УДК 519.8

Т.Т. ЛЕБЕДЕВА, Н.В. СЕМЕНОВА, Т.И. СЕРГИЕНКО

КАЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С РАЗЛИЧНЫМИ ПРИНЦИПАМИ ОПТИМАЛЬНОСТИ[1]

Аннотация. Предложен подход к исследованию устойчивости относительно возмущений исходных данных векторной задачи целочисленной оптимизации при использовании различных принципов оптимальности (по Парето, Слейтеру и Смейлу). Изучены свойства оптимальных и неоптимальных решений задачи с точки зрения устойчивости их принадлежности множествам оптимальных и неоптимальных решений соответственно.

Ключевые слова: многокритериальная дискретная оптимизация, векторный критерий, квадратичные функции, устойчивость, возмущения исходных данных.

В настоящее время интерес к исследованию проблем корректности многокритериальных дискретных моделей в значительной мере обусловлен их широким применением для решения важных задач экономики, управления, экологии, проектирования различных сложных систем, для принятия решений в условиях неопределенности и др. Существует достаточно много оптимизационных задач, в том числе дискретных, для которых сколь угодно малые ошибки в исходных данных порождают значительные искажения искомых решений. В связи с этим особенно важно выделить такие классы задач, в которых малым изменениям исходных данных соответствуют малые изменения результатов их решения.

При проверке корректности некоторой математической модели, применяемой при решении конкретной оптимизационной задачи, важно, в первую очередь, определить границы допустимых вариаций исходных значений параметров модели, при которых не изменяется (или незначительно изменяется) результат решения оптимизационной задачи. На основе исследования пространства исходных данных задачи появляется возможность построить эффективный алгоритм ее решения, позволяющий, кроме того, отыскать решения для семейства задач, исходные данные которых незначительно отличаются между собой.

Важное место в исследованиях, осуществляемых в последние десятилетия специалистами в области дискретной оптимизации, в том числе научными сотрудниками Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, занимает проблема устойчивости многокритериальных (векторных) задач [1–10]. Неослабевающее внимание к этой проблеме в значительной степени объясняется необходимостью при решении многих прикладных задач, которые можно формализовать с помощью дискретных оптимизационных моделей, учитывать факторы неопределенности и случайности, связанные с неточностью исходной информации, несоответствием математических моделей реальным процессам, ошибками округления, погрешностями вычислений и др.

Исследования вопросов устойчивости векторных задач дискретной оптимизации в настоящее время осуществляются, в основном, в двух направлениях. Первое ориентировано на получение результатов «качественного» характера, а именно на определение и исследование условий, при которых множеству оптимальных решений (множеству Парето, Слейтера или Смейла) присуще то или иное свойство, характеризующее определенным образом устойчивость задачи

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (Проект Ф 54.1/039)

к малым возмущениям исходных данных. Второй известный подход направлен на получение и изучение количественных характеристик допустимых возмущений в исходных данных задачи, в частности, радиуса устойчивости [11–15].

Исследования, проведенные специалистами Института кибернетики, в основном принадлежат к первому направлению. Были рассмотрены пять типов устойчивости векторных задач целочисленной оптимизации с различными принципами оптимальности. Изучена проблема регуляризации неустойчивых задач. Выяснена взаимосвязь устойчивости задачи векторной целочисленной оптимизации на конечном множестве допустимых решений с устойчивостью ее оптимальных и неоптимальных решений. Определены понятия, на основании которых описаны разные типы устойчивости задачи, соответствующие различным степеням детализации в описании ситуации, когда достаточно малым возмущениям исходных данных соответствуют достаточно малые изменения результатов решения. Сформулированы необходимые и достаточные условия устойчивости пяти типов, проведен их сравнительный анализ. Полученные результаты касаются устойчивости не только относительно возмущений всех исходных данных задачи, но и возмущений исходных данных, необходимых для описания либо ее векторного критерия, либо ограничений, что является важным, поскольку задача, устойчивая к возмущениям некоторой части своих исходных данных, может быть неустойчивой относительно возмущений другой их части.

