

УДК 631.153.3:330.131.7

В.А. ПЕПЕЛЯЕВ, Н.А. ГОЛОДНИКОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ РИСКА ПОТЕРЬ УРОЖАЯ И ЕГО УЧЕТ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ СТРУКТУРЫ ПОСЕВНЫХ ПЛОЩАДЕЙ

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации структуры посевных площадей с учетом риска потерь урожая. Для ее решения предложена математическая модель, в основе которой лежит подход, принятый в теории портфельной оптимизации. Его суть состоит в том, чтобы максимизировать средний ожидаемый результат при ограничениях на риск потерь. Приведены результаты анализа оптимальных решений этой задачи, полученных с использованием статистических данных.

Ключевые слова: риск, посевные площади, урожай, математическая модель, эффективность.

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития аграрного сектора Украины сельскохозяйственные товаропроизводители самостоятельно определяют структуру посевных площадей, ориентируясь преимущественно только на текущую конъюнктуру продовольственного рынка. Погодный риск, если и учитывается, то только на интуитивном уровне. Недостаточное внимание к этому аспекту на практике приводит к большим потерям урожая при неблагоприятных погодных условиях. Например вследствие неблагоприятных условий перезимовки в 2012 г. 3–3.5 млн га посевной площади озимых культур подлежало пересеву. В связи с этим в рамках проведения весенне-полевых работ правительство приняло решение о выделении из государственного бюджета 300 млн грн. для

© В.А. Пепеляев, Н.А. Голодникова, 2014

предоставления сельхозпроизводителям дотации для частичной компенсации потерь, связанных с пересевом. Такое нерациональное использование земельных и финансовых ресурсов страны не способствует укреплению продовольственной безопасности и усугубляет и без того тяжелое положение широких слоев населения, находящихся за пределами бедности. В связи с этим приобретает особую актуальность разработка математических методов оценки риска потерь урожая и его учета при планировании структуры посевных площадей на уровне страны.

Для решения этой проблемы в настоящей статье разработана математическая модель для оптимизации структуры посевных площадей сельскохозяйственных культур на уровне страны с учетом риска потерь урожая. В ее основе лежит подход, принятый в теории портфельной оптимизации, начало которой было положено в статье Марковица [1]. Согласно этому подходу ограниченные денежные ресурсы распределяются между финансовыми инструментами таким образом, чтобы максимизировать среднюю прибыль при ограничениях на риск потерь. В работах [2–6] этот подход модифицирован и применен для решения прикладных задач не только в риск-менеджменте и финансовой инженерии, но и в таких областях, как современная статистика, стохастическое программирование, логистика, медицина, механика и сельское хозяйство.

В терминах оптимизации структуры посевных площадей задача состоит в поиске распределения общей посевной площади между областями Украины, максимизирующего среднегодовую урожайность при ограничении на риск недобора урожая.

В первом разделе статьи изложены математические методы оценки риска, разработанные в [2–6], и предложена математическая модель оптимального распределения посевных площадей одной сельскохозяйственной культуры между областями Украины. Во втором разделе приведены результаты анализа риска потери урожая озимой пшеницы как по отдельным областям, так и по стране в целом. С помощью предложенной математической модели численно решена задача оптимального распределения посевных площадей озимой пшеницы по областям с учетом риска. При этом использовались статистические данные за 2000–2012 гг., предоставленные Государственным комитетом статистики Украины.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача риск-анализа в растениеводстве состоит в оценивании уровня возможных потерь урожая, вызванных разными причинами, и их вероятностных характеристик. Рассматривается K областей Украины (включая Автономную Республику Крым). Пусть ξ_k — средняя по k -й области урожайность некоторой сельскохозяйственной культуры, $k = 1, \dots, K$, и ξ — ее средняя по стране урожайность. Поскольку эти величины из года в год изменяются случайным образом, будем рассматривать их как случайные величины. В качестве эталона, по отношению к которому определяются потери урожая (недобор урожая) в k -й области, можно выбрать средний многолетний уровень урожайности по этой области $\bar{\xi}_k = E[\xi_k]$. Но в таком случае не было бы единого эталона для всех областей, и сопоставление оценок риска потерь урожая между областями было бы затруднено. Поэтому недобор урожая в k -й области будем оценивать относительно среднего многолетнего уровня урожайности данной культуры по всей стране $\bar{\xi} = E[\xi]$ по формуле

$$\omega_k = \bar{\xi} - \bar{\xi}_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (1)$$

