УДК 004.94

Я.А. Калиновский[1], д-р техн. наук,
Ю.Е. Бояринова[1,2], канд. техн. наук, **Т.В. Синькова**[1], **А.С. Сукало**[1], аспирантка
[1] Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н. Шпака, 2, тел. 4542138, e-mail: kalinovsky@i.ua),
[2] Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03113, Киев, пр-т Победы, 37, e-mail: ub@ua.fm)

Представление тригонометрических функций в числовой системе обобщенных кватернионов

Построены представления тригонометрических функций от обобщенного кватерниона на основе метода ассоциированной системы дифференциальных уравнений.

Побудовано зображення тригонометричних функцій від узагальненого кватерніону за методом асоційованної системи диференціальних рівнянь.

К л ю ч е в ы е с л о в а: гиперкомплексная числовая система, экспоненциальная функция, тригонометрическая функция, синус, косинус, обобщенный кватернион, базис, таблица Кели.

Впервые обобщенные кватернионы использованы К. Геделем в 1949 г. для представления пространственно-временных групп [1]. В пространстве с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - (wdt + wdz)^2, \tag{1}$$

где $w = w(t, x, y, z)$ — функция декартовых пространственно-временных координат, решения уравнений Эйнштейна гравитационного поля представлены с помощью обобщенных кватернионов.

Исследованию обобщенных кватернионов посвящены также работы [2—7]. В работе [8] обобщенные кватернионы предлагается использовать для повышения стойкости электронной цифровой подписи в алгоритмах RSA. Для этого требуется создание представлений различных нелинейностей от обобщенного кватерниона. В работе [9] рассмотрено построение представлений экспоненциальной и логарифмической функций от обобщенных кватернионов с помощью метода ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений [10—13].

Построим представления тригонометрических функций в числовой системе обобщенных кватернионов в виде гиперкомплексных функций с возможностью их использования для повышения эффективности при решении различных прикладных задач.

Обобщенные кватернионы — это гиперкомплексные числа вида

$$A=\sum_{i=1}^{4} a_i e_i, \tag{2}$$

где a_i — действительные числа; e_i, $i=1,\ldots,4$, — базисные элементы, удовлетворяющие следующей таблице Кели, в которой, $\alpha,\beta \in R$:

$H_{\alpha\beta}$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-\alpha e_1$	e_4	$-\alpha e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-\beta e_1$	βe_2
e_4	e_4	αe_3	$-\beta e_2$	$-\alpha\beta e_1$

. (3)

Гиперкомплексное произведение двух обобщенных кватернионов, A и B, в соответствии с (3) имеет вид

$$AB=\left(\sum_{i=1}^{4} a_i e_i \sum_{i=1}^{4} b_i e_i\right)=$$

$$=(a_1b_1-\alpha\, a_2b_2-\beta\, a_3b_3-\alpha\beta\, a_4b_4)\, e_1+(a_1b_2+a_2b_1+\beta\, a_3b_4-\beta\, a_4b_3)\, e_2+$$

$$+(a_1b_3-\alpha\, a_2b_4+a_3b_1+\alpha\, a_4b_2)\, e_3+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)\, e_4. \tag{4}$$

Как видно из (3), произведение (4) — некоммутативное.

Трансцендентные функции от гиперкомплексного переменного. Первым предложил конструктивное определение трансцендентных функций от гиперкомплексного переменного В. Гамильтон. В работе [14] он предлагает определить экспоненциальную функцию от кватернионной переменной A как сумму степенного ряда

$$\mathrm{Exp}(A)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{i!}, \quad A^0=1, \quad 0!=1. \tag{5}$$

Со временем этот подход был обобщен на другие трансцендентные функции: тригонометрические синус и косинус, гиперболические синус и косинус и другие, и сейчас является общепринятым [15—18]. Следуя этой традиции, определим синус и косинус от обобщенного кватерниона как суммы степенных рядов, соответствующих этим функциям:

$$\mathrm{Sin}\,(A)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\,\frac{A^{2i+1}}{(2i+1)!}, \tag{6}$$

$$\mathrm{Cos}\,(A)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\,\frac{A^{2i}}{(2i)!}\,. \tag{7}$$