Опишем полученные результаты, которые легли в основу единого подхода к исследованию различных типов устойчивости векторных задач целочисленной оптимизации при использовании принципов оптимальности по Парето, Смейлу и Слейтеру.

Рассмотрим задачу векторной целочисленной оптимизации

$$Z(M(F, X)) \colon \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

которая состоит в поиске элементов некоторого множества оптимальных решений $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} = \{Sl(F, X), P(F, X), Sm(F, X)\}$, $P(F, X)$ — множество Парето-оптимальных (эффективных) решений задачи; $Sl(F, X)$ — множество оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений; $Sm(F, X)$ — множество оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений [16, 17]; $M(F, X) = \{x \in X \mid \omega(x, M(F, X)) = \varnothing\}$, $\omega(x, P(F, X)) = \{z \in X \mid F(z) \ge F(x),\ F(z) \ne F(x)\}$, $\omega(x, Sl(F, X)) = \{z \in X \mid F(z) > F(x)\}$, $\omega(x, Sm(F, X)) = \{z \in X \mid z \ne x, F(z) \ge F(x)\}$; $F = (f_1, f_2, \ldots, f_\ell)$ — векторный критерий; $f_i \colon R^n \to R^1$, $i \in N_\ell$, — частные критерии; $N_\ell = \{1, \ldots, \ell\}$, ℓ — количество частных критериев, $\ell \ge 2$; $X \subset Z^n$, Z^n — множество всех целочисленных векторов в R^n, $2 \le |X| < \infty$. Очевидно, что $Sm(F, X) \subset P(F, X) \subset Sl(F, X)$. В силу конечности допустимой области X множество $P(F, X)$ не является пустым, откуда следует, что задачи $Z(P(F, X))$ и $Z(Sl(F, X))$ всегда разрешимы.

Обозначим U — пространство всех исходных данных задачи $Z(M(F, X))$. Его можно представить как декартово произведение $U = U_1 \times U_2$ пространства U_1 исходных данных, используемых для описания векторного критерия F, и пространства U_2 тех исходных данных, с помощью которых описывают ограничения, задающие допустимое множество X.

Пусть $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $u = (u_1, u_2) \in U$ — набор исходных данных задачи $Z(M(F, X))$. Например, если частные критерии задачи являются квадратичными функциями $f_i(x) = \langle D_i x, x\rangle + \langle c_i, x\rangle$, $i \in N_\ell$, то полагаем $u_1 = (D, C) \in U_1 = R^{n \times n \times \ell} \times R^{\ell \times n}$, где $D = (D_1, \ldots, D_\ell) \in R^{n \times n \times \ell}$, $D_i \in R^{n \times n}$, $C = [c_{ij}] \in R^{\ell \times n}$, $c_i = (c_{i1}, \ldots, c_{in}) \in R^n$. В случае, когда допустимая область X — непустое конечное множество вида

$$X_G = G(Q, p, h) \cap Z^n, \tag{1}$$

где $G = G(Q, p, h) = \{x \in R^n \mid g_i(x) \le 0, i \in N_m\}$ — выпуклое множество, $g_i(x) = \langle Q_i x, x\rangle + \langle p_i, x\rangle + h_i$, $p_i \in R^n$, $h_i \in R$, $Q_i \in R^{n \times n}$ — симметричная неотрицательно определенная матрица, $i \in N_m$, $Q = (Q_1, \ldots, Q_m) \in R^{n \times n \times m}$, $p = (p_1, \ldots, p_m) \in R^{n \times m}$, $h = (h_1, \ldots, h_m) \in R^m$, то полагаем $u_2 = (Q, p, h) \in U_2 = R^{m \times m \times n} \times R^{m \times n} \times R^m$.

При исследовании устойчивости задачи $Z(M(F, X))$ относительно возмущений ее исходных данных были рассмотрены три возможных варианта учета возмущений:

1) учитываются только возмущения в исходных данных u_1, необходимых для описания векторного критерия;

2) принимаются во внимание возмущения только в исходных данных u_2, используемых для описания ограничений задачи;

3) рассматриваются возмущения во всех исходных данных $u = (u_1, u_2)$, используемых для описания задачи.