Положительные значения случайной величины ω_k соответствуют нежелательным исходам (недобор урожая по отношению к эталонному уровню), а отрицательные — благоприятным (урожай, превышающий средний уровень). В связи с этим возникает проблема выбора подходящей меры риска реализации нежелательных исходов. С публикацией статьи [1] в течение нескольких десятилетий в теории портфельной оптимизации в качестве меры риска ис-

пользовалось стандартное отклонение, характеризующее ширину вероятностного распределения. При этом большие отклонения от среднего как в сторону положительных значений, так и в сторону отрицательных рассматриваются как рискованные. В то же время на практике минимизации подлежат только односторонние отклонения в положительную сторону, соответствующие потерям урожая. Поэтому в настоящее время широкое распространение получила мера риска VaR (Value at Risk), учитывающая отклонения только в одну (неблагоприятную) сторону.

Рассмотрим распределение вероятностей случайной величины ω потерь урожая

$$F(z) = P\{\omega \leq z\}. \quad (2)$$

Тогда VaR при уровне значимости α ($0 < \alpha < 1$) функции распределения ω определяется по формуле [2–4]

$$\text{VaR}_\alpha(\omega) = \min \{z \mid F(z) \geq \alpha\}. \quad (3)$$

При $\alpha = 0.95$ это определение означает, что из ста случаев только в пяти недобор урожая будет превышать значение $\text{VaR}_\alpha(\omega)$. Если функция распределения $F(z)$ непрерывна и строго монотонна, то $\text{VaR}_\alpha(\omega)$ представляет собой квантиль уровня α для этой функции. Данная мера риска имеет простой интуитивно понятный смысл. Однако она никак не отображает возможность реализации больших потерь за пределами $\text{VaR}_\alpha(\omega)$ с малыми вероятностями.

Для учета «тяжелых хвостов» в функции распределения потерь в качестве меры риска используют CVaR (conditional VaR). Эта мера риска определяет средние потери, превышающие соответствующее значение VaR. Если функция распределения $F(z)$ непрерывна в точке $\text{VaR}_\alpha(\omega)$, CVaR определяется по формуле [4]

$$\text{CVaR}_\alpha(\omega) = E\{\omega \mid \omega \geq \text{VaR}_\alpha\}, \quad (4)$$

где E — знак математического ожидания.

Рассмотрим дискретный случай, когда величина ω принимает конечное число значений, которые упорядочены следующим образом: $z_1 < z_2 < \dots < z_N$, и вероятность реализации значения z_n равна $p_n > 0$, $n = 1, \dots, N$. Пусть при этом индекс n_α удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{n_\alpha} p_n \geq \alpha > \sum_{n=1}^{n_\alpha-1} p_n.$$

Тогда $\text{CVaR}_\alpha(\omega)$ вычисляется по формуле [4]

$$\text{CVaR}_\alpha(\omega) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\left(\sum_{n=1}^{n_\alpha} p_n - \alpha \right) z_{n_\alpha} + \sum_{n=n_\alpha+1}^N p_n z_n \right]. \quad (5)$$

Поскольку на практике распределение случайной величины ω неизвестно, то для вычисления $\text{CVaR}_\alpha(\omega)$ используется сценарный подход, основанный на исторических данных. В рамках этого подхода будем считать, что случайная величина ξ_k принимает с равными вероятностями значения (сценарии) u_{1k}, \dots, u_{Jk} , где u_{jk} — историческая (статистическая) урожайность сельскохозяйственной культуры в j -м году (при j -м сценарии) в k -й области, $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, J$; J — период (число сценариев), в пределах которого используется статистическая информация об урожайности данной культуры за прошедшие годы.

В следующем разделе представлены результаты оценки риска недобора урожая озимой пшеницы по всем областям Украины с использованием в качестве меры риска $\text{CVaR}_\alpha(\omega)$, вычисляемой по формуле (5). С помощью соотношений «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность» будут выявлены как области, наиболее благоприятные для производства данной сельскохозяйственной

культуры, так и неблагоприятные. Область, в которой среднегодовая урожайность высокая при низком уровне риска, считается благоприятной для выращивания данной культуры. Это соотношение применяется в статье в качестве базиса для оптимального распределения посевных площадей сельскохозяйственной культуры по областям. Используя большой разброс по областям значений среднегодовой урожайности и риска недобора урожая, можно выбрать такое распределение посевных площадей по областям, при котором достигается максимальное значение среднегодовой урожайности данной культуры по стране и при этом риск недобора урожая не превышает заданного критического уровня.

