{1,R_0}), \tag{9}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)\Big|_{s=s_j^\Gamma\in\Sigma_\Gamma}=W_{\rho j}^\Gamma\ \ (j=\overline{1,J_\rho},\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}). \tag{10}$$

Здесь и далее $L_r^0(\partial_t)$ $(r=\overline{1,R_0})$ и $L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ — линейные дифференциальные операторы, $\sigma=(x,y,z)$, $s=(\sigma,t)$, $\Sigma_0\subseteq S_0$, $\Sigma_\Gamma\subseteq S_\Gamma^T=\Gamma(x,y)\times[-h,h]\times[0,\mathrm{T}]$.

Не накладывая никаких ограничений на количество R_0, R_Γ — начально-краевых наблюдений (7)–(10), на области Σ_0, Σ_Γ, на выбор точек σ_j^0 $(j=\overline{1,J_r})$, s_j^Γ $(j=\overline{1,J_\rho})$ этих областей, соотношения (7)–(10) дополним условиями, которыми определим желаемое состояние внутренних точек слоя при $t\in[0,T]$. Эти условия, как и наблюдения (7)–(10), запишем непрерывно и дискретно в области $\Sigma\subseteq S_0^T=S_0\times[0,\mathrm{T}]$:

$$L_i(\partial_s)w(s)=W_i(s)\ \ (i=\overline{1,I},\ s\in\Sigma), \tag{11}$$

$$L_i(\partial_s)w(s)_{|\,s=s_{ij}\in\Sigma}=W_{ij}\ \ (j=\overline{1,J_i},\ i=\overline{1,I}). \tag{12}$$

Учитывая, что на состояние плиты влияют:

— поверхностные внешнединамические усилия $q_k^\pm(x,y,t)$ $(k=\overline{1,2})$,

— начальное состояние плиты, определенное функциями $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1,R_0})$ или их значениями W_{rj}^0 $(j=\overline{1,J_r},\ r=\overline{1,R_0})$ в точках σ_j^0 $(j=\overline{1,J_r})$,

— краевое состояние плиты, определенное функциями $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ или их значениями $W_{\rho j}^\Gamma$ $(j=\overline{1,J_\rho},\ \rho=\overline{1,R_\Gamma})$ в точках s_j^0 $(j=\overline{1,J_\rho})$,

поставим задачу определить: один из внешнединамических факторов при известных двух других, два внешнединамических фактора при известном третьем, три внешнединамических управляющих фактора таким образом, чтобы введенная согласно (1) функция $w(s)$, покомпонентно (через $w_k^{(l)}(s)$) удовлетворяя уравнению (4), согласно среднеквадратическому критерию согласовывалась с начально-краевыми наблюдениями (7)–(10) и приближалась к значениям, определенным соотношениями (11), (12) при любом значении R_0, R_Γ, при любых Σ_0, Σ_Γ, $\sigma_j^0\in\Sigma_0$, $s_j^\Gamma\in\Sigma_\Gamma$, $s_{ij}\in\Sigma$. Иначе говоря, потребуем, чтобы решения уравнений (4), объединенные согласно (1), удовлетворяли следующим условиям:

$$\Phi_1=\sum_{r=1}^{R_0}\int_{\Sigma_0}(L_r^0(\partial_t)w(s)_{|t=0}-W_r^0(\sigma))^2\,d\sigma+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int_{\Sigma_\Gamma}(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)-W_\rho^\Gamma(s))^2\,ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{I}\int_{\Sigma}(L_i(\partial_s)w(s)-W_i(s))^2\,ds\to\min_{w(s)}, \tag{13}$$

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{j=1}^{J_r} \left(L_r^0 (\partial_t) w(s)_{|t=0,\, \sigma=\sigma_j^0 \in \Sigma_0} - W_{rj}^0 \right)^2 +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{j=1}^{J_\rho} \left(L_\rho^\Gamma (\partial_\sigma) w(s)_{|s=s_j^\Gamma \in \Sigma_\Gamma} - W_{\rho j}^\Gamma \right)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} (L_i (\partial_s) w(s)_{|s=s_{ij} \in \Sigma} - W_{ij})^2 \to \min_{w(s)}. \tag{14}$$

Для решения задач (13), (14), как и в [12, 13], функции $w_k^{(l)}(s)$ $(k, l = \overline{1,2})$ представим суммой

$$w_k^{(l)}(s) = w_{\infty k}^{(l)}(s) + w_{0k}^{(l)}(s) + w_{\Gamma k}^{(l)}(s), \tag{15}$$

в которой

$$w_{\infty k}^{(l)}(s) = \int_S G_k^{(l)}(\xi - \xi', z) q_k^{(l)}(\xi') d\xi',$$

$$w_{0k}^{(l)}(s) = \int_{S^0} G_k^{(l)}(\xi - \xi', z) q_{0k}^{(l)}(\xi') d\xi', \tag{16}$$

$$w_{\Gamma k}^{(l)}(s) = \int_{S^\Gamma} G_k^{(l)}(\xi - \xi', z) q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi') d\xi'$$

при $\xi = (x, y, t)$, $S = S^+ \cup S^-$, $S^0 = S^{0+} \cup S^{0-}$, $S^\Gamma = S^{\Gamma+} \cup S^{\Gamma-}$, $S^\pm = (S_0 \cap$ $\cap \{z = \pm h\}) \times [0, \mathrm{T}]$, $S^{0\pm} = (S_0 \cap \{z = \pm h\}) \times (-\infty, 0]$, $S^{\Gamma\pm} = ((R^3 \setminus S_0) \cap \{z = \pm h\}) \times$ $\times [0, \mathrm{T}]$ и неизвестных пока функциях $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$. Нетрудно проверить, что с учетом (6) составляющие $w_k^{(l)}(s)$ $(k, l = \overline{1,2})$ функции $w(s)$ удовлетворяют уравнениям (4) точно при любых $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$. Это означает, что критерии (13), (14) решения перечисленных выше задач запишутся в виде

$$\Phi_i \to \min_{\substack{q_{0k}^{(l)}(\xi),\, q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) \\ (k,l=\overline{1,2})}} \quad (i = \overline{1,2}) \tag{17}$$

при известных внешнединамических нагрузках $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k = \overline{1,2})$ и

$$\Phi_i \to \min_{\substack{q_k^{(l)}(\xi),\, q_{0k}^{(l)}(\xi), \\ q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)\, (k,l=\overline{1,2})}} \quad (i = \overline{1,2}), \tag{18}$$

если внешнединамические возмущения $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k = \overline{1,2})$ управляющие.