Далее термины «устойчивость», «устойчивая задача», «устойчиво принадлежит» применяем при всех трех вариантах учета возмущений в исходных данных. При необходимости выделить вариант 1 будем пользоваться термином «устойчивость по векторному критерию», а для варианта 2 — термином «устойчивость по ограничениям».

Для набора $u = (u_1, u_2) \in U$ исходных данных задачи $Z(M(F, X))$ и некоторого числа $\delta > 0$ определим множество $O_\delta(u)$ возмущенных исходных данных, воспользовавшись одной из следующих формул:

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) \in O_\delta(u_1), u_2(\delta) = u_2\},$$

если учитываются возмущения исходных данных только для векторного критерия;

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) = u_1, u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)\},$$

если рассматриваются только возмущения исходных данных в ограничениях;

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) \in O_\delta(u_1), u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)\},$$

если речь идет о возмущении всего набора исходных данных задачи. Здесь и далее $O_\delta(u_i) = \{u_i(\delta) \in U_i \mid \| u_i(\delta) - u_i \|_i < \delta\}$, где $\|\cdot\|_i$ — норма в пространстве U_i, $i = 1, 2$.

Обозначим $F_{u_1(\delta)}$ и $X_{u_2(\delta)}$ соответственно векторный критерий и допустимую область возмущенной задачи $Z(M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}))$, полученной из задачи $Z(M(F, X))$ в результате возмущений ее исходных данных $u = (u_1, u_2)$ и замене их набором $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$.

Отметим, что при исследовании математических моделей, применяемых для изучения реальных явлений и процессов, существенным является тот факт, что значения параметров этих моделей, получаемые обычно на основе статистических данных или в результате эксперимента, задаются в большинстве случаев лишь приблизительно, с определенной точностью. Поэтому если некоторая применяемая модель имеет вид оптимизационной задачи $Z(M(F, X))$ с исходными данными $u = (u_1, u_2)$, то, возможно, существует задача $Z(M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}))$ с близкими значениями исходных данных $(u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$, где δ — достаточно малое положительное число, которая более точно описывает изучаемое явление или процесс. В связи с этим вопросы взаимосвязи множеств оптимальних решений этих задач важны и особенно актуальны с точки зрения практических приложений.

Рассмотрим пять типов устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, по-разному описывающих ситуацию, при которой малым изменениям исходных данных задачи соответствуют малые изменения результатов ее решения:

— задача T_1-устойчива, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$: $M(F, X) \cap M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \neq \varnothing$;

— задача T_2-устойчива, если $\exists \delta > 0$ и $\exists x \in M(F, X)$ такие, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$: $x \in M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$;

— задача T_3-устойчива, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$: $M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subset M(F, X)$;

— задача T_4-устойчива, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$: $M(F, X) \subset M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$;

— задача T_5-устойчива, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$: $M(F, X) = M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Очевидно, что из T_i-устойчивости ($i \in \{1, \ldots, 5\}$) относительно возмущений всего набора исходных данных задачи следует ее T_i-устойчивость (т.е. устойчивость того же типа) относительно возмущений исходных данных для векторного критерия и T_i-устойчивость относительно возмущений исходных данных, используемых для описания ограничений. В общем случае обратное утверждение ошибочно.

При исследовании T_1-устойчивости выяснилось, что разрешимая задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, со всеми линейными или квадратичными частными критериями всегда T_1-устойчива по векторному критерию [3]. Для задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$ и $X = X_G$, понятия T_1- и T_2-устойчивости по ограничениям эквивалентны [2, 5]. Понятие T_1-устойчивости к возмущениям всех исходных данных задачи $Z(P(F, X))$ с квадратичными частными критериями и допустимым множеством X, состоящим из всех целочисленных точек некоторого выпуклого многогранника, эквивалентно понятию T_1-устойчивости по ограничениям такой задачи [4].