Для формулировки задачи оптимального распределения посевных площадей одной культуры по областям с учетом риска потерь урожая введем следующие обозначения. Пусть S — общая посевная площадь, которую планируется отвести под данную сельскохозяйственную культуру; x_k — доля общей площади, приходящаяся на k -ю область, $k = 1, \dots, K$; u_{jk} — урожайность данной культуры в k -й области при j -м сценарии, $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, J$; s_k — свободная посевная площадь, которая может быть отведена под данную культуру в k -й области. При фиксированном распределении посевных площадей $x = (x_1, \dots, x_K)$ средняя по стране урожайность культуры при j -м сценарии равна

$$u_j(x) = \sum_{k=1}^K u_{jk} x_k. \quad (6)$$

Среднегодовая урожайность по стране равна

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J u_j(x) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K u_{jk} x_k. \quad (7)$$

Недобор урожая в стране при j -м сценарии по сравнению с эталонным уровнем $\bar{\xi}$ равен

$$\omega(x, j) = \bar{\xi} - u_j(x) = \bar{\xi} - \sum_{k=1}^K u_{jk} x_k. \quad (8)$$

Риск недобора урожая по сравнению с эталонным уровнем, измеряемый показателем $\text{CVaR}_\alpha(\omega(x))$, вычисляется по формуле (5), где $p_j = \frac{1}{J}$, $j = 1, \dots, J$.

Задача оптимизации распределения посевных площадей под одну культуру по областям с учетом риска состоит в определении такого распределения посевных площадей $x^* = (x_1^*, \dots, x_K^*)$, при котором максимизируется ее среднегодовая урожайность по стране:

$$\bar{u}(x^*) = \max_x \left[\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K u_{jk} x_k \right], \quad (9)$$

и при этом выполняются ограничения:

- на риск недобора урожая

$$\text{CVaR}_\alpha(\omega(x)) \leq R; \quad (10)$$

- на сумму посевных площадей, отведенных под культуру во всех областях,

$$\sum_{k=1}^K x_k = 1, \quad (11)$$

- на посевные площади, которые можно выделить в отдельных областях,

$$0 \leq x_k \leq \frac{s_k}{S}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (12)$$

Величина R в ограничении (10) отображает приемлемый с точки зрения обеспечения продовольственной безопасности страны уровень недобора урожая в расчете на 1 га. При этом предполагается, что компенсировать потери урожая можно за счет других источников, например имеющихся запасов или сокращения экспорта соответствующей сельскохозяйственной продукции. Оценка риска в левой части ограничения (10) должна использоваться как основа для вы-

работки стратегии относительно экспорта сельскохозяйственной продукции, а также формирования необходимых объемов запасов.

Умножив обе части ограничения (11) на величину S , получим балансовое ограничение, которое гарантирует, что сумма посевных площадей, отведенных под данную культуру во всех областях, равна ее общей посевной площади S на уровне страны. Таким же образом можно убедиться, что ограничения (12) гарантируют, что посевная площадь, отведенная под данную культуру в каждой области, не будет превышать имеющиеся свободные площади.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА ОЗИМОЙ ПШЕНИЦЫ В УКРАИНЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РИСК-АНАЛИЗА

Здесь математические методы и модель, приведенные в предыдущем разделе, используются для проведения риск-анализа эффективности производства озимой пшеницы в каждой области Украины, а также для решения задачи оптимального распределения посевных площадей по областям с учетом риска. Для решения задачи (9)–(12) применялся многофункциональный пакет PSG, разработанный American Optimal Decision, USA [5, 6] и статистические данные Госкомстата Украины за 2000–2012 гг.

С учетом того, что период, за который используются статистические данные об урожайности, $J=13$, при выборе уровня значимости $\alpha=0.77$, значение $CVaR_{0.77}(\omega)$ приблизительно равно среднему значению недобора урожая за три наиболее неурожайных года из рассматриваемых 13 лет.

Согласно методике, применяемой в Украине, России и в некоторых других странах СНГ, урожайность сельскохозяйственных культур определяется в расчете на 1 га площади, с которой убирается урожай. Для проведения риск-анализа использованы значения урожайности озимой пшеницы в расчете на 1 га посевной площади как по областям, так и по стране и определен средний за 13 лет уровень ее урожайности по стране — ξ . Полученное значение ($\xi = 27.28$ ц с одного гектара засеянной площади) в дальнейшем использовалось в качестве эталона, относительно которого по формуле (1) вычислялись потери урожая. После этого по каждой области были определены среднегодовые значения урожайности озимой пшеницы и рассчитаны по формуле (5) значения риска недобора ее урожая.

