

УДК 534.222.2

ВПЛИВ ПОТОКУ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА НА КОЛИВАННЯ ОБОЛОНКИ

Ю. М. ДУДЗІНСЬКИЙ

Одеський національний політехнічний університет

Одержано 05.02.2010

Розглянуто вимушені осесиметричні коливання циліндричної оболонки середнього видовження, розташованої в потоці вдалині від зони крайового ефекту. Отримано вираз для згину оболонки як функції її параметрів і потоку для двох типів крайових умов – шарнірного закріплення й ковзного защемлення. Показано, що у випадку рухомого середовища, яке оточує оболонку, амплітуда її коливань при інших рівних умовах завжди менша, ніж у нерухомому середовищі.

Рассмотрены вынужденные осесимметричные колебания цилиндрической оболочки среднего удлинения, расположенной в потоке вдали от зоны краевого эффекта. Получены выражения для изгиба оболочки как функции ее параметров и потока для двух типов крайевых условий – шарнирного закрепления и скользящего защемления. Показано, что в случае подвижной среды, окружающей оболочку, амплитуда ее колебаний при других равных условиях всегда меньше, чем в неподвижной среде.

The paper deals with considering of induced axisymmetric vibration of a cylindrical shell with medium elongation situated in a flow far from zone of edge effect. The expressions for shell's bending as a function of its parameters and and the flow has been obtained for two types of boundary conditions, namely, the hinging and sliding fixation. Shell vibration amplitude in the case of moving surrounding continuum is shown to be always less than that in stationary medium.

ВСТУП

Динамічні задачі, орієнтовані на різноманітні запити й потреби техніки, традиційно займають значне місце в дослідженнях механіки деформованого твердого тіла [1–4]. Складність дослідження поведінки конструкцій при періодичному або імпульсному зовнішньому впливі пояснюється, зокрема, взаємопов'язаністю процесів навантаження й деформування. Дослідження показали, що тонкостінні металеві, композитні [5–7] або так звані “м'які” оболонки (надувні, занурені струмені [8–10]) під дією акустичних або механічних хвиль активно здатні істотно впливати на потоки оточуючого суцільного середовища. Разом з тим, у багатьох практичних випадках згадані акустичні сигнали генеруються потоками газу або рідини усередині (ззовні) оболонки. Часто задачі про вимушені осесиметричні коливання циліндричних оболонок, які перебувають під дією акустичного поля тисків, розв'язуються методом Фур'є [5–7]. Ряди для функції прогину, які при цьому використовуються, мають досить повільну збіжність: для того, щоб адекватно описати вплив різних типів закріплень на кінцях іноді потрібно залучати кілька десятків членів ряду. Це обумовлено тим, що для осесиметричних коливань оболонки власні частоти ω_k з відносно малими числами згинаючих півхвиль k практично залишаються незмінними. Тому результати таких обчи-

слень зручно застосовувати саме для оболонок з видовженням, яке відповідає великим k . Однак у техніці не менш часто використовуються оболонки середньої довжини, для яких згадана схема працює гірше.

Цю статтю присвячено дослідженню впливу потоку суцільного середовища на амплітуду коливань згину бічної поверхні циліндричної оболонки. Рівняння вимушених коливань проінтегровано в замкнутому вигляді. Отриманий розв'язок може бути використаний як тестовий при порівнянні з наближеними розв'язками у більш складних задачах цього типу.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ Й ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Розглядаються вимушені осесиметричні коливання циліндричної оболонки середньої довжини, що перебуває під дією акустичного поля тисків:

$$\delta p = \frac{1}{2} \delta p_k \left\{ \exp \left[\frac{i\Omega_k z}{c(1-M)} \right] + \exp \left[-\frac{i\Omega_k z}{c(1+M)} \right] \right\} \exp(i\Omega_k t), \quad (1)$$

$$\Omega_k = (1 - M^2) \frac{k\pi c}{2\ell}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (2)$$

У цих виразах z – координата вздовж осі; ℓ – довжина циліндра; t – час; c – швидкість поширення

звуку; v – швидкість потоку газу всередині оболонки; $M = v/c$ – число Маха; Ω_k – кругова акустична частота; δp_k – збурення тиску у вхідному перерізі труби.