Установлены необходимые и достаточные условия T_2-, T_3-, T_4- и T_5-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, [1–10]. Понятия устойчивости этих типов можно свести к более простым и очевидным понятиям, которые касаются устойчивости точек множества допустимых решений задачи и помогают раскрыть природу действия возмущений в исходных данных на множества допустимых, оптимальных и неоптимальных решений задачи [3, 7, 10]. Именно эти определенные далее понятия позволили с единых позиций подойти к исследованию различных типов устойчивости векторных задач целочисленной оптимизации.

Рассмотрим следующую совокупность подмножеств множества X допустимых решений задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \cup \{X,\ X \setminus P(F, X),\ X \setminus Sl(F, X), X \setminus Sm(F, X)\}.$$

Выберем $\mathcal{M}$ — произвольный элемент из $\overline{\mathfrak{M}}$, некоторое число $\delta > 0$ и набор возмущенных исходных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$. Обозначим $\mathcal{M}_{u(\delta)}$ подмножество возмущенного допустимого множества $X_{u_2(\delta)}$, полученное из подмножества $\mathcal{M}$ множества X в результате возмущений, приводящих к замене набора исходных данных $u = (u_1, u_2)$ набором $u(\delta)$. Например, если $\mathcal{M} = X \setminus Sm(F, X)$, то $\mathcal{M}_{u(\delta)} = X_{u_2(\delta)} \setminus Sm(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Полагаем, что точка $x \in \mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}}$ устойчиво принадлежит множеству $\mathcal{M}$, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$: $x \in \mathcal{M}_{u(\delta)}$, и неустойчиво принадлежит множеству $\mathcal{M}$ в противном случае. Множество $\mathrm{Ker}(\mathcal{M})$ всех точек, которые устойчиво принадлежат множеству $\mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}}$, составляет ядро устойчивости множества $\mathcal{M}$:

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{M} | \exists \delta > 0 \ \ \forall u(\delta) \in O_\delta(u): \ x \in \mathcal{M}_{u(\delta)}\}.$$

Полагаем, что точка $x \in X \setminus \mathcal{M}$ устойчиво не принадлежит множеству $\mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{X\}$, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$: $x \notin \mathcal{M}_{u(\delta)}$. Множество $\Omega(\mathcal{M})$ всех точек $x \in X$, устойчиво не принадлежащих множеству $\mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{X\}$, назовем ядром устойчивой непринадлежности множеству $\mathcal{M}$:

$$\Omega(\mathcal{M}) = \{x \in X \mid \exists \delta > 0 \ \ \forall u(\delta) \in O_\delta(u): x \notin \mathcal{M}_{u(\delta)}\}.$$

Из данных определений следует, что

$$\forall \mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{M}} \setminus \{X\}: \ \mathrm{Ker}(X \setminus \mathcal{M}) \subset \Omega(\mathcal{M}) \subset X \setminus \mathcal{M}. \tag{2}$$

Кроме того, если при исследовании некоторой задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, принимаются во внимание только возмущения исходных данных для векторного критерия, то $\mathrm{Ker}(X \setminus M(F, X)) = \Omega(M(F, X))$.

Отметим, что в случае, когда X можно представить множеством X_G согласно формуле (1), имеем

$$\mathrm{Ker}(X) = \mathrm{int}\, G \cap Z^n,$$

где $\mathrm{int} G$ – внутренность множества G. Действительно, с одной стороны, опираясь на приведенное далее утверждение 1, легко показать, что $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall u_2(\delta) \in O_\delta(u_2) = \{u_2(\delta) \in U_2 \mid \| u_2(\delta) - u_2 \| < \delta\}$ справедливо включение $\mathrm{int}\, G \cap Z^n \subset X_{u_2(\delta)}$, и, следовательно, все точки множества $\mathrm{int}\, G \cap Z^n$ устойчиво принадлежат множеству X. С другой стороны, очевидно, что любая точка множества $(G \setminus \mathrm{int} G) \cap Z^n$ неустойчиво принадлежит множеству X.