Случайная изменчивость урожайности сельскохозяйственной культуры в фиксированной области характеризуется двумя показателями: среднегодовой урожайностью и риском недобора урожая по отношению к эталонному значению. Эти показатели характеризуют эффективность ее производства в данной области. Сравнение областей по этим двум показателям удобно проводить с помощью графика, на котором по оси X откладываются значения риска, $CVaR_{0.77}$, а по оси Y — среднегодовая урожайность, ц/га посевной площади. Точке с координатами (x, y) на таком графике соответствует область, среднегодовая урожайность которой равна y , а риск недобора урожая — x .

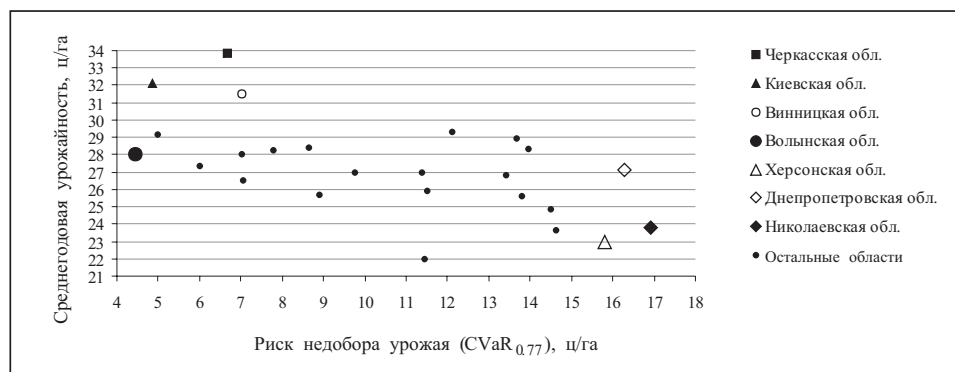


Рис. 1. Разброс соотношений «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность» по областям Украины для озимой пшеницы

В левом верхнем углу расположены точки, соответствующие областям с наиболее благоприятными условиями для производства озимой пшеницы, поскольку они характеризуются сравнительно высокими уровнями среднегодовой урожайности и низкими значениями риска недобора урожая. В эту группу входят Черкасская, Киевская, Винницкая, Закарпатская и Волынская области. Наименьшим риском недобора урожая озимой пшеницы характеризуется Волынская область, у которой значение риска $CVaR_{0.77} = 4.45$ ц/га. Таким образом, в среднем за три наиболее неурожайных в этой области года из 13-ти недобор урожая озимой пшеницы по отношению к эталону (27.28 ц/га) составляет 4.45 ц/га. Однако среднегодовая урожайность этой культуры в Волынской области (28.05 ц/га) намного ниже соответствующего показателя в Черкасской области (33.87 ц/га). Достаточно хорошее соотношение «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность» демонстрирует Киевская область, в которой среднегодовая урожайность озимой пшеницы на 4.76 ц/га выше, чем в Волынской, а риск выше только на 0.41 ц/га.

Наихудшее соотношение «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность» демонстрируют области, которым соответствуют точки в правом нижнем углу на графике, поскольку они имеют низкие уровни среднегодовой урожайности и высокие значения риска недобора урожая. В эту группу входят Николаевская и Херсонская области. Николаевская область характеризуется наибольшим значением риска $CVaR_{0.77} = 16.93$ ц/га на фоне довольно низкого значения среднегодовой урожайности озимой пшеницы, 23.76 ц/га посевной площади.

Наименьший уровень среднегодовой урожайности озимой пшеницы, 21.98 ц/га, при достаточно высоком уровне риска, $CVaR_{0.77} = 11.44$ ц/га, демонстрирует Автономная Республика Крым.