Заметим, что фигурирующие в (17) функции $w_k^{(l)}(s)$ $(k, l = \overline{1,2})$ удовлетворяют уравнениям (4) и в случае, если положить

$$w_{\infty k}^{(l)}(s) = \sum_{m=1}^{M_k^{(l)}} G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{(l)}, z) q_{km}^{(l)},$$

$$w_{0k}^{(l)}(s) = \sum_{m=1}^{M_{0k}^{(l)}} G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{0(l)}, z) q_{0km}^{(l)}, \tag{19}$$

$$w_{\Gamma k}^{(l)}(s) = \sum_{m=1}^{M_{\Gamma k}^{(l)}} G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{\Gamma(l)}, z) q_{\Gamma km}^{(l)} \quad (k, l = \overline{1,2}).$$

Здесь $q_{km}^{(l)} = q_k^{(l)}(\xi_{km}^{(l)})$ $(m=\overline{1, M_k^{(l)}})$, $q_{0km}^{(l)} = q_{0k}^{(l)}(\xi_{km}^{0(l)})$ $(m=\overline{1, M_{0k}^{(l)}})$, $q_{\Gamma km}^{(l)} = q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi_{km}^{\Gamma(l)})$ $(m=\overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}})$, а для $k, l = \overline{1,2}$

$$\xi_{km}^{(l)} \in \Xi_k = \Xi_k^+ \cup \Xi_k^- \quad (m=\overline{1, M_k^{(l)}}),$$

$$\xi_{km}^{0(l)} \in \Xi_k^0 = \Xi_k^{0+} \cup \Xi_k^{0-} \quad (m=\overline{1, M_{0k}^{(l)}}),$$

$$\xi_{km}^{\Gamma(l)} \in \Xi_k^\Gamma = \Xi_k^{\Gamma+} \cup \Xi_k^{\Gamma-} \quad (m=\overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}})$$

при

$$\Xi_k^\pm = \{\xi_{km}^\pm \in S^\pm,\ m=\overline{1, M_k^\pm}\}, \quad \Xi_k^{0\pm} = \{\xi_{km}^{0\pm} \in S^{0\pm},\ m=\overline{1, M_{0k}^\pm}\},$$

$$\Xi_k^{\Gamma\pm} = \{\xi_{km}^{\Gamma\pm} \in S^{\Gamma\pm},\ m=\overline{1, M_{\Gamma k}^\pm}\}$$

и $M_k^{(l)} = M_k^+ + M_k^-$, $M_{0k}^{(l)} = M_{0k}^+ + M_{0k}^-$, $M_{\Gamma k}^{(l)} = M_{\Gamma k}^+ + M_{\Gamma k}^-$.

В этом случае критерии (17), (18) запишутся в виде

$$\Phi_i \to \min_{\substack{\bar{q}_{0k}^{(l)}, \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} \\ (k,l=\overline{1,2})}} \quad (i=\overline{1,2}), \tag{20}$$

$$\Phi_i \to \min_{\substack{\bar{q}_k^{(l)}, \bar{q}_{0k}^{(l)}, \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} \\ (k,l=\overline{1,2})}} \quad (i=\overline{1,2}), \tag{21}$$

где $\bar{q}_k^{(l)} = \mathrm{col}\,(q_{km}^{(l)}, m=\overline{1, M_k^{(l)}})$, $\bar{q}_{0k}^{(l)} = \mathrm{col}\,(q_{0km}^{(l)}, m=\overline{1, M_{0k}^{(l)}})$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} = \mathrm{col}\,(q_{\Gamma km}^{(l)}, m=\overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}})$.

Заметим, что критерии (18) и (21) являются определяющими при решении задач управления динамикой, наблюдаемой согласно (9), (10) или (7), (8), упругой плиты по достижении ею необходимого состояния (11) и (12) посредством поверхностных внешнединамических возмущений, определенных непрерывно (функциями $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$) или дискретно (значениями $q_{km}^{(l)}$ $(m=\overline{1, M_k^{(l)}})$ $(k, l=\overline{1,2})$) соответственно.

Для случая, когда динамика плиты управляется поверхностными динамическими возмущениями в паре с начальными $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1, R_0})$ или краевыми $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$ возмущающими факторами, функции Φ_i $(i=\overline{1,2})$ в (18), (21) запишутся соответственно в следующем виде:

$$\Phi_1 = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Sigma_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma) w(s) - W_\rho^\Gamma(s))^2\, ds + \sum_{i=1}^{I} \int_{\Sigma} (L_i(\partial_s) w(s) - W_i(s))^2\, ds,$$

$$\Phi_2 = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{j=1}^{J_\rho} \left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma) w(s)_{|s=s_j^\Gamma \in \Sigma_\Gamma} - W_{\rho j}^\Gamma \right)^2 + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \left(L_i(\partial_s) w(s)_{|s=s_{ij} \in \Sigma} - W_{ij} \right)^2; \tag{22}$$

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{\Sigma_0} (L_r^0(\partial_t) w(s)_{|t=0} - W_r^0(\sigma))^2\, d\sigma + \sum_{i=1}^{I} \int_{\Sigma} (L_i(\partial_s) w(s) - W_i(s))^2\, ds,$$

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{j=1}^{J_r} \left(L_r^0(\partial_t) w(s)_{|t=0, \sigma=\sigma_j^0 \in \Sigma_0} - W_{rj}^0 \right)^2 + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \left(L_i(\partial_s) w(s)_{|s=s_{ij} \in \Sigma} - W_{ij} \right)^2. \tag{23}$$

.

При решении задач управления плитой посредством всех управляющих факторов исходными будут критерии (17), (20), в которых

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{I} \int_{\Sigma} (L_i(\partial_s) w(s) - W_i(s))^2 \, ds,$$

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \left(L_i(\partial_s) w(s)_{|s=s_{ij} \in \Sigma} - W_{ij} \right)^2 . \tag{24}$$

Заметим, что предлагаемая далее методика решения задач (17), (18) позволит найти функции $q_k^{(l)}(\xi)$, $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ только при $i = 2$. Дискретные же значения $\bar{q}_k^{(l)}$, $\bar{q}_{0k}^{(l)}$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2})$ этих функций будут найдены согласно (20), (21) при любом $i = \overline{1,2}$.