Утверждение 1 [5]. Пусть $x \in X$ и $\exists i \in N_m: g_i(x) < 0$. Тогда $\forall \delta \ (0 < \delta \le \lambda_i(x))$ и $\forall u_2 \in O_\delta(u_2)$ справедливо неравенство $g_i^{u_2(\delta)}(x) < 0$. Здесь $\lambda_i(x) = {}$ $= | g_i(x) | / (\| x \|^2 + \| x \| + 1)$, $g_i^{u_2(\delta)}(x) = \langle (Q_i + \Delta Q_i) x, x \rangle + \langle (p_i + \Delta p_i), x \rangle + h_i + \Delta h_i$, $\| \Delta Q_i \| < \delta$, $\| \Delta p_i \| < \delta$, $\| \Delta h_i \| < \delta$.

Проанализировав приведенные выше определения, приходим к следующим утверждениям, которые позволяют связать понятия T_2- и T_4-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, с понятием решения, устойчиво принадлежащим оптимальному множеству $M(F, X)$.

Теорема 1. Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, T_2-устойчива тогда и только тогда, когда среди ее оптимальных решений найдется хотя бы одно, устойчиво принадлежащее множеству $M(F, X)$, т.е. $\mathrm{Ker}(M(F, X)) \neq \varnothing$.

Теорема 2. Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$ и $M(F, X) \neq \varnothing$, T_4-устойчива тогда и только тогда, когда все ее оптимальные решения устойчиво принадлежат множеству $M(F, X)$, т.е.

$$\mathrm{Ker}(M(F, X)) = M(F, X). \tag{3}$$

Для задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$ и $M(F, X) \neq X$, получен результат, который указывает на связь понятия T_3-устойчивости такой задачи с понятием ее допустимого решения, устойчиво не принадлежащего множеству оптимальных решений $M(F, X)$. Следующая теорема обобщает результат, представленный в [7] для задачи $Z(P(F, X))$ поиска Парето-оптимальных решений.

Теорема 3. Пусть $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, $M(F, X) \neq X$. Необходимым условием T_3-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$ является следующее:

$$\Omega(M(F, X)) = X \setminus M(F, X). \qquad (4)$$

Если $X = X_G$, то выполнение соотношения (4) является необходимым и достаточным условием T_3-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$.

Доказательство теоремы 3. Необходимость. Согласно данному выше определению T_3-устойчивой задачи $Z(M(F, X))$ существует число $\delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u): M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subset M(F, X)$. Отсюда с учетом очевидного включения $M(F, X) \subset X$ следует, что

$$X \setminus M(F, X) \subset X \setminus M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}). \qquad (5)$$

Включение (5) позволяет сделать вывод, что все допустимые решения задачи, не принадлежащие оптимальному множеству $M(F, X)$, устойчиво не принадлежат ему, т.е. $X \setminus M(F, X) \subset \Omega(M(F, X))$. Принимая во внимание соотношения (2), приходим к равенству (4).

Для доказательства достаточности условия теоремы 3 понадобится следующая лемма, обобщающая результат, описанный в [1, 2] для случая, когда допустимое множество X является совокупностью всех целочисленных точек некоторого выпуклого многогранника.

Лемма [5]. Пусть $X = X_G$. Существует число $\delta > 0$ такое, что для любого элемента $u_2(\delta)$ множества $O_\delta(u_2) = \{u_2(\delta) \in U_2 \mid \| u_2(\delta) - u_2 \| < \delta\}$ справедливо включение $X_{u_2(\delta)} \subset X$.

Доказательство этой леммы основано на следующем утверждении.

Утверждение 2 [5]. Если $X = X_G$, то существует такое число $\overline{\delta} > 0$, что все множества $X_{u_2(\delta)}$, где $\delta \in (0, \overline{\delta}]$, ограничены в совокупности, хотя некоторые из них могут быть пустыми.

Продолжим доказательство теоремы 3.