Рассмотрим, как влияет размер общей посевной площади S и ее распределение между областями на эффективность производства озимой пшеницы на уровне страны. Проведены четыре серии расчетов при значениях S , равных 2356.5, 5089.2, 5533.8, 6499.4 тыс. га, которые соответствуют общим посевным площадям, отведенным в Украине под озимую пшеницу в 2003, 2006, 2012 и 2011 гг. соответственно. В качестве значения s_k , используемого в правой части ограничения (12), берем максимальную за 13 лет посевную площадь, отводившуюся под озимую пшеницу в k -й области, $k = 1, \dots, K$. В каждой серии расчетов решалась задача (9)–(12) при разных значениях правой части в ограничении (10), R_1, \dots, R_N , которым соответствуют оптимальные решения $x_{R_1}^*, \dots, x_{R_N}^*$. Оптимальное решение $x_{R_n}^*$ задачи (9)–(12) при фиксированном значении правой части R_n в ограничении (10) характеризуется соотношением «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность»: $(CVaR_{0.77}(\omega(x_{R_n}^*)), \bar{u}(x_{R_n}^*))$, $n = 1, \dots, N$. Если отобразить точки с такими координатами на графике, на котором по оси X откладываются значения риска, $CVaR_{0.77}$, а по оси Y — среднегодовая урожайность на уровне страны, то получим кривую, аналогичную границе эффективности Марковица, широко используемую в теории портфельной оптимизации. На рис. 2 отображены четыре такие кривые, помеченные номерами 1–4. Кроме того, показаны также точки с номерами 5–11, характеризующие фактические значения показателей эффективности распределения посевных площадей озимой пшеницы по областям Украины в разные годы.

Кривая 1 на графике представляет собой границу эффективности распределения общей посевной площади озимой пшеницы размером $S = 2356.5$ тыс. га между областями при фиксированных значениях s_k , $k = 1, \dots, K$. Именно на такой площади была посеяна озимая пшеница в Украине в 2003 г. Это значение S минимальное за 2000–2012 гг. Кривой 2 соответствует площадь $S = 5089.2$ тыс. га, кривой 3 — $S = 5533.8$ тыс. га, кривой 4 — $S = 6499.4$ тыс. га.

Для каждой точки кривой 1 ее Y -координата равна максимально возможному значению среднегодовой урожайности озимой пшеницы по стране при усло-

вии, что риск недобора урожая $CVaR_{0.77}$ не превышает значения, соответствующего ее X -координате. Крайняя слева точка на кривой 1 соответствует минимальному значению риска, которого можно достичь при оптимальном распределении между областями посевной площади размером $S = 2356.5$ тыс. га.

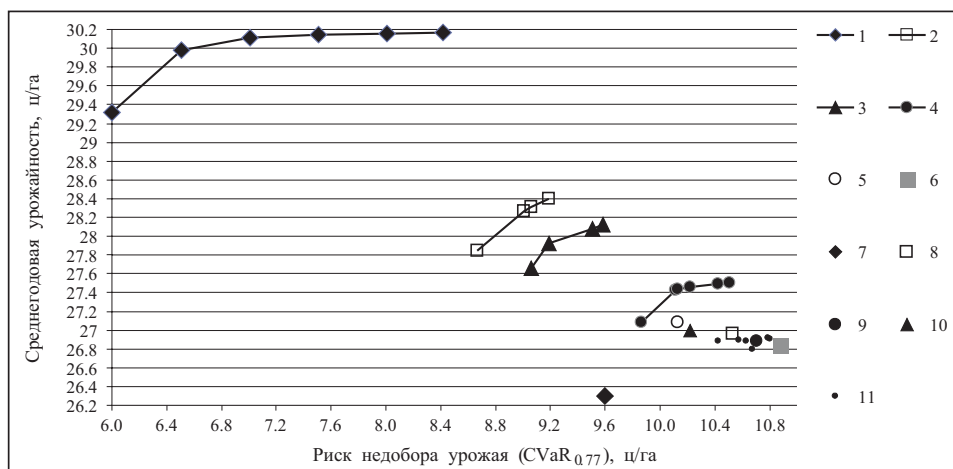


Рис. 2. Соотношение фактических показателей эффективности распределения посевных площадей озимой пшеницы по областям Украины в разные годы и границ эффективности

При любом значении величины R в правой части ограничения (10), меньшем, чем этот минимальный риск, задача (9)–(12) не имеет допустимого решения. Крайняя справа точка на этой кривой соответствует оптимальному решению задачи (9)–(12) с максимально возможным риском. При значениях R , превосходящих этот максимальный риск, ограничение (10) будет неактивным, т.е. исходная задача (9)–(12) будет эквивалентна задаче максимизации функции (9) при ограничениях (11) и (12). Следует отметить, что значение максимального риска для неоптимального распределения посевной площади по областям может существенно превышать максимальный риск, полученный при решении задачи (9)–(12).

Таким образом, при заданном значении риска значение средней урожайности можно увеличить только до уровня, определяемого соответствующей точкой, расположенной на границе эффективности. Дальнейшего повышения уровня средней урожайности можно достичь только за счет увеличения значения допустимого риска и поиска оптимального решения задачи (9)–(12), которому будет соответствовать точка на границе эффективности, лежащая правее и выше исходной точки. Эту итеративную процедуру можно продолжать до тех пор, пока ограничение (10) остается активным. Крайней правой точке, расположенной на границе эффективности, соответствует максимальный уровень средней урожайности, который нельзя превзойти при фиксированных значениях размеров общей посевной площади S и свободной посевной площади s_k в k -й области, $k = 1, \dots, K$, которая может быть отведена под данную культуру.