При определенных выше Φ_i $(i = \overline{1,2})$ полученные в результате решения задач (17), (18) или (20), (21) функции $q_k^{(l)}(\xi)$, $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ либо их дискретные аналоги $q_{km}^{(l)}$ $(m = \overline{1, M_k^{(l)}})$, $q_{0km}^{(l)}$ $(m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}})$, $q_{\Gamma km}^{(l)}$ $(m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}})$ $(k, l = \overline{1,2})$ позволяют согласно (1), (16) и (1), (19) найти функцию $w(s)$ состояния плиты.

Последнее означает, что легко можно определить и функции $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ или их дискретные значения W_{rj}^0 $(j = 1, J_r,\ r = \overline{1, R_0})$, $W_{\rho j}^\Gamma$ $(j = 1, J_\rho,\ \rho = \overline{1, R_\Gamma})$ для случая, когда эти функции управляющие.

Следующим большим классом задач по управлению рассматриваемой плитой являются задачи по достижению необходимого состояния (11), (12) в случаях, когда функции $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k = \overline{1,2})$ известны, а управление осуществляется начальными, краевыми или начально-краевыми возмущающими факторами, определенными функциями $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$. В этом случае решение указанных задач сведется к построению функций $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ таких, чтобы

$$q_{0k}^{(l)}(\xi), q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) \in \operatorname{Arg\,min} \Phi_2 \quad (k, l = \overline{1,2}) \tag{25}$$

при Φ_2, заданном согласно (22)–(24) соответственно. При дискретном определении функций $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ задача (25) заменится задачей построения векторов $\bar{q}_{0k}^{(l)}$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2})$ согласно критерию

$$\bar{q}_{0k}^{(l)}, \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} \in \operatorname{Arg\,min} \Phi_i \quad (k, l, i = \overline{1,2}), \tag{26}$$

в котором, как и выше, Φ_i $(i = \overline{1,2})$ определены в (22)–(24).

Найденные согласно (25), (26) функции $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ или их дискретные аналоги $\bar{q}_{0k}^{(l)}$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2})$ с учетом (1), (16) или (1), (19) позволяют построить функцию $w(s)$, а согласно (7), (8) или (9), (10) — определить и начально-краевые возмущающие факторы $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ или W_{rj}^0 $(j = 1, J_r, r = \overline{1, R_0})$, $W_{\rho j}^\Gamma$ $(j = 1, J_\rho,\ \rho = \overline{1, R_\Gamma})$.

Заметим, что построенная при решении любой из указанных выше задач функция $w(s)$, определенная согласно (1), точно «улавливает» механику упруго-динамических смещений, описанных соотношениями (1), (4), и с точностью

$$\varepsilon^2 = \min_{w(s)} \Phi_i \quad (i = \overline{1,2}) \tag{27}$$

согласуется с начально-краевыми наблюдениями и желаемым состоянием, определенными в (7), (8), (11) и (9), (10), (12) соответственно. Решения рассмотренных задач в общем случае неоднозначны. Условия их однозначности установим в процессе решения отдельных задач.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ С НЕПРЕРЫВНО ЗАДАННЫМ ЖЕЛАЕМЫМ СОСТОЯНИЕМ

Рассмотрим задачу определения поверхностных динамических возмущений $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k = \overline{1,2})$, которые решали бы задачу (7), (8), (11), (13). Особенности использования методики [12, 13] для решения поставленной задачи предполагают определение управляющих функций $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k = \overline{1,2})$ векторами $\bar{q}_k^{\pm} = \mathrm{col}\,(q_{km}^{\pm}, m = \overline{1, M_k^{\pm}})$ $(k = \overline{1,2})$ значений $q_{km}^{\pm} = q_k^{\pm}(\xi_{km}^{\pm})$ данных функций в точках $\xi_{km}^{\pm} \in S^{\pm}$ $(m = \overline{1, M_k^{\pm}})$. С учетом этого представленную согласно (1), (15), (19) функцию пространственно распределенных динамических смещений $w(s)$ точек плиты подставим в (7), (8), (11). В результате получим разрешающую систему линейных функциональных уравнений

$$A(s)\bar{q} = \overline{W}(s) \tag{28}$$

для определения векторов

$$\bar{q}_k^{(l)} = \mathrm{col}\,(q_{km}^{(l)}, m = \overline{1, M_k^{(l)}}),\ \bar{q}_{0k}^{(l)} = \mathrm{col}\,(q_{0km}^{(l)}, m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}}),$$
$$\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} = \mathrm{col}\,(q_{\Gamma km}^{(l)},\ m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}})$$

значений

$$q_{km}^{(l)} = q_k^{(l)}(\xi_{km}^{(l)})\ \ (m = \overline{1, M_k^{(l)}}),\ q_{0km}^{(l)} = q_{0k}^{(l)}(\xi_{km}^{0(l)})\ \ (m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}}),$$
$$q_{\Gamma km}^{(l)} = q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi_{km}^{\Gamma(l)})\ \ (m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}})$$

управляюще-моделирующих функций $q_k^{(l)}(\xi)$, $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ в точках $\xi_{km}^{(l)} \in \Xi_k$ $(m = \overline{1, M_k^{(l)}})$, $\xi_{km}^{0(l)} \in \Xi_k^0$ $(m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}})$, $\xi_{km}^{\Gamma(l)} \in \Xi_k^{\Gamma}$ $(m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}})$ $(k, l = \overline{1,2})$. При этом

$$\bar{q} = \mathrm{col}\,(((\bar{q}_k^{(l)}, \bar{q}_{0k}^{(l)}, \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}),\ k = \overline{1,2}),\ l = \overline{1,2}),$$

$$\overline{W}(s) = \begin{pmatrix} W(s), & s \in \Sigma \\ W^0(\sigma), & \sigma \in \Sigma_0 \\ W^{\Gamma}(s), & s \in \Sigma_{\Gamma} \end{pmatrix},$$

$$A(s) = \mathrm{str}\left(\left(\begin{pmatrix} \mathrm{str}\,((A_{k1j}^{(l)}(s), s \in \Sigma),\ j = \overline{1,3}) \\ \mathrm{str}\,((A_{k2j}^{(l)}(\sigma), \sigma \in \Sigma_0),\ j = \overline{1,3}) \\ \mathrm{str}\,((A_{k3j}^{(l)}(s), s \in \Sigma_{\Gamma}),\ j = \overline{1,3}) \end{pmatrix}, k = \overline{1,2}\right), l = \overline{1,2}\right);$$