Легко установить, что ряды (5)—(7) сходятся абсолютно. Действительно, например для ряда (5) справедливо равенство

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(A)^s}{s!}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{4}\frac{P_{si}(a_1,\ldots,a_4)}{s!}\,e_i,$$

где P_{si} — полином степени s, что означает абсолютную сходимость этого ряда. С помощью формул (6) и (7) можно определить значения функций для конкретных обобщенных кватернионов. Так, например, $\mathrm{Sin}\,(0)=0$, а $\mathrm{Cos}\,(0)=1$. Как следует из формулы умножения обобщенных кватернионов (4), квадрат векторной части кватерниона имеет вид

$$(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)^2=-(\alpha\, a_2^2+\beta\, a_3^2+\alpha\beta\, a_4^2)=-\Delta. \tag{8}$$

Величина $\Delta=\alpha\, a_2^2+\beta\, a_3^2+\alpha\beta\, a_4^2$ называется дискриминантом обобщенного кватерниона. Подставляя (8) в (6) и (7), получаем следующее:

1) если $\Delta>0$, то

$$\mathrm{Sin}\,(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)=\frac{a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4}{\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{\Delta}), \tag{9}$$

$$\mathrm{Cos}\,(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)=\mathrm{ch}\,(\sqrt{\Delta}); \tag{10}$$

2) если $\Delta<0$, то

$$\mathrm{Sin}\,(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)=\frac{a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4}{\sqrt{|\Delta|}}\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{|\Delta|}), \tag{11}$$

$$\mathrm{Cos}\,(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)=\mathrm{ch}\,(\sqrt{|\Delta|}). \tag{12}$$

Таким образом, построение представления тригонометрических функций от обобщенного кватерниона сводится к представлению (6) и (7) в виде гиперкомплексных функций вида

$$F(X)=\sum_{i=1}^{4}f_i(x_1,x_2,x_3,x_4)\,e_i,$$

где $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — вещественные функции от вещественных аргументов. В некоторых простых случаях это можно сделать непосредственно [10], но в общем случае необходима разработка специальных методов.

Построение представлений тригонометрических функций от обобщенного кватерниона с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений. Основные положения метода построения представлений трансцендентных функций от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений подробно изложены в работах [10—13, 19].

Поскольку ряды (6) и (7) абсолютно сходящиеся, их можно почленно дифференцировать. Запишем эти ряды в виде

$$\mathrm{Sin}(At) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(At)^{2i+1}}{(2i+1)!}, \tag{13}$$

$$\mathrm{Cos}(At) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(At)^{2i}}{(2i)!}\,. \tag{14}$$

Двойное дифференцирование по скалярной переменной t приводит к уравнениям

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Sin}(At) = -A^2\mathrm{Sin}(At), \quad \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Cos}(At) = -A^2\mathrm{Cos}(At).$$

Как видим, тригонометрические функции от обобщенного кватерниона — это гиперкомплексные функции, являющиеся решениями дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2}{dt^2} X(t) = -A^2 X(t) \tag{15}$$

при соответствующих начальных условиях, которыми могут быть значения сумм рядов (13) или (14) при двух значениях обобщенного кватерниона A и скалярной переменной t.

Разбив уравнение (15) на компоненты при одинаковых базисных элементах, получим систему четырех линейных дифференциальных уравнений от вещественных аргументов с вещественными коэффициентами. Решение этой системы можно получить на основе теории систем линейных дифференциальных уравнений в зависимости от вида ее характеристических корней. Каждое частное решение системы является компонентом при соответствующем базисном элементе решения уравнения (15), определяя тем самым соответствующую функцию от гиперкомплексной переменной.