Изменение значения S приводит к изменению формы и расположения границы эффективности. Из рис. 2 видно, что с увеличением размера общей посевной площади S , которую необходимо распределить между областями, соответствующая граница эффективности смещается в сторону правого нижнего угла. При этом в том же направлении смещаются их крайние левые и крайние правые точки. Такая закономерность в расположении границ эффективности свидетельствует о том, что по мере увеличения значения S оптимальные решения задачи (9)–(12) характеризуются все худшими соотношениями «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность».

В правом нижнем углу изображены точки 5–11, характеризующие показатели эффективности фактического распределения посевных площадей озимой пшеницы

разных размеров S за 2000–2012 гг. Для того чтобы показать, насколько решение задачи (9)–(12) улучшает показатели эффективности распределения посевных площадей озимой пшеницы по сравнению с фактическими значениями, некоторые точки помечены теми же маркерами, что и соответствующие им границы эффективности. Например, точка 7, расположенная внизу и обозначенная ромбом, отображает соотношение «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность», характеризующее фактическое распределение в 2003 г. общей посевной площади озимой пшеницы размером $S = 2356.5$ тыс. га между областями. Таким же маркером помечена граница эффективности 1, построенная в результате решения нескольких задач при разных значениях R в правой части ограничения (10) и фиксированном значении такой же площади $S = 2356.5$ тыс. га. Аналогично точке 8 и границе эффективности 2, обозначенным полым квадратом, соответствует одно значение $S = 5089.2$ тыс. га; точке 10 и границе эффективности 3 — значение $S = 5533.8$ тыс. га; точке 9 и границе эффективности 4 — значение $S = 6499.4$ тыс. га. Расстояние между каждой парой таких графических объектов характеризует степень эффективности оптимизации распределения общей посевной площади S между областями. На рис. 2 показано, что наибольшая эффективность достигается при минимальном значении S . С ростом размера общей посевной площади эффективность оптимизации падает.

Для точек 5 и 6 соответствующие границы эффективности на графике не приводятся. Первая из них соответствует наиболее эффективному фактическому распределению общей посевной площади в 2000 г., а вторая — распределению в 2002 г.

В табл. 1 приведены оптимальные варианты распределения общей посевной площади озимой пшеницы между областями, характеризующиеся минимальным риском недобора урожая ($CVaR_{0.77}$). Эти распределения, полученные при решении задачи (9)–(12) для S , равных 2356.5 тыс. га, 5089.2 тыс. га и 5533.8 тыс. га, сравниваются в таблице с распределениями таких же общих площадей, реализованными в 2003, 2006 и 2012 гг. на практике. Области расположены в таблице в порядке возрастания риска недобора урожая озимой пшеницы. Анализ показывает, что при распределении общей посевной площади сравнительно малого размера ($S = 2356.5$ тыс. га и $S = 5089.2$ тыс. га) с минимальным значением риска недобора урожая ($CVaR_{0.77}$) под озимую пшеницу в основном выделяются свободные посевные площади в областях с благоприятными условиями для ее производства (верхние строки таблицы).

В связи с ограниченным размером свободной посевной площади s_k в этих областях с увеличением значения S приходится задействовать свободные посевные площади в областях с менее благоприятными условиями, что ухудшает соотношение «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность» на уровне страны. Согласно порядку расположения областей таблицы в нижней части находятся области, характеризующиеся большим риском недобора урожая. К ним относятся южные и восточные области Украины. Таблица отчетливо демонстрирует значительное уменьшение их доли в общей посевной площади озимой пшеницы в оптимальных вариантах распределения по сравнению с вариантами распределения, реализованными в разные годы на практике. При этом в оптимальных вариантах доля Николаевской обл., характеризующейся максимальным риском, равна нулю. Из сравнения фактического распределения с оптимальным следует, что именно существенным увеличением доли областей, неблагоприятных для выращивания озимой пшеницы, в общей посевной площади, практиковавшимся в разные годы, объясняется большой риск недобора урожая на уровне страны.