$$W(s) = \mathrm{col}\,(W_i(s), i = \overline{1, I})\ \ (s \in \Sigma),$$

$$W^0(\sigma) = \mathrm{col}\,(W_r^0(\sigma),\ r = \overline{1, R_0})\ \ (\sigma \in \Sigma_0),$$

$$W^{\Gamma}(s) = \mathrm{col}\,(W_{\rho}^{\Gamma}(s),\ \rho = \overline{1, R_{\Gamma}})\ \ (s \in \Sigma_{\Gamma}),$$

$$A_{k11}^{(l)}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_i(\partial_s)\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{(l)}, z),\ m = \overline{1, M_k^{(l)}}),\ i = \overline{1, I}),$$

$$A_{k12}^{(l)}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_i(\partial_s)\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{0(l)}, z),\ m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}}),\ i = \overline{1, I}),$$

$$A_{k13}^{(l)}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_i(\partial_s)\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{\Gamma(l)}, z),\ m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}}),\ i = \overline{1, I}),$$

$$A_{k21}^{(l)}(\sigma) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{(l)}, z)_{|t=0},\ m = \overline{1, M_k^{(l)}}),\ r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{k22}^{(l)}(\sigma) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{0(l)}, z)_{|t=0},\ m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}}),\ r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{k23}^{(l)}(\sigma) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{\Gamma(l)}, z)_{|t=0},\ m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}}),\ r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{k31}^{(l)}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\sigma})\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{(l)}, z),\ m = \overline{1, M_k^{(l)}}),\ \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}),$$

$$A_{k32}^{(l)}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\sigma})\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{0(l)}, z),\ m = \overline{1, M_{0k}^{(l)}}),\ \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}),$$

$$A_{k33}^{(l)}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\sigma})\,G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{\Gamma(l)}, z),\ m = \overline{1, M_{\Gamma k}^{(l)}}),\ \rho = \overline{1, R_{\Gamma}})\ \ (k, l = \overline{1, 2}).$$

С учетом того, что критерий (13) решения задачи при этом преобразуется к виду (21) при Φ_1, определенном в (13), или, что эквивалентно,

$$\Phi_1 \to \min_{\bar{q}}, \tag{29}$$

из (28) находим [12, 13]

$$\bar{q} \in \Omega_q = \{q : q = P_2^{+} A_w + \bar{v} - P_2^{+} P_2 \bar{v}\}$$

при произвольном

$$\bar{v} = \mathrm{col}\,(((v_k^{(l)} \in R^{M_k^{(l)}},\ v_{0k}^{(l)} \in R^{M_{0k}^{(l)}},\ v_{\Gamma k}^{(l)} \in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}}),\ k = \overline{1, 2}),\ l = \overline{1, 2})$$

и

$$P_2 = \int\limits_{(\cdot)} A^T(s) A(s) ds = [P_{ij}]_{i,j=1}^{i,j=12},\ \ A_w = \int\limits_{(\cdot)} A^T(s) \overline{W}(s) ds = \mathrm{col}\,(A_{wi},\ i = \overline{1, 12})\,.$$

Отсюда

$$\bar{q}_k^{(l)} \in \Omega_k^{(l)} = \{q \in R^{M_k^{(l)}} : q = Q_{1k}^{(l)} A_w + v_k^{(l)} - Q_{1k}^{(l)} P_2 \bar{v}\ \ \forall v_k^{(l)} \in R^{M_k^{(l)}}\}, \tag{30}$$

$$\bar{q}_{0k}^{(l)} \in \Omega_{0k}^{(l)} = \{q \in R^{M_{0k}^{(l)}} : q = Q_{2k}^{(l)} A_w + v_{0k}^{(l)} - Q_{2k}^{(l)} P_2 \bar{v}\ \ \forall v_{0k}^{(l)} \in R^{M_{0k}^{(l)}}\}, \tag{31}$$

$$\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} \in \Omega_{\Gamma k}^{(l)} = \{q \in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}} : q =$$

$$= Q_{3k}^{(l)} A_w + v_{\Gamma k}^{(l)} - Q_{3k}^{(l)} P_2 \bar{v}\ \ \forall v_{\Gamma k}^{(l)} \in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}}\}\ \ (k, l = \overline{1, 2}), \tag{32}$$

где $P_2^{+} = \mathrm{col}\,(((Q_{ik}^{(l)},\ i = \overline{1, 3}),\ k = \overline{1, 2}),\ l = \overline{1, 2})$ — матрица, псевдообратная к P_2, а символ $(\cdot)$ означает, что интегрирование ведется по области определения подынтегральной функции. Решение (30)–(32) будет однозначным ($\bar{v} \equiv 0$), если

$$\det P_2 > 0. \tag{33}$$

Точность псевдообращения системы (28) определяет и точность решения рассматриваемой задачи. При этом

$$\min_{w(s)}\left[\sum_{r=1}^{R_0}\int_{\Sigma_0}(L_r^0(\partial_t)w(s)|_{t=0}-W_r^0(\sigma))^2 d\sigma+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int_{\Sigma_\Gamma}(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)-W_\rho^\Gamma(s))^2 ds+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{I}\int_{\Sigma}(L_i(\partial_s)w(s)-W_i(s))^2 ds\right]=\min_{\bar{q}}\left\|\int_{(\cdot)}(A(s)\bar{q}-\bar{W}(s))ds\right\|^2=$$

$$=\int_{\Sigma}(W(s))^T W(s)ds+\int_{\Sigma_0}(W^0(\sigma))^T W^0(\sigma)d\sigma+\int_{\Sigma_\Gamma}(W^\Gamma(s))^T W^\Gamma(s)ds-A_w^T P_2^+ A_w.$$

К среднеквадратическому, такому, чтобы $\left\|\int_{(\cdot)}(A(s)\bar{q}-\bar{W}(s))ds\right\|^2\to\min_{\bar{q}}$, обращению системы (28) сводится и решение задачи по управлению динамикой рассматриваемой плиты посредством значений $q_{km}^{(l)}$ $(m=\overline{1,M_k^{(l)}})$ функций $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$, а также функций $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1,R_0})$ начальных факторов, функций $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ краевых факторов, функций $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ начально-краевых возмущающих факторов, что эквивалентно решению задачи (29) при Φ_1, определенном согласно формулам (22)–(24) соответственно. При этом для первого варианта управления

$$\bar{W}(s)=\begin{pmatrix}W(s), & s\in\Sigma\\ W^\Gamma(s), & s\in\Sigma_\Gamma\end{pmatrix},$$

$$A(s)=\mathrm{str}\left(\left(\begin{pmatrix}\mathrm{str}\,((A_{k1j}^{(l)}(s),s\in\Sigma),\ j=\overline{1,3})\\ \mathrm{str}((A_{k3j}^{(l)}(s),s\in\Sigma_\Gamma),\ j=\overline{1,3})\end{pmatrix},\ k=\overline{1,2},\right),l=\overline{1,2}\right),\tag{34}$$