Гиперкомплексное уравнение (15) преобразуется в систему из четырех вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее решение представляет собой вектор-функцию $\mathbf{X} = X(t, C_1, C_2, ..., C_8)$. Произвольные постоянные интегрирования $C_1, C_2, ..., C_8$ можно определить с помощью значений тригонометрических функций в двух точках. Для упрощения вычислений целесообразно в качестве одной из этих точек выбрать значение тригонометрической функции в начале координат, которое совпадает со значением в нулевой точке той же тригонометрической функции вещественной переменной. В качестве второй точки целесообразно выбрать точку, определяемую, например, начальными условиями (9)—(12).

Построение представления тригонометрического синуса от обобщенного кватерниона. Подставив (2) и $X = \sum_{i=1}^{4} x_i(t)\, e_i$ в определяющее уравнение (15), выполнив умножение в соответствии с (3) и приравняв коэффициенты при одинаковых базисных элементах, получим следующую систему четырех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = -(a_1^2 - \alpha\, a_2^2 - \beta\, a_3^2 - \alpha\beta\, a_4^2)\, x_1(t) + 2\alpha\, a_1 a_2 x_2(t) +$$

$$+ 2\beta\, a_1 a_3 x_3(t) + 2\alpha\beta\, a_1 a_4 x_4(t),$$

$$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = -2 a_1 a_2 x_1(t) - (a_1^2 - \alpha\, a_2^2 - \beta\, a_3^2 - \alpha\beta\, a_4^2)\, x_2(t) +$$

$$+ 2\beta\, a_1 a_4 x_3(t) - 2\beta\, a_1 a_3 x_4(t), \tag{16}$$

$$\frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} = -2 a_1 a_3 x_1(t) - 2\alpha\, a_1 a_4 x_2(t) - (a_1^2 - \alpha\, a_2^2 - \beta\, a_3^2 - \alpha\beta\, a_4^2)\, x_3(t) +$$

$$+ 2\alpha\, a_1 a_2 x_4(t),$$

$$\frac{d^2 x_4(t)}{dt^2} = -2 a_1 a_4 x_1(t) + 2\, a_1 a_3 x_2(t) - 2 a_1 a_2 x_3(t) -$$

$$-(a_1^2 - \alpha\, a_2^2 - \beta\, a_3^2 - \alpha\beta\, a_4^2)\, x_4(t).$$

Характеристическое уравнение правой части (16) имеет четыре двойных корня:

$$\lambda_1 = \sqrt{\Delta} + i a_1,\ \lambda_2 = -\sqrt{\Delta} + i a_1,\ \lambda_3 = \sqrt{\Delta} - i a_1,\ \lambda_4 = -\sqrt{\Delta} + i a_1,\ i^2 = -1.$$

Полное решение $\mathbf{X}(t)$ системы (16) состоит из четырех компонентов, $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$, каждый из которых имеет четыре частных решения вида

$$x_k(t)=\sum_{s=1}^{4} x_{ks}(t)=\sum_{s=1}^{4}(C_{k,2s-1}+C_{k,2s}t)\,e^{\lambda_s t}. \tag{17}$$

Таким образом, решения системы (16) имеют 32 произвольных постоянных. Из них 24 — зависимые или нулевые, а остальные 8 — свободные, значения которых можно найти с помощью двух начальных значений. В качестве начальных можно принять найденные суммы степенного ряда для синуса:

1) $\mathrm{Sin}(0)=0$;

2) при $t=1\,\mathrm{Sin}(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)=\dfrac{a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4}{\sqrt{|\Delta|}}\,\mathrm{sh}(\sqrt{|\Delta|})$.