Лінеаризований вираз для навантаження, що діє на оболонку, можна записати у вигляді

$$p = p_0 + \delta p - \rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$$

де p_0 , v_0 , ρ_0 – гідростатичний тиск, швидкість і густина суцільного середовища в незбуреному потоці відповідно; φ – потенціал швидкості. Однак для простоти прийнемо

$$p \approx \delta p.$$

Рівняння осесиметричних коливань циліндричної оболонки мають вигляд [5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{h^2}{12r} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) w = -\frac{1 - \nu^2}{Eh} q_z, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{h^2}{12r} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) u + \frac{h^2}{12r^2} \left(r^2 \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{1}{r^2} + \frac{12}{h^2} \right) w = \frac{1 - \nu^2}{Eh} q_r, \quad (4)$$

де h , r – товщина стінки й середній радіус оболонки; E , ν – модуль пружності й коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; q_z , q_r – відповідно розтягуючі й згинаючі сили, які діють на одиницю площі оболонки. Розглядаємо оболонку середньої довжини ($\pi r/\ell \sim 1$), причому домовимося, що нехтування поздовжніми силами інерції ($q_z = 0$) не призводить у нашому випадку до істотної похибки. Опустивши у рівнянні (3) третій доданок, який має порядок $(h/\ell)^2$ у порівнянні з другим, при відсутності осьових сил отримаємо співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\nu}{r} w.$$

Підставимо цю залежність у рівняння (4), в якому знехтуємо другим доданком у другій дужці як малою порядку $(h/r)^2$. Остаточно приходимо до виразу

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + D \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{Eh}{r^2} w = q_r, \quad (5)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Задача буде розглядатись для двох типів граничних умов – шарнірного закріплення й ковзного защемлення країв оболонки, які відповідають кріпленням, що часто використовуються в реальних конструкціях.

2. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

Очевидно, що поза зонами крайового ефекту, де функції прогину мають вигляд, аналогічний функції тиску (1), роллю перших двох доданків у виразі (5) можна знехтувати. У зоні ж крайового ефекту, де показник змінюваності великий ($\lambda \sim 1/\sqrt{hr}$), другий доданок у $\nu h/r$ раз менший, ніж перший. Тому вважаємо, що досить точно описати згинаючі коливання по всій довжині оболонки можна спрощеним рівнянням

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{Eh}{r^2} w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta p, \quad (6)$$

де ρ – густина матеріалу оболонки.

Прийнемо хвильовий розв'язок у вигляді

$$w = (w'_k + iw''_k) \exp(i\Omega_k t). \quad (7)$$

Тоді рівняння (6) з урахуванням співвідношень (1) і (2) набуває форми

$$\frac{d^4 w'_k}{dz^4} + 4\beta_k^4 w'_k = \frac{\delta p_k}{2D} [\cos(1 + M)\alpha_k z + \cos(1 - M)\alpha_k z], \quad (8)$$

$$\frac{d^4 w''_k}{dz^4} + 4\beta_k^4 w''_k = \frac{\delta p_k}{2D} [\sin(1 + M)\alpha_k z - \sin(1 - M)\alpha_k z],$$

$$\beta_k^4 = \frac{\rho h}{4D} (\omega^2 - \Omega_k^2), \quad \omega^2 = \frac{R}{\rho r^2}, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{2\ell}.$$

Припускаючи, що $\beta_k^4 > 0$, одержуємо такі розв'язки рівнянь (8) [11]:

$$w'_k = \exp(\beta_k z) [C'_1 \cos(\beta_k z) + C'_2 \sin(\beta_k z)] + \frac{\exp(-\beta_k z)}{2} [C'_3 \cos(\beta_k z) + C'_4 \sin(\beta_k z)] + \frac{\delta p_k}{8D\beta_k^4} [\cos(1 + M)\alpha_k z + \cos(1 - M)\alpha_k z], \quad (9)$$

$$w''_k = \exp(\beta_k z) [C''_1 \cos(\beta_k z) + C''_2 \sin(\beta_k z)] + \frac{\exp(-\beta_k z)}{2} [C''_3 \cos(\beta_k z) + C''_4 \sin(\beta_k z)] + \frac{\delta p_k}{8D\beta_k^4} [\sin(1 + M)\alpha_k z - \sin(1 - M)\alpha_k z]. \quad (10)$$

В обох виразах (9) і (10) доданки з коефіцієнтами $D r^2 (1 \pm M)^4 / (Eh)$ відкинуто як малі порядку

$(\ell_1 k / \ell)^4$ у порівнянні з одиницею ($\ell_1 \sim \sqrt{hr}$ – ширина зони крайового ефекту).

Визначимо коефіцієнти C_1', \dots, C_4'' для крайових умов шарнірного закріплення й ковзного защемлення відповідно:

$$w' = \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = 0, \quad z = \{0, \ell\},$$

$$w'' = \frac{\partial^2 w''}{\partial z^2} = 0, \quad z = \{0, \ell\}.$$

Враховуючи співвідношення (7) і відкидаючи малі члени, пов'язані з впливом країв на далекі від них ділянки поверхні циліндру, одержуємо для шарнірного закріплення:

$$w'_k = \frac{\delta p_k}{8D\beta_k^4} \left\{ \cos(1+M)\alpha_k z + \cos(1-M)\alpha_k z - 2 \exp(-\beta_k z) \left[\cos(\beta_k z) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right)^2 (1+M^2) \sin(\beta_k z) \right] + 2(-1)^{(k+3)/2} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right)^2 M \exp[\beta_k(z-\ell)] \times \sin\left(\frac{Mk\pi}{2}\right) \sin[\beta_k(\ell-z)] \right\}, \quad (11)$$

$$w''_k = \frac{\delta p_k}{8D\beta_k^4} \left\{ \sin(1+M)\alpha_k z - \sin(1-M)\alpha_k z - 2(-1)^{(k+3)/2} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right)^2 M \exp[\beta_k(z-\ell)] \times \cos\left(\frac{Mk\pi}{2}\right) \sin[\beta_k(\ell-z)] \right\}, \quad (12)$$

а у випадку ковзного защемлення:

$$w'_k = \frac{\delta p_k}{8D\beta_k^4} \left\{ \cos(1+M)\alpha_k z + \cos(1-M)\alpha_k z - 2 \exp(-\beta_k z) [\cos(\beta_k z) + \sin(\beta_k z)] + 2(-1)^{(k+3)/2} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \exp[\beta_k(z-\ell)] \times \cos\left(\frac{Mk\pi}{2}\right) \sin[\beta_k(\ell-z)] \right\}, \quad (13)$$

$$w''_k = \frac{\delta p_k}{8D\beta_k^4} \left\{ \sin(1+M)\alpha_k z - \sin(1-M)\alpha_k z - 2M \exp(-\beta_k z) \sin(\beta_k z) - 2(-1)^{(k+3)/2} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) M \exp[\beta_k(z-\ell)] \times \sin\left(\frac{Mk\pi}{2}\right) \sin[\beta_k(\ell-z)] \right\}. \quad (14)$$

3. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

У виразах для функцій прогину (11)–(14) доданки з коефіцієнтами $\exp[-\beta_k z]$ й $\exp[-\beta_k(z-\ell)]$, які описують крайовий ефект, швидко згасають до середини оболонки. З наближенням $\Omega_k \rightarrow \omega$ зона крайового ефекту розширюється. Отже, як впливає з рівняння (2), зі збільшенням швидкості потоку зона крайового ефекту звужується. Згідно з виразами (11)–(14) зсув фаз прогинів по довжині оболонки поза зонами крайового ефекту – лінійний і збігається з фазовим співвідношенням для функції тиску:

$$\varphi_k = M\alpha_k z, \quad \ell_1 \leq z \leq \ell - \ell_1.$$

Така поведінка – наслідок того, що у виразах для прогинів було відкинуто члени, що відповідають деформації по осі z як малі порядку $(k\ell_1/\ell)^4$ у порівнянні з одиницею.

Розглянемо випадок осесиметричних вимушених коливань циліндричної оболонки. При $M=0$ з виразів (12) і (14) випливає, що

$$\bar{w}''_k = 0.$$

Тоді при $M=0$ зі співвідношень (11) і (13) одержуємо для шарнірного закріплення:

$$\bar{w}'_k = \frac{\delta p_k}{4D\bar{\beta}_k^4} \left[\cos(\alpha_k z) - \exp(-\bar{\beta}_k z) \left(\cos(\bar{\beta}_k z) + \frac{\alpha_k^2}{2\bar{\beta}_k^2} \sin(\bar{\beta}_k z) \right) \right], \quad (15)$$

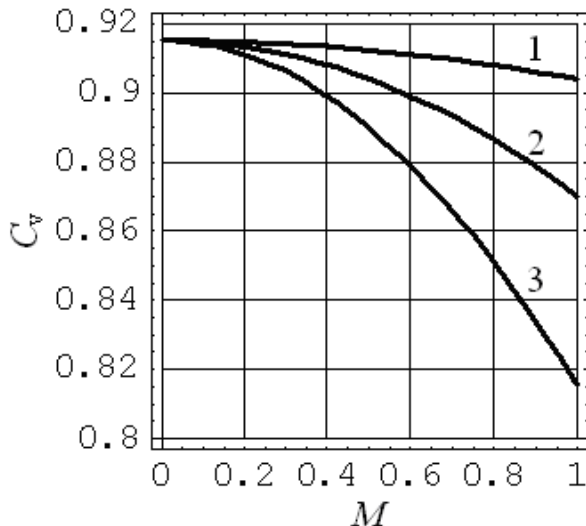


Рисунок. Залежність амплітуди згину краю оболонки від числа Маха

а для ковзного защемлення –

$$\begin{aligned} \bar{w}'_k = & \frac{\delta p_k}{4D\bar{\beta}_k^4} \left[\cos(\alpha_k z) - \right. \\ & - \exp(-\bar{\beta}_k z) (\cos(\bar{\beta}_k z) + \sin(\bar{\beta}_k z)) - \\ & - (-1)^{(k+3)/2} \left(\frac{\alpha_k}{\bar{\beta}_k} \right) \exp[\bar{\beta}_k(z - \ell)] \times \\ & \left. \times \sin[\bar{\beta}_k(\ell - z)] \right], \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\bar{\beta}_k^4 = \frac{\rho h}{4D} (\omega^2 - \bar{\Omega}_k^2); \quad \bar{\Omega}_k = \frac{k\pi c}{2\ell};$$

$\bar{\Omega}_k$ – частота акустичних хвиль у незбуреному суцільному середовищі.