Достаточность. Предположим, что $X = X_G$ и, кроме того, условие (4) выполняется. Последнее означает, что любая точка x из $X \setminus M(F, X)$ устойчиво не принадлежит $M(F, X)$ и, следовательно, для нее найдется такое положительное число $\delta(x)$, что $\forall u(\delta(x)) = (u_1(\delta(x)), u_2(\delta(x))) \in O_{\delta(x)}(u): x \in X \setminus M(F_{u_1(\delta(x))}, X_{u_2(\delta(x))})$. Принимая во внимание конечность множества $X \setminus M(F, X)$, заключаем, что существует число $\delta_0 = \min\{\delta(x) \mid x \in X \setminus M(F, X)\}$. Положив $\delta = \delta_0$, приходим к включению (5), справедливому для любого набора исходных данных $\forall u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$. Далее, учитывая приведенную выше лемму, делаем следующий вывод: $\exists \delta' > 0$ такое, что $\forall u(\delta') = (u_1(\delta'), u_2(\delta')) \in O_{\delta'}(u)$: $M(F_{u_1(\delta')}, X_{u_2(\delta')}) \subset X_{u_2(\delta')} \subset X$. Очевидно, выбрав число $\delta = \min\{\delta_0, \delta'\}$ и любой набор исходных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta))$ из $O_\delta(u)$, можно перейти от включения (5) к включению $M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subset M(F, X)$. Это означает T_3-устойчивость задачи $Z(M(F, X))$.

Теорема 3 доказана.

Что касается тривиальной задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$ и $M(F, X) = X$, то очевидно, что она T_3-устойчива по векторному критерию. В случае, когда $X = X_G$, можно утверждать, что такая задача $Z(M(F, X))$ T_3-устойчива относительно возмущений ее исходных данных при любом из трех рассмотренных ранее вариантов учета возмущений. Действительно, с учетом приведенной выше леммы очевидно, что $\exists\delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$: $M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subset X_{u_2(\delta)} \subset X = M(F, X)$.

Из приведенных выше определений различных типов устойчивости следует, что задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является T_5-устойчивой тогда и только тогда, когда ей присуща устойчивость двух типов: T_3 и T_4. В связи с этим и с учетом теорем 2 и 3 приходим к следующей далее формулировке необходимых и достаточных условий T_5-устойчивости задачи $Z(M(F, X))$ при $X = X_G$. Эти условия указывают на взаимосвязь T_5-устойчивости с устойчивостью допустимых решений, принадлежащих множествам $M(F, X)$ и $X \setminus M(F, X)$.

Теорема 4. Пусть $X = X_G$. Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, $M(F, X) \neq \varnothing$ и $M(F, X) \neq X$, является T_5-устойчивой тогда и только тогда, когда выполняются условия (3) и (4).

Таким образом, для того чтобы нетривиальная разрешимая задача $Z(M(F, X))$ была T_5-устойчивой необходимо и достаточно, чтобы все ее оптимальные решения устойчиво принадлежали множеству оптимальных решений $M(F, X)$, а все ее неоптимальные допустимые решения устойчиво не принадлежали множеству $M(F, X)$.

Для тривиальной задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$ и $M(F, X) = X$, необходимым и достаточным условием T_5-устойчивости по векторному критерию является лишь соотношение (3). Если допустимую область X такой задачи можно представить множеством X_G согласно формуле (1), то условие (3) является необходимым и достаточным для T_5-устойчивости задачи при любом рассматриваемом в данной работе варианте учета возмущений исходных данных задачи.

На основании изложенных результатов предлагается общий подход к изучению различных типов устойчивости задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, относительно возмущений ее исходных данных, который базируется на исследовании свойств двух непересекающихся подмножеств множества X допустимых решений задачи: $\mathrm{Ker}(M(F, X))$ — ядра устойчивости множества оптимальных решений $M(F, X)$ и $\Omega(M(F, X))$ — ядра устойчивой непринадлежности множеству $M(F, X)$. Этот подход состоит в решении вопросов о непустоте множества $\mathrm{Ker}(M(F, X))$ и совпадении его с оптимальным множеством $M(F, X)$, а также вопросов о совпадении множества $\Omega(M(F, X))$ тех допустимых решений задачи, которые устойчиво не принадлежат оптимальному множеству $M(F, X)$, с множеством всех неоптимальных допустимых решений $X \setminus M(F, X)$.

Приведем некоторые формулы для описания множеств $\mathrm{Ker}(M(F, X))$ и $\Omega(M(F, X))$, полученные в результате исследования устойчивости задач вида $Z(M(F, X))$ при различных вариантах учета возмущений в исходных данных.