для второго варианта

$$\bar{W}(s)=\begin{pmatrix}W(s), & s\in\Sigma\\ W^0(\sigma), & \sigma\in\Sigma_0\end{pmatrix},$$

$$A(s)=\mathrm{str}\left(\left(\begin{pmatrix}\mathrm{str}\,((A_{k1j}^{(l)}(s),s\in\Sigma),\ j=\overline{1,3})\\ \mathrm{str}\,((A_{k2j}^{(l)}(\sigma),\sigma\in\Sigma_0),\ j=\overline{1,3})\end{pmatrix},\ k=\overline{1,2}),\right),l=\overline{1,2})\right),\tag{35}$$

для третьего —

$$\bar{W}(s)=(W(s),s\in\Sigma),$$

$$A(s)=\mathrm{str}\,((((A_{k1j}^{(l)}(s),s\in\Sigma),\ j=\overline{1,3}),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2}).\tag{36}$$

Соотношение (30) с определенными согласно (34)–(36) векторной и матричной функциями $\bar{W}(s)$, $A(s)$ дает аналитическое выражение для вектора $\bar{q}_k^{(l)}$ $(k,l=\overline{1,2})$ значений $q_{km}^{(l)}$ $(m=\overline{1,M_k^{(l)}})$ $(k,l=\overline{1,2})$ функции управляющих поверхностных динамических возмущений $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$. Выражения (30)–(32) для компонент $\bar{q}_k^{(l)}$, $\bar{q}_{0k}^{(l)}$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k,l=\overline{1,2})$ управляюще-моделирующего вектора $\bar{q}$ соотношениями (1), (15), (19) определяют функцию $w(s)$ смещений точек плиты, а следовательно, и функций $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ начально-краевых управляющих возмущений, соответствующих решению рассматриваемых задач. Условия точности и однозначности полученных решений определим соотношениями (27), (33), записанными с учетом обозначений (34)–(36) соответствующей задачи.

С помощью соотношений (7), (8) через функцию $w(s)$ определяются начально-краевые управляющие воздействия и для задач динамики рассматриваемой плиты при известных функциях $q_k^{\pm}(\xi)$ поверхностных динамических усилий. Векторы $\bar{q}_{0k}^{(l)}$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ значений моделирующих функций $q_{0k}^{(l)}(\xi)$ и $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$, используемые в (19) и являющиеся решениями задачи (26) при $i=1$, определим соотношениями (31), (32), где в отличие от (34)–(36) имеем

$$\overline{W}(s)=\begin{pmatrix}\widetilde{W}(s), & s\in\Sigma\\ \widetilde{W}^{\Gamma}(s), & s\in\Sigma_{\Gamma}\end{pmatrix},$$

$$A(s)=\operatorname{str}\left(\left(\left(\begin{matrix}(A_{k12}^{(l)}(s),\, s\in\Sigma) & (A_{k13}^{(l)}(s),\, s\in\Sigma)\\ (A_{k32}^{(l)}(s),\, s\in\Sigma_{\Gamma}) & (A_{k33}^{(l)}(s),\, s\in\Sigma_{\Gamma})\end{matrix}\right),\ k=\overline{1,2}\right),\ l=\overline{1,2}\right),\quad (37)$$

$$\overline{W}(s)=\begin{pmatrix}\widetilde{W}(s), & s\in\Sigma\\ \widetilde{W}^{0}(\sigma), & \sigma\in\Sigma_{0}\end{pmatrix},$$

$$A(s)=\operatorname{str}\left(\left(\left(\begin{matrix}(A_{k12}^{(l)}(s), s\in\Sigma) & (A_{k13}^{(l)}(s), s\in\Sigma)\\ (A_{k22}^{(l)}(\sigma), \sigma\in\Sigma_{0}) & (A_{k23}^{(l)}(\sigma), \sigma\in\Sigma_{0})\end{matrix}\right), k=\overline{1,2}\right), l=\overline{1,2}\right),\quad (38)$$

$$\overline{W}(s)=(\widetilde{W}(s), s\in\Sigma),$$

$$A(s)=\operatorname{str}\,((((A_{k12}^{(l)}(s), s\in\Sigma), (A_{k13}^{(l)}(s), s\in\Sigma)),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2})\qquad (39)$$

при

$$\widetilde{W}(s)=\operatorname{col}\,(\overline{W}_i(s),\, i=\overline{1,I}),\ \overline{W}_i(s)=W_i(s)-L_i(\partial_s)w_\infty(s)\ \ (i=\overline{1,I}),$$

$$\widetilde{W}^0(\sigma)=\operatorname{col}\,(\overline{W}_r^{\,0}(\sigma),\, r=\overline{1,R_0}),\ \overline{W}_r^{\,0}(\sigma)=W_r^0(\sigma)-L_r^0(\partial_t)w_\infty(s)_{|t=0}\ \ (r=\overline{1,R_0}),$$

$$\widetilde{W}^{\Gamma}(s)=\operatorname{col}\,(\overline{W}_\rho^{\,\Gamma}(s),\, \rho=\overline{1,R_\Gamma}),\ \overline{W}_\rho^{\,\Gamma}(s)=W_\rho^{\Gamma}(s)-L_\rho^{\Gamma}(\partial_\sigma)w_\infty(s)\ \ (\rho=\overline{1,R_\Gamma})$$

и $w_\infty(s)=\sum\limits_{k,l=1}^{2} w_{\infty k}^{(l)}(s)$ для случаев, когда управление динамикой плиты выполняется начальными, краевыми и начально-краевыми внешнединамическими воздействиями соответственно.