Применяя к (16) обычную процедуру решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, получаем следующие значения произвольных постоянных:

$$C_{k,2s}=0,\ k,s=1,\dots,4;\ C_{11}=C_{15}=1,\ C_{13}=C_{17}=-1;$$

$$C_{k,2s-1}=\frac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}},\quad k=2,3,4;\quad s=1,\dots,4.$$

Подставив значения произвольных постоянных в (17) и выполнив упрощающие преобразования, получим следующее представление синуса от обобщенного кватерниона:

$$\mathrm{Sin}(At)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin a_1t\,(e^{\sqrt{|\Delta|}\,t}+e^{-\sqrt{|\Delta|}\,t})\,e_1+\frac{\cos a_1t}{\sqrt{|\Delta|}}(e^{\sqrt{|\Delta|}\,t}-e^{-\sqrt{|\Delta|}\,t})(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)\right]. \tag{18}$$

Построение представления тригонометрического косинуса от обобщенного кватерниона отличается от построения представления синуса только начальными условиями:

1) $\mathrm{Cos}(0)=1$;

2) при $t=1$ $\mathrm{Cos}(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)=\mathrm{ch}(\sqrt{|\Delta|})$.

Подставляя эти значения в решения (16), получаем следующие значения произвольных постоянных:

$$C_{k,2s}=0,\ k,s=1,\dots,4;\ C_{1,2s-1}=1,\ s=1,\dots,4,$$

$$C_{k1}=C_{k5}=-\frac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}},\quad C_{k3}=C_{k7}=\frac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}},\quad k=2,3,4\,.$$

Подставив значения произвольных постоянных в решения (17) и выполнив упрощающие преобразования, получим следующее представление косинуса от обобщенного кватерниона:

$$\mathrm{Cos}\,(At)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos a_1 t\,(e^{\sqrt{|\Delta|}\,t}+e^{-\sqrt{|\Delta|}\,t})\,e_1-\frac{\sin a_1 t}{\sqrt{|\Delta|}}(e^{\sqrt{|\Delta|}\,t}-e^{-\sqrt{|\Delta|}\,t})(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)\right]. \tag{19}$$

Выводы

Полученные представления тригонометрических функций от обобщенного кватерниона позволяют строить представления для широкого класса гиперкомплексных числовых систем [5], выбирая различные конкретные значения α и β. Положим в (3) $\alpha=\beta=1$. С учетом формулы Эйлера

$$e^{\sqrt{|\Delta|}\,t}+e^{-\sqrt{|\Delta|}\,t}=2\mathrm{ch}\sqrt{|\Delta|}\,t\,,\quad e^{\sqrt{|\Delta|}\,t}-e^{-\sqrt{|\Delta|}\,t}=2\mathrm{sh}\sqrt{|\Delta|}\,t\,.$$

Тогда (18) и (19) примут вид

$$\mathrm{Sin}\,(At)=\frac{1}{2}\left[\sin a_1 t\,\mathrm{ch}\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}\;te_1\;+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos a_1 t}{\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}}\,\mathrm{sh}\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}\;t\,(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)\right],$$

$$\mathrm{Cos}\,(At)=\frac{1}{2}\left[\cos a_1 t\,\mathrm{ch}\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}\;te_1\;-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin a_1 t}{\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}}\,\mathrm{sh}\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}\;t\,(a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)\right].$$