При изучении устойчивости по векторному критерию задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, $F = (f_1, \dots, f_\ell)$, $f_i : R^n \to R^1$ $(i \in N_\ell)$ – квадратичные функции, получены формулы:

$$\mathrm{Ker}(M(F, X)) = Sm(F, X), \ \Omega(M(F, X)) = X \setminus Sl(F, X).$$

При изучении устойчивости по ограничениям задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, при $X = X_G$ получено соотношение

$$\mathrm{Ker}(M(F, X)) = M(F, X) \cap \mathrm{int}\, G(Q, p, h).$$

Если, кроме того, предполагалось, что векторный критерий $F = (f_1, \dots, f_\ell)$ составляют вогнутые непрерывно дифференцируемые функции $f_i : R^n \to R^1$ $(i \in N_\ell)$, то

$$\Omega(M(F, X)) = \{x \in X \setminus M(F, X) \mid \omega(x, M(F, X)) \cap \mathrm{int}\, G(Q, p, h) \neq \varnothing\}.$$

В том случае, когда принимались во внимание возмущения, которым подвергаются все исходные данные задачи $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, $f_i : R^n \to R^1$ $(i \in N_\ell)$ — вогнутые квадратичные функции и $X = X_G$, получены формулы:

$$\operatorname{Ker}(M(F, X)) = Sm(F, X) \cap \operatorname{int} G(Q, p, h),$$
$$\Omega(P(F, X)) = \{x \in X \setminus Sl(F, X) \mid \omega(x, Sl(F, X)) \cap \operatorname{int} G(Q, p, h) \neq \varnothing\}.$$

Таким образом, в данной статье предложен общий подход к анализу различных типов устойчивости относительно возмущений исходных данных для векторных задач целочисленной оптимизации при использовании принципов оптимальности по Парето, Слейтеру и Смейлу. В связи с этим исследованы взаимосвязи понятий устойчивости указанных задач и устойчивости их оптимальных и неоптимальных допустимых решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.

2. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 63–70.

3. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальних решений // Там же. — 2005. — № 4. — С. 90–100.

4. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Там же. — 2006. — № 5. — С. 63–72.

5. Семенова Н.В. Устойчивость по ограничениям векторных задач целочисленной оптимизации с выпуклыми квадратичными функциями ограничений // Теорія оптимальних рішень. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007. — № 6. — С. 131–138.

6. Сергиенко Т.И. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям целочисленных задач поиска решений, оптимальных по Слейтеру и Смейлу // Компьютерная математика. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2008. — № 1. — С. 145–151.

7. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 142–148.

8. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Условия устойчивости векторных целочисленных задач поиска решений, оптимальных по Смейлу // Компьютерная математика. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2010. — № 2. — С.156–163.

9. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Условия устойчивости по векторному критерию и ограничениям многокритериальных задач целочисленной оптимизации // Доп. НАН України. — 2011. — № 4. — С. 37–40.

10. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Исследование устойчивости векторных задач дискретной оптимизации с различными принципами оптимальности // Там же. — 2012. — № 11. — С. 34–39.

11. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 1. — С. 82–89.

12. Емеличев В.А., Коротков В.В. О радиусе устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями минимаксного риска Сэвиджа // Там же. — 2012. — № 3. — С. 68–77.

13. Емеличев В.А., Коротков В.В. О радиусе устойчивости эффективного решения векторной квадратичной булевой задачи на узкие места // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — **18**, № 6. — С. 3–16.

14. Emelichev V.A., Karelkina O.V., Kuzmin K.G. Qualitative stability analysis of multicriteria combinatorial minimin problem // Control and Cybernetics. — 2012. — **41**, N 1. — P. 57–79.

15. Емеличев В.А., Коротков В.В. Об устойчивости лексикографического решения векторной минимаксной квадратичной булевой задачи // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2011. — **19**, № 2. — С. 26–36.

16. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

17. Smale S. Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. — 1974. — N 1. — P. 213–221.

Поступила 18.04.2013