С учетом упрощений (37)–(39) в системе (28) условие (33) определяет однозначность решения рассматриваемых задач. Точность их решения, определяемая минимумом значений соответствующим образом выбранных Φ_i $(i=\overline{1,2})$, как и выше, определяется соотношением

$$\min_{w(s)}\Phi_i=\min_{\bar{q}}\left\|\int_{(\cdot)}(A(s)\bar{q}-\overline{W}(s))ds\right\|^2.$$

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ НЕОГРАНИЧЕННЫХ УПРУГИХ ПЛИТ

Рассмотрим особенности постановок и решений приведенных задач по управлению динамикой толстых упругих плит по достижении состояния (11) для случая, когда влиянием краевых возмущений $W_\rho^{\Gamma}(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ (см. (8)) на функцию $w(s)$ состояния плиты можно пренебречь. Рассматривая исследуемую плиту как толстый упругий слой толщины $2h$, построим решение задач по определению управляющих факторов $\bar{q}_k^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2})$, $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$, каждого отдельно и в комплексе, согласно критерию

$$\Phi_1 \to \min_{w(s)} \tag{40}$$

при Φ_1, определенном согласно (23), если управление выполняется дискретными значениями $q_{km}^{(l)}$ $(m = \overline{1, M_k^{(l)}})$ функций $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ поверхностных динамических нагрузок, и определенном согласно (24), если управление выполняется функциями $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$ начальных внешнединамических возмущений совместно с дискретными значениями функций $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ или без них. Заметим, что функции $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$ и $W_i(s)$ $(i = \overline{1, I})$ в (23), (24) определены согласно (7) и (11) соответственно.

Решение задачи (40), (23) по определению вектора $\bar{q}_k^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2})$ значений управляющих функций $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ при известных $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $W_i(s)$ $(i = \overline{1, I})$, как и в (13), сведется к среднеквадратическому обращению системы функциональных уравнений (28), в которой

$$\bar{q} = \mathrm{col}\,(((\bar{q}_k^{(l)}, \bar{q}_{0k}^{(l)}),\ k = \overline{1,2}),\ l = \overline{1,2}),$$

$$\overline{W}(s) = \begin{pmatrix} W(s), & s \in \Sigma \\ W^0(\sigma), & \sigma \in \Sigma_0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$A(s) = \mathrm{str}\left(\left(\begin{pmatrix} (A_{k11}^{(l)}(s), s \in \Sigma) & (A_{k12}^{(l)}(s), s \in \Sigma) \\ (A_{k21}^{(l)}(\sigma), \sigma \in \Sigma_0) & (A_{k22}^{(l)}(\sigma), \sigma \in \Sigma_0) \end{pmatrix}, k = \overline{1,2}\right), l = \overline{1,2}\right).$$

Решением системы (28), записанной с учетом (41), при котором

$$\left\| \int_{(\cdot)} (A(s)\bar{q} - \overline{W}(s))ds \right\|^2 \to \min_{\bar{q}}, \tag{42}$$

будет [12, 13]

$$\bar{q} \in \Omega_q = \{q : q = P_2^+ A_w + \bar{v} - P_2^+ P_2 \bar{v}\} \tag{43}$$

при произвольном

$$\bar{v} = \mathrm{col}\,(((v_k^{(l)} \in R^{M_k^{(l)}},\ v_{0k}^{(l)} \in R^{M_{0k}^{(l)}}),\ k = \overline{1,2}),\ l = \overline{1,2}),$$

псевдообратной к $P_2 = \int_{(\cdot)} A^T(s)A(s)ds = [P_{ij}]_{i,j=1}^{i,j=8}$ матрице

$$P_2^+ = \mathrm{col}\,(((Q_{ik}^{(l)},\ i = \overline{1,2}),\ k = \overline{1,2}),\ l = \overline{1,2})$$

и

$$A_w = \int_{(\cdot)} A^T(s)\overline{W}(s)ds = \mathrm{col}\,(A_{wi},\ i = \overline{1,8}).$$

Заметим, что, как и выше, интегрирование здесь выполняется по области изменения аргумента s, $\bar{v} \equiv 0$ при $\det P_2 > 0$, а при определенном в (23) Φ_1 имеем

$$\varepsilon^2 = \min_{w(s)} \Phi_1 = \min_{\bar{q}} \left\| \int_{(\cdot)} (A(s)\bar{q} - \overline{W}(s))ds \right\|^2 =$$

$$= \int_{\Sigma} (W(s))^T W(s)ds + \int_{\Sigma_0} (W^0(\sigma))^T W^0(\sigma)d\sigma - A_w^T P_2^+ A_w. \quad (44)$$

Выражения для векторов $\bar{q}_k^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2})$ значений управляющих функций $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ рассматриваемой задачи получим из (43). При этом

$$\bar{q}_k^{(l)} \in \Omega_k^{(l)} = \left\{ q \in R^{M_k^{(l)}} : q = Q_{1k}^{(l)} A_w + v_k^{(l)} - Q_{1k}^{(l)} P_2 \bar{v} \;\; \forall v_k^{(l)} \in R^{M_k^{(l)}} \right\}. \quad (45)$$

Соотношением

$$\bar{q}_{0k}^{(l)} \in \Omega_{0k}^{(l)} = \left\{ q \in R^{M_{0k}^{(l)}} : q = Q_{2k}^{(l)} A_w + v_{0k}^{(l)} - Q_{2k}^{(l)} P_2 \bar{v} \;\; \forall v_{0k}^{(l)} \in R^{M_{0k}^{(l)}} \right\}, \quad (46)$$

записанным согласно (43), определяются и векторы значений моделирующих функций $q_{0k}^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$, которые могут быть полезны при построении зависимости (1) смещений $w(s)$. Заметим, что при этом $w_{\Gamma k}^{(l)}(s) \equiv 0$ $(k, l = \overline{1,2})$.

Для случая, когда управление динамикой бесконечной в плане упругой плиты выполняется векторами $\bar{q}_k^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2})$ значений функций $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ поверхностно распределенных усилий совместно с функциями $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$ начальных внешнединамических возмущений, разрешающая система функциональных уравнений (28) еще более упростится, поскольку теперь

$$\overline{W}(s) = (W(s), s \in \Sigma),$$

$$A(s) = \mathrm{str}\,((((A_{k11}^{(l)}(s), s \in \Sigma), (A_{k12}^{(l)}(s), s \in \Sigma)),\ k = \overline{1,2}),\ l = \overline{1,2}). \quad (47)$$

С учетом (47) упрощаются и выражения (45) для определения векторов $\bar{q}_k^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2})$ значений управляющих воздействий $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$, а следовательно, и $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k = \overline{1,2})$. Функции $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$, разрешающие задачу (40), получим из соотношения (7) после подстановки в него функции (1), в которой при определенных в (19) $w_{\infty k}^{(l)}(s)$ и $w_{0k}^{(l)}(s)$ $(k, l = \overline{1,2})$ имеем

$$w_k^{(l)}(s) = w_{\infty k}^{(l)}(s) + w_{0k}^{(l)}(s) \;\; (k, l = \overline{1,2}). \quad (48)$$

Точность и однозначность полученного при этом решения задачи определяется соотношениями (44) и (33), записанными с учетом (47) при Φ_1, приведенном в (22).