Улучшить соотношение «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность» на уровне страны можно увеличением посевных площадей озимой пшеницы в областях, расположенных в верхних строках таблицы, за счет культур, второстепенных с точки зрения продовольственной безопасности. Согласно ста-

статистическим данным [7] за 1990–2011 гг. площадь, с которой собран урожай подсолнечника, увеличилась в Киевской обл. в 17.9 раза (с 4.8 тыс. га в 1990 г. до 86.0 тыс. га в 2011), в Черкасской обл. — в 4.2 раза (с 37.9 тыс. га в 1990 г. до 157.8 тыс. га в 2011), в Винницкой обл. — в 4.3 раза (с 34.3 тыс. га в 1990 г. до 148.0 тыс. га в 2011); площадь, с которой собран урожай рапса, увеличилась в Киевской обл. в 3.8 раза (с 9.2 тыс. га в 1990 г. до 35.4 тыс. га в 2011), в Черкасской обл. — в 46.8 раза (с 1.5 тыс. га в 1990 г. до 70.2 тыс. га в 2011), в Винницкой обл. — в 12.3 раза (с 11.6 тыс. га в 1990 г. до 143.0 тыс. га в 2011).

Таблица 1. Сравнение фактического распределения общей посевной площади озимой пшеницы по областям с оптимальным для $S = 2356.5$, 5089.2 и 5533.8 тыс. га

Область	Распределение посевной площади пшеницы между областями (%)					
	$S = 2356.5$ тыс. га		$S = 5089.2$ тыс. га		$S = 5533.8$ тыс. га	
	минимальное CVaR _{0.77}	фактическое (2003 г.)	минимальное CVaR _{0.77}	фактическое (2006 г.)	минимальное CVaR _{0.77}	фактическое (2012 г.)
Волынская	5.42	3.90	2.51	2.37	2.31	2.19
Киевская	11.43	0.98	5.29	4.13	4.87	3.23
Закарпатская	1.46	1.09	0.67	0.57	0.62	0.62
Львовская	5.92	4.43	2.74	2.36	2.52	2.48
Черкасская	11.25	1.56	5.21	3.83	4.79	3.90
Ровненская	5.17	2.40	2.40	1.78	2.20	1.75
Винницкая	15.90	5.08	7.36	4.38	6.77	6.28
Ивано-Франковская	2.62	1.08	1.21	0.81	1.12	0.91
Тернопольская	8.78	3.90	4.07	3.09	3.74	3.74
Хмельницкая	12.50	5.20	5.79	3.30	5.32	3.90
Житомирская	0.65	2.18	3.15	1.75	2.90	1.73
Черновицкая	0.00	1.36	1.21	0.64	1.11	0.79
Сумская	0.00	2.84	4.47	1.85	4.11	3.38
АР Крым	7.94	10.93	7.78	5.99	7.16	5.72
Черниговская	0.00	2.91	3.16	2.40	2.90	2.58
Полтавская	0.00	1.59	7.10	4.98	6.53	3.58
Донецкая	0.00	6.42	4.69	6.66	7.54	7.21
Кировоградская	10.97	2.60	7.54	5.51	6.93	3.91
Запорожская	0.00	6.72	10.07	5.84	9.26	7.52
Харьковская	0.00	7.40	9.33	7.06	8.58	6.35
Одесская	0.00	7.30	1.80	8.09	5.18	8.03
Луганская	0.00	7.87	0.00	4.40	3.51	5.34
Херсонская	0.00	7.89	2.45	5.35	0.00	4.39
Днепропетровская	0.00	0.86	0.00	6.86	0.03	5.99
Николаевская	0.00	1.54	0.00	5.99	0.00	4.47

Если бы в 2011 г. под подсолнечник и рапс были отведены такие же площади, как и в 1990 г., то во всех областях образовались бы излишки свободных посевных площадей, о масштабах которых красноречиво свидетельствуют такие цифры: в Кировоградской обл. эти излишки составили бы 124 % посевной площади, выделенной в этой области в 2011 г. под озимую пшеницу; в Черкасской — 62 %; в Житомирской — 56 %; в Полтавской — 55 %; в Винницкой — 49 %; в Киевской — 48 %.