Это есть представления тригонометрических функций для обычных кватернионов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Godel C.* An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein`s Field Equations of Gravitation // Rev. Mod. Phys. — 1949. — Vol. 21, No. 3. — P. 447—450.
2. *Клипков С.И.* Обощенный анализ матричных представлений ассоциативных гиперкомплексных числовых систем, используемых в задачах энергетики // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2014. —**16**, № 2. — С. 28—41.
3. *Alagos Ya.,Oral K. At H., Yuce S.* Split Quaternion Matrice // Miscolc Mathematical Notes. — 2012. — Vol. 13, No. 2. — P. 223—232.
4. *Janovska D., Opfer G.* Linear equations and the Kronecker product in coquaternions // Mitt. Math. Ges. Hamburg. — 2013. — Vol. 33. — P. 181—196.
5. *Каліновський Я.О., Боярінова Ю.М., Туренко А.С.* Дослідження зв'язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння Грасмана—Кліфорда // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2015. — **17**, № 1. — С. 36—45.
6. *Mamagami A.B., Jafari M.* Some Notes on Matrix of Generalized Quaternion // International Research Journal of Applied and Basic Sciences. — 2013. — Vol. 7, No. 14. — P. 1164—1171.
7. *Калиновский Я.А., Туренко А.С., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В.* Свойства обобщенных кватернионов и их связь с процедурой удвоения Грассмана—Клиффорда // Электрон. моделирование. — 2015. — **37**, № 2. — С. 17—26.
8. *Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А., Сукало А.С.* Построение алгоритма цифровой подписи с использованием функций от обобщенных кватернионов // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2015. — **17**, № 3. — С. 48—55.
9. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Сукало А.С.* Математическое моделирование представлений экспоненциальной и логарифмической функций в гиперкомплексной числовой системе обобщенных кватернионов // Там же. — 2015. — **17**, № 4.— С. 11—20.
10. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения.— Киев: Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины, 2010. — 389 с.
11. *Каліновський Я.О.* Методи комп'ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: Дис. … д-ра техн. наук Ін-т пробл. реєстрації інформації НАН України. — Київ, 2007. — 417 с.
12. *Калиновский Я.А.* Исследование свойств изоморфизма квадриплексных и бикомплексных числовых систем // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — **5**, № 1. — С. 69—73.
13. *Калиновский Я.А., Роенко Н.В., Синьков М.В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178—181.
14. *Hamilton W.R.* Researches respecting Quaternions: First Series // Transactions of the Royal Irish Academy. — 1848. — Vol. 21, part1.— P. 199—296.
15. *Kähler U.* Die Anwendung der hyperkomplexen Funktionentheorie auf die Losung partieller Differentialgleichungen. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://www. tu-chemnitz.de/mathematik/ prom_habil/promint.pdf (1998).
16. *Brackx F.* The Exponential Function of a Quaternion Variable // Applicable Analysis. — 1979. — Vol. 8. — P. 265—276.
17. *Scheicher K., Tichy R.F., Tomantschger K.W.* Elementary Inequalities in Hypercomplex Numbers // Anzeiger. — 1997. — Abt. II. — No. 134. — S. 3—10.
18. *Holin H.* The Quaternionic Exponential and beyond. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.bigfoot.com/~Hubert.Holin.

19. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Синькова Т.В.* Некоторые линейные и нелинейные операции обобщенных комплексных чисел // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2002. — **4**, № 3. — С. 55—61.

Ya.A. Kalinovsky, Y.E. Boyarinova, T.V. Sinkova, A.S. Sukalo

MATHEMATICAL MODELING OF THE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS IN A NUMERICAL SYSTEM OF GENERALIZED QUATERNIONS

Representations of the trigonometric functions of the generalized quaternion based on the method of associated system of differential equations have been constructed

K e y w o r d s: hypercomplex number system, exponential function, trigonometric function, sinus, cosinus, generalized quaternion, basis, Cayley's table.