Коефіцієнт впливу швидкості потоку на осесиметричні коливання згину циліндричної оболонки поза зоною крайового ефекту з урахуванням виразів (11) – (16) представимо так:

$$C_v = \frac{w'_k}{\bar{w}'_k} = \left(\frac{\bar{\beta}_k}{\beta_k} \right)^4 \cos(M\alpha_k z). \quad (17)$$

З урахуванням співвідношень (2) і (8) формула (17) набуває вигляду

$$C_v \approx \left[1 - 2M^2 \left(1 - \frac{M^2}{2} \right) \frac{\bar{\Omega}_k^2}{\omega^2 - \bar{\Omega}_k^2} \right] \times \cos(M\alpha_k z). \quad (18)$$

З останньої формули одержуємо

$$v \neq 0 \Rightarrow M > 0 \Rightarrow C_v = \frac{w'_k}{\bar{w}'_k} < 1.$$

Отже у випадку рухомого середовища амплітуда коливань оболонки завжди менша, ніж у при відсутності руху. На рисунку відображено розрахункові залежності $C_v(M)$ для випадків, коли довжина оболонки становить одну (крива 1), дві (крива 2) та три чверті (крива 3) довжини хвилі згину вздовж циліндра.

Для випадку, коли $\beta_k^4 < 0$, розв'язок рівнянь (8) можна одержати за аналогічною методикою. Це може мати місце при параметрах оболонки й газового потоку, які задовольняють умові

$$(1 - M^2)k\pi c > \frac{2\ell}{r} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c = \sqrt{\gamma RT_0}, \quad (19)$$

де γ – показник адиабати; T_0 – температура незбуреного газу; R – універсальна газова стала. Однак для розглянутої задачі цей випадок становить менший інтерес. Дійсно, для потоку газу з температурою $T_0 = 1000$ К, відповідно до співвідношення (19), розміри сталевий оболонки ($E_{T_0=1000 \text{ К}} = 1.5 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho_{T_0=1000 \text{ К}} = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³) повинні задовольняти умові $\ell/r < 0.2k$. Але тенденцію до виникнення поздовжніх коливань (1) в основному мають труби, в яких $\ell/r > 1$. З іншого боку, число півхвиль k не може бути більше одиниці, якщо труба відносно коротка. Лише при дуже високих температурах потоку, коли швидкість звуку c значно зростає, а модуль пружності E падає, можлива реалізація умови $\beta_k^4 < 0$.

ВИСНОВКИ

За інших рівних умов амплітуда вимушених коливань оболонки середнього видовження в потоці буде завжди меншою, ніж у випадку нерухомого середовища. При цьому зменшення амплітуди коливань оболонки пропорційне до числа Маха для потоку.

1. Экспериментальное исследование тонкостенных конструкций // Под ред. А. Н. Гузя и В. А. Заруцкого. – К.: Наук. думка, 1984. – 240 с.
2. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. – Л.: Судостроение, 1967. – 387 с.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966. – 627 с.

4. Ляхов В. Н., Поддубный В. В., Титаренко В. В. Воздействие ударных волн и струй на элементы конструкций.– М.: Машиностроение, 1989.– 392 с.
5. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины.– М.: Изд-во МГУ, 1969.– 695 с.
6. Guz A. N., Kubenko V. D., Babaev A. E. Dynamics of the system of shells interacting with a liquid // Int. Appl. Mech.– 2002.– **38**, N 3.– P. 260–301.
7. Koval'chuk P. S., Filin V. G. Circumferential traveling waves in field cylindrical shells // Int. Appl. Mech.– 2003.– **39**, N 2.– С. 192–196.
8. Дудзинский Ю. М., Дашенко А. Ф. Собственные колебания струйной оболочки в условиях гидростатического давления // Прикл. мех.– 2004.– **40**, N 12.– С. 92–98.
9. Дудзинский Ю. М., Назаренко О. А. Колебания затопленной осесимметричной струи-оболочки // Акуст. вісн.– 2001.– 3, N 4.– С. 27–35.
10. Дудзинский Ю. М., Попов В. Г. Вынужденные колебания осесимметричной затопленной струйной оболочки // Прикл. мех.– 2005.– **41**, N 4.– С. 92–98.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1976.– С. 472–473.