Дальнейшим упрощением рассматриваемой задачи является случай, когда управление плитой (слоем) выполняется функциями $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$ при известных поверхностных нагрузках $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k = \overline{1,2})$. Эти функции получим после подстановки выражений (1) и (48) в (7) при векторах $\bar{q}_{0k}^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2})$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{I} \int_{\Sigma} (L_i(\partial_s) w(s) - W_i(s))^2 ds \to \min_{\bar{q}_{0k}^{(l)} (k, l = \overline{1,2})}. \quad (49)$$

Решение задачи (49) сведется к среднеквадратическому обращению системы (28), в которой

$$\bar{q} = \mathrm{col}\,((\bar{q}_{0k}^{(l)},\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2})\,,$$

$$A(s) = \mathrm{str}\,(((A_{k12}^{(l)}(s),\ s\in\Sigma),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2})\,, \tag{50}$$

$$\overline{W}(s) = (\widetilde{W}(s),\ s\in\Sigma)\,.$$

При этом компоненты $\bar{q}_{0k}^{(l)}$ $(k,l=\overline{1,2})$ вектора $\bar{q}$ определяются согласно (46) при

$$\bar{v} = \mathrm{col}\,((v_{0k}^{(l)} \in R^{M_{0k}^{(l)}},\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2}),$$

$$A_w = \int_{(\cdot)} A^T(s)\widetilde{W}(s)ds = \mathrm{col}\,(A_{wi},\ i=\overline{1,4})$$

и $P_2^+ = \mathrm{col}\,(Q_{2k}^{(l)},\ k,l=\overline{1,2})$ — матрице, псевдообратной к $P_2 = \int_{(\cdot)} A^T(s)A(s)ds =$ $= [P_{ij}]_{i,j=1}^{i,j=4}$. Заметим, что $\bar{v}\equiv 0$ при $\det P_2 > 0$, а точность решения задачи (49) по достижении функцией $w(s)$ состояния $W_i(s)$ $(i=\overline{1,I})$ определяется величиной

$$\varepsilon^2 = \min_{w(s)}\left[\sum_{i=1}^{I}\int_{\Sigma}(L_i(\partial_s)w(s)-W_i(s))^2\,ds\right] = \min_{\bar{q}}\left\|\int_{(\cdot)}(A(s)\bar{q}-\overline{W}(s))ds\right\|^2 =$$

$$= \int_{\Sigma}(\widetilde{W}(s))^T\,\widetilde{W}(s)ds - A_w^T P_2^+ A_w. \tag{51}$$

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ УПРУГИХ ПЛИТ, СВОБОДНЫХ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Близкими к рассмотренным задачам являются задачи управления установившейся (начальные возмущения отсутствуют) динамикой наблюдаемой согласно (8) упругой плиты конечных размеров, функция $w(s)$ состояния которой согласно критерию (40) должна достигать определенного соотношением (11) желаемого состояния $W_i(s)$ $(i=\overline{1,I})$. При этом Φ_1 выбирается в виде (22), если управление выполняется поверхностными динамическими нагрузками $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$, и в виде (24), если управляющими являются функции краевых возмущающих факторов $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ совместно с функциями $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$ или без них.

Как и выше, разрешающими для этих задач будут функциональные уравнения (28), в которых:

а) при управлении посредством внешнединамических поверхностно распределенных нагрузок $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$

$$\bar{q} = \mathrm{col}\,(((\bar{q}_k^{(l)}, \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2}),$$

$$\overline{W}(s) = \begin{pmatrix} W(s), & s\in\Sigma \\ W^\Gamma(s), & s\in\Sigma_\Gamma \end{pmatrix}, \tag{52}$$

$$A(s) = \mathrm{str}\left(\left(\begin{pmatrix} (A_{k11}^{(l)}(s),\ s\in\Sigma) & (A_{k13}^{(l)}(s),\ s\in\Sigma) \\ (A_{k31}^{(l)}(s),\ s\in\Sigma_\Gamma) & (A_{k33}^{(l)}(s),\ s\in\Sigma_\Gamma) \end{pmatrix}, k=\overline{1,2},\right),\ l=\overline{1,2}\right);$$

б) при управлении посредством нагрузок $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$, действующих совместно с функциями внешнединамических краевых возмущений $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$,

$$\bar{q}=\operatorname{col}(((\bar{q}_k^{(l)},\ \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2}),$$

$$\overline{W}(s)=(W(s),\ s\in\Sigma), \qquad (53)$$

$$A(s)=\operatorname{str}((((A_{k11}^{(l)}(s),\ s\in\Sigma),\ (A_{k13}^{(l)}(s),\ s\in\Sigma)),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2});$$

в) при управлении через краевые возмущающие факторы $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ (нагрузки $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$ известны)

$$\bar{q}=\operatorname{col}((\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)},\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2}),$$

$$\overline{W}(s)=(\widetilde{W}(s),\ s\in\Sigma), \qquad (54)$$

$$A(s)=\operatorname{str}(((A_{k13}^{(l)}(s),\ s\in\Sigma),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2}).$$

Решением уравнений (28), найденным согласно (42), для указанных случаев будет соотношение (43), в котором матрица P_2 и вектор A_w определены с учетом (52)–(54),

$$\bar{v}=\operatorname{col}(((v_k^{(l)}\in R^{M_k^{(l)}},\ v_{\Gamma k}^{(l)}\in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}}),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2})$$

для первых двух случаев,

$$\bar{v}=\operatorname{col}((v_{\Gamma k}^{(l)}\in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}},\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2})$$