Увеличив в каждой области размер посевных площадей, отведенных в 2011 г. под озимую пшеницу, на величину образовавшихся излишков, получим новые значения свободных посевных площадей s_k , $k = 1, \dots, K$. Для этих данных решена серия задач (9)–(12) по распределению общей посевной площади размером $S = 6499.4$ тыс. га между областями при разных значениях правой части в ограничении (10). Анализ полученных результатов показал, что при новых значениях s_k ,

$k = 1, \dots, K$, граница эффективности, соответствующая $S = 6499.4$ тыс. га (кривая 4 на рис. 2), переместилась вверх и сдвинулась влево. При этом диапазон риска недобора урожая, соответствующий пересчитанной границе эффективности, улучшился с $[9.8551, 10.5]$ до $[8.872, 9.492]$, т.е. новое значение максимального риска — 9.492, стало меньшим, чем старое значение минимального риска — 9.8551. Улучшился также и диапазон среднегодовых значений урожайности с $[27.08, 27.51]$ до $[28.11, 28.59]$, т.е. новое минимальное значение среднегодовой урожайности озимой пшеницы стало большим, чем старое максимальное.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Традиционно задача оптимизации структуры посевных площадей формулировалась в виде задачи линейного программирования, в которой максимизировался валовый сбор урожая в многолетнем разрезе при ограничениях, исключающих производство монокультуры. При таком подходе невозможно оценить вероятностные характеристики потерь урожая, обусловленные неблагоприятными погодными условиями. Для устранения этого недостатка в данной статье предложена математическая модель, в основе которой лежит подход, принятый в теории портфельной оптимизации. Его суть состоит в том, чтобы максимизировать средний ожидаемый результат при ограничениях на риск потерь. С математической точки зрения, потери представляют собой случайную величину с неизвестной функцией распределения. В качестве меры риска потерь в риск-менеджменте и финансовой инженерии обычно выбирают такие характеристики этого распределения, как дисперсия, квантиль (VaR) или среднее значение больших потерь (CVaR). В данной статье для построения модели в качестве меры риска использовался CVaR.

Для детального анализа полученного решения приведена упрощенная постановка задачи оптимизации посевных площадей, рассматривающая оптимизацию распределения посевных площадей под одну культуру по областям с учетом риска. Обобщение такой постановки на случай распределения площадей для нескольких культур очевидно. Численные расчеты по этой модели проводились с помощью многофункционального пакета PSG, разработанного American Optimal Decision, USA [5, 6], и статистических данных за 2000–2012 гг., предоставленных Государственным комитетом статистики Украины.

В настоящей статье проведен анализ эффективности производства озимой пшеницы как на уровне страны, так и на уровне областей (включая АР Крым). В качестве показателей, характеризующих эффективность ее производства, использовались среднегодовая урожайность и риск недобора урожая по отношению к эталонному значению. Результаты расчетов показали большой разброс значений показателей эффективности по областям. Это обусловило большую чувствительность эффективности оптимального распределения общей посевной площади по областям к размеру этой площади и к наличию свободных посевных площадей в пределах каждой области.

Проведено несколько серий расчетов при разных размерах общей посевной площади, которая распределяется по областям. Анализ оптимальных решений показал, что при распределении общей посевной площади сравнительно малого размера под озимую пшеницу в основном выделяются свободные посевные площади в областях с благоприятными условиями для ее производства. Однако в связи с ограниченными размерами свободных посевных площадей в областях с благоприятными условиями с увеличением размера распределяемой общей посевной площади приходится задействовать свободные посевные площади в областях с менее благоприятными условиями, что приводит к ухудшению соотношения «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность» на уровне страны. В результате сделаны следующие выводы.

1. Оптимальные решения, полученные с помощью предложенной модели, позволяют существенно улучшить соотношения «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность» на уровне страны по сравнению с вариантами размещения озимой пшеницы, практиковавшимися последние 13 лет.

2. Расширение посевных площадей озимой пшеницы за счет областей, характеризующихся неблагоприятным соотношением «риск недобора урожая – среднегодовая урожайность», увеличивает ее себестоимость на уровне страны, что является одним из факторов ухудшения экономической доступности продуктов питания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Markowitz H. Portfolio selection // The J. Finance. — 1952. — 7, N 1. — P. 77–91. — http://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf.
2. Uryasev S. Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications // Financ. Eng. News. — 2000. — N 14. — P. 1–5.
3. Rockafellar R. T., Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk // J. Risk. — 2000. — 2, N 3. — P. 21–41.
4. Rockafellar R. T., Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distributions // J. Bank. and Finance. — 2002. — 26. — P. 1443–1471.
5. American optimal decisions portfolio safeguard (PSG) in windows shell environment: Basic principles. — Gainesville, FL: AORDA, 2011. — 260 p.
6. American optimal decisions optimization and risk management case studies with portfolio safeguard (PSG) in Windows shell environment. — Gainesville, FL: AORDA, 2010. — 528 p.
7. Рослинництво України. Стат. зб. — 2013. — 180 с.

Поступила 25.07.2013