REFERENCES

1. Godel, C. (1949), An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein`s Field Equations of Gravitation, *Rev. Mod. Phys*., Vol. 21, no. 3, pp. 447-450.
2. Klipkov, S.I. (2014), "Generalized analysis of matrix representations of associative hypercomplex number systems used in the energy problems", *Reyestratsiya, zberigannya i obrobka danykh*, Vol. 16, no. 2, pp. 28-41.
3. Alagos, Ya., Oral, K. At H. and Yuce, S. (2012), Split Quaternion Matrices, *Miscolc Mathematical Notes*, Vol. 13, no. 2, pp. 223-232.
4. Janovska, D. and Opfer, G. (2013), "Linear equations and the Kronecker product in coquaternions", *Mitt. Math. Ges Hamburg,* Vol. 33, pp. 181-196.
5. Kalinovsky, Ya.A., Boyarinova, Yu.E. and Turenko, A.S. (2015), "Research relations between generalized quaternion and Grassmann-Clifford doubling procedures", *Reyestratsia*, *zberigannya i obrobka danykh,* Vol. 17, no. 1, pp. 36-45.
6. Mamagami, A.B. and Jafari, M. (2013), "Some Notes on Matrix of Generalized Quaternion", *International Research Journal of Applied and Basic Sciences,* Vol. 7, no. 14, pp. 1164-1171.
7. Kalinovsky, Ya.A., Turenko, A.S., Boyarinova, Yu.E. and Khitsko, Ya.V. (2015), "Properties of generalized quaternions and their relation with the Grassmann-Clifford doubling procedure", *Elektronnoe modelirovanie,* Vol. 37, no. 2, pp. 17-26.
8. Boyarinova, Yu.E., Kalinovsky, Ya.A. and Sukalo, A.S. (2015), "Construction of digital signature algorithm using functions of generalized quaternions", *Reyestratsia*, *zberigannya i obrobka danykh,* Vol. 17, no. 3, pp. 48-55.
9. Kalinovsky, Ya.A., Boyarinova, Yu.E. and Sukalo, A.S. (2015), "Mathematical modeling of representations of exponential and logarithmic functions in hypercomplex numerical system of generalized quaternions", *Reyestratsia*, *zberigannya i obrobka danykh,* Vol. 17, no. 4, pp. 11-20.
10. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.O. and Boyarinova, Yu.E. (2010), *Konechnomernye giperkompleksnye chislovye sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya* [Finite-dimensional hypercomplex number systems. Fundamentals of the theory. Applications], Institut problem registratsii informatsii NAN Ukrainy, Kyiv, Ukraine.
11. Kalinovsky, Ya.O. (2007), "Methods of computer modeling and calculations using hypercomplex number systems", Thesis for Dr. Sci. (Tech.) degree, Institute for Problems of Information Recording of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine.

12. Kalinovsky, Ya.A. (2003), "Study of isomorphism properties of quadriplex and bicomplec numerical systems", *Reyestratsia*, *zberigannya i obrobka danykh,* Vol. 5, no. 1, pp. 69-73.
13. Kalinovsky, Ya.A., Roenko, N.V. and Sinkov, M.V. (1996), "Methods for constructing non-linear functions in extensions of complex numbers", *Kibernetika i sistemnyi analiz,* no. 4, pp. 178-181.
14. Hamilton, W.R. (1848), "Researches respecting quaternions: First series", *Transactions of the Royal Irish Academy,* Vol. 21, Part 1, pp. 199-296.
15. Kähler, U. (1998), "Die Anwendung der hyperkomplexen Funktionentheorie auf die Losung partieller Differentialgleichungen", available at: www.tu-chemnitz.demathematik/ prom_habil/ promint.pdf (1998).
16. Brackx, F. (1979), "The Exponential Function of a Quaternion Variable", *Applicable Analysis,* Vol. 8, pp. 265-276.
17. Scheicher, K., Tichy, R.F. and Tomantschger, K.W. (1997), "Elementary Inequalities in Hypercomplex Numbers", *Anzeiger,* Vol. II, no. 134, pp. 3-10.
18. Holin, H. "The quaternionic exponential and beyond", available at: http://www.bigfoot.com/ ~Hubert.Holin.
19. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.A. and Sinkova, T.V. (2002), "Some linear and non-linear operation of generalized complex numbers", *Reyestratsia*, *zberigannya i obrobka danykh,* Vol. 4, no. 3, pp. 55-61.

Поступила 22.03.16;
после доработки 21.04.16

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины; доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

СИНЬКОВА Татьяна Владимировна, науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1992 г. окончила Национальный технический университет «Киевский политехнический ин-т». Область научных исследований — математическое моделирование и вычислительные процессы.

СУКАЛО Алина Сергеевна, аспирантка Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 2013 г. окончила Житомирский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование и вычислительные процессы.