для третьего случая. Как и выше, $\bar{v}\equiv 0$, если $\det P_2>0$. Среднеквадратическая точность $\varepsilon^2=\min\limits_{\bar{q}}\left\|\int\limits_{(\cdot)}(A(s)\bar{q}-\overline{W}(s))ds\right\|^2$ решения этих уравнений определяется величинами

$$\varepsilon^2=\int\limits_{\Sigma}(W(s))^T W(s)ds+\int\limits_{\Sigma_\Gamma}(W^\Gamma(s))^T W^\Gamma(s)\,d\sigma-A_w^T P_2^+ A_w,$$

$$\varepsilon^2=\int\limits_{\Sigma}(W(s))^T W(s)ds-A_w^T P_2^+ A_w,$$

$$\varepsilon^2=\int\limits_{\Sigma}(\widetilde{W}(s))^T \widetilde{W}(s)ds-A_w^T P_2^+ A_w$$

для каждого из рассмотренных случаев. При этом

$$w_k^{(l)}(s)=w_{\infty k}^{(l)}(s)+w_{\Gamma k}^{(l)}(s)\ \ (k, l=\overline{1,2}), \qquad (55)$$

где $w_{\infty k}^{(l)}(s)$ и $w_{\Gamma k}^{(l)}(s)$ $(k, l=\overline{1,2})$ соотношениями (19) определяются через найденные согласно (52)–(54) векторы $\bar{q}_k^{(l)}$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k, l=\overline{1,2})$. Управляющие краевые возмущающие факторы $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$, которые определены соотношением (8) и имеют место в задачах б) и в), получим после подстановки (55) в (8).

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ УПРУГИХ ПЛИТ, НЕ НАБЛЮДАЕМЫХ ПО НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Рассмотренные задачи по управлению динамикой конечных и бесконечных толстых упругих плит, возмущенных и невозмущенных начально-краевыми внешнединамическими воздействиями, решались без ограничений на количество R_0 и R_Γ наблюдений (7), (8) за этими воздействиями. Возможен, очевидно, случай, когда имеющиеся начально-краевые возмущения не наблюдаются вообще. В таком варианте в разрешающих уравнениях (28), из которых согласно (30)–(32) находятся векторы $\bar{q}_k^{(l)}$, $\bar{q}_{0k}^{(l)}$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2})$ значений управляюще-моделирующих функций $q_k^{(l)}(\xi)$, $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$, имеют место следующие упрощения:

— для задач с ненаблюдаемым начальным состоянием (7) функции $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$ в определении вектор-функции $\overline{W}(s)$ и блоки $A_{k2j}^{(l)}(s)$ $(k, l = \overline{1,2},\ j = \overline{1,3})$ в матричной функции $A(s)$ отсутствуют;

— для задач с ненаблюдаемым краевым состоянием (8) функции $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ и блоки $A_{k3j}^{(l)}(s)$ $(k, l = \overline{1,2},\ j = \overline{1,3})$ векторной и матричной функций $\overline{W}(s)$ и $A(s)$ отсутствуют.

С учетом этих особенностей легко можно записать все разрешающие соотношения рассмотренных выше задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе решены сложные задачи исследования динамики одного из наиболее распространенных объектов механики твердого деформируемого тела — толстой упругой плиты произвольной конфигурации, загруженной нормально и касательно определенными поверхностными динамическими усилиями. Задачи поставлены и решены на основе полутрехмерной теории изгиба упругих плит, трехмерное поле поперечных динамических смещений точек которых описано двухмерными дифференциальными уравнениями бесконечно высокого порядка. Частным случаем этих уравнений являются классические дифференциальные уравнения, построенные на гипотезе Кирхгофа–Лява, а также их уточнения, полученные на базе различных упруго-динамических моделей деформирования. В данной статье исследование динамического поля поперечных смещений плиты ведется с удержанием всех членов дифференциальной математической модели ее динамики. Трудности полного и корректного задания, требуемого математической моделью, начально-краевых условий функционирования плиты эффективно преодолены при среднеквадратическом согласовании с ними точных математических решений сложных дифференциальных уравнений. Предложенный в работе подход позволил без ограничений на количество ограничить и качество начально-краевых наблюдений за состоянием плиты. Они могут быть определены во всей пространственной области плиты и на всей ее границе, заданы только в части этой области и части границы, иметь дискретный характер. Рассмотрены решения задачи целенаправленного управления динамикой плиты, прямые задачи эластодинамики которой описаны в [11]. Цель управления — среднеквадратическое согласование поля поперечных динамических смещений плиты с непрерывно (далее и дискретно) заданным желаемым состоянием. Управляющими факторами в рассмотренных задачах выступают поверхностно распределенные внешнединамические усилия, начальные и краевые возмущающие воздействия, используемые отдельно, попарно и в комплексе. В работе описаны особенности решения задач управления для случаев динамики неограниченного в плане упругого слоя и установившейся динамики плит конечных размеров. Все задачи доведены до аналитических решений. Установлена оценка точности таких решений, а с учетом неполноты исходных данных в постановке задачи сформулированы и условия их однозначности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955. — 370 с.
2. Сергиенко И.В., Скопецький В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — К.: Наук. думка, 1991. — 432 с.
3. Тимошенко С.П., Войновський-Кригер С. Пластины и оболочки. — М.: Физматлит, 1966. — 635 с.
4. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Том 5: Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — М.: ВИНИТИ, 1973. — 272 с.
5. Григоренко Я.М., Савула Я.Г., Муха И.С. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного решения // Приклад. механика. — 2000. — **36**, № 8. — С. 3–27.
6. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. — К.: Академпериодика, 2006. — 472 с.
7. Немиш Ю.Н., Хома И.Ю. Напряженно-деформируемое состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория (Обзор) // Приклад. механика. — 1993. — **29**, № 11. — С. 3–34.
8. Стоян В.А. Об алгоритме построения полутрехмерных дифференциальных уравнений эластодинамики толстых плит // Там же. — 1976. — **12**, № 7. — С. 39–44.
9. Стоян В.А., Двирничук К.В. К построению дифференциальной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 4. — С. 74–83.
10. Стоян В.А., Двирничук К.В. Об интегральной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Там же. — 2013. — № 1. — С. 70–82.
11. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании трехмерного поля поперечных динамических смещений толстых упругих плит // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 6. — С. 58–72.
12. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. — К.: Наук. думка, 2002. — 361 с.
13. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2011. — 310 с.
14. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 3. — С. 90–104.
15. Стоян В.А., Двірничук К.В. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей // Доп. НАН України. — 2012. — № 9. — С. 36–43.
16. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І. Теорія функцій комплексної змінної. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2009. — 495 с.

Поступила 10.04.2013