

**Ю.І. Сидоров, В.В. Козик**

Інститут економіки і менеджменту Національного університету «Львівська політехніка», Львів

## НЕЛІНІЙНИЙ РОЗВИТОК ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ В РАМКАХ МОДЕЛІ ЛОРЕНЦА



Розглянуто відомі теоретичні публікації, що стосуються моделі Лоренца, яка описує економічні процеси в рамках теорії детермінованого хаосу. Експериментально доведено, що в моделях економічних систем незначна зміна початкових параметрів може викликати зміну результатів на виході в декілька десятків разів, що підтверджує сильно нелінійний характер розвитку цих систем. Показано, що за різних співвідношень констант утворюються точкові аттрактори, дивний аттрактор і аттрактор типу «граничний цикл». Це розширює можливості моделі для практичного використання як прогностувального інструменту.

*Ключові слова:* детермінований хаос, модель Лоренца, розвиток економічних систем.

Незадовільні результати аналітичних прогнозувань кризових економічних явищ змушують фахівців звертатися до нетрадиційних методів опису динаміки розвитку і передбачення, зокрема до методів теорії детермінованого (невипадкового і закономірного) хаосу [1–3]. Така спроба датована ще 1988 роком [4], хоча ідею застосування цієї теорії в економічних дослідженнях у загальних рисах ще в 70-х роках ХХ ст. висунув відомий фізик, біолог і еколог *Р. Мей* [5].

Зазначимо, що теорія хаосу, яка ґрунтується на нелінійній динаміці, описує поведінку динамічних систем, які надзвичайно чутливі до початкових умов і минулого шляху розвитку для кожної системи окремо (*path dependence*). Цю особливість зазвичай називають «*ефектом метелика*»: випадковий помах крилець метелика в Гонконгу може викликати бурю у Флориді. Теорія є складовою частиною прикладної математики і застосовується в комп'ютерних науках, інженерії, фізиці, біології, мікробіоло-

гії, філософії, політології, метеорології і, зокрема, в економіці, особливо у фінансовій сфері. Доведено, наприклад, що випадкова поведінка траєкторії реального обмінного курсу долара пов'язана з хаотичною динамікою [6, 7] і може бути описана методами цієї дисципліни.

Однак до сьогодні у багатьох економістів традиційної школи нові методи викликають сумніви, неприйняття і є предметом дискусій. На їх думку, джерело економічних коливань потрібно шукати в екзогенних випадкових потрясіннях в лінійних економічних системах, які без цих збурень на шляху розвитку повинні прямувати до одної єдиної стабільної точки рівноваги. Сьогодні основну увагу економісти неокласичної школи приділяють виявленню закономірностей статичних станів господарської системи. Оскільки з економічної теорії час виключено, то передбачається, що всі досягнення неокласики придатні для наслідування як інженерні проекти у будь-який момент у будь-якому місці без урахування минулого шляху розвитку [8].

Фахівці з нелінійної динаміки стверджують, що навіть без зовнішніх збурень в економіці

усе одно проявляються коливання цін або інших економічних змінних [9–11], тобто економічні системи розвиваються нелінійно і неадекватно відповідають на зміну початкових умов внаслідок ендегенних причин.

Однією з таких нелінійних систем, яка спростовує спрощені погляди вітчизняних реформаторів на розвиток економіки, є проста класична система з трьох звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) *Е. Лоренца*, що застосовується у гідродинаміці [12]. Виявилось, що цією системою рівнянь можна описувати не тільки виникнення турбулентності, але й інші фізичні хаотичні явища [13]. Довгий час ця система використовувалася в чисто теоретичних дослідженнях нелінійної динаміки в області фізики, однак сьогодні її намагаються використовувати в теоретичних і прикладних економічних дослідженнях. Проте зазначимо, що потенціал системи Лоренца, як і інших багаточисельних інструментів теорії хаосу, в цій області ще повністю не використовується [14].

Оскільки система Лоренца серед економістів мало відома, то висвітлення результатів теоретичних досліджень для подальшої розробки практичної прогнозувальної методики нелінійного розвитку української економіки ми вважаємо актуальною задачею. Метою нашої роботи є аналіз відомих досліджень, що стосуються системи Лоренца з економічного погляду, і експериментальне дослідження деяких особливостей системи, відсутніх у літературі.

Наведемо систему Лоренца у класичному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -aX + aY \\ \frac{dY}{dt} &= rX - Y - XZ, \\ \frac{dZ}{dt} &= -bZ + XY \end{aligned} \quad (1)$$

де  $X, Y, Z$  – незалежні змінні;  $a, r, b$  – дійсні позитивні параметри.

При фізичних дослідженнях виникнення турбулентності потоків вважалося, що змінна  $X$  є

швидкість конвективного обміну: змінні  $Y$  і  $Z$  – це відповідно горизонтальна і вертикальна варіації температури; три параметри  $a, r$  і  $b$  пропорційні відповідно числу Прандтля, числу Релея ( $r$  вводить в систему, що розвивається, позитивний зворотний зв'язок) і деякому коефіцієнту, який відбиває фізичні властивості області, що розглядається.

Система рівнянь Лоренца відноситься до задачі взаємодії трьох тіл. Вони взагалі не інтегруються і багаточисельні спроби звести системи цих рівнянь до таких, що інтегруються, виявилися безрезультатними. Ці спроби були припинені *Брунсом* і *Пуанкаре* ще наприкінці XIX ст. Саме тому економіку ще іноді називають *системою, що не інтегрується за Пуанкаре*.

В економічних дослідженнях змінним і параметрам цих систем рівнянь надавали різного змісту. Зокрема, в роботі [15] система Лоренца представлена як функція розподілу попиту і має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -Q + F \\ \frac{\delta p}{dt} &= p_e - p - QF, \\ \frac{\sigma F}{dt} &= -F + Qp \end{aligned} \quad (2)$$

де  $Q$  – попит;  $F$  – виробнича функція, що визначається кількістю продукції, виробленої за одиницю часу;  $p$  – керуючий параметр, який є умовною ціною;  $p \equiv P/U$ , де  $P$  – ціна,  $U$  – ліквідні кошти (ці параметри задаються, а відношення  $P/U$  є відношенням дійсної ціни до наявних коштів);  $p_e$  – купівельна спроможність населення, тобто  $p_e = rX = rQ$ ;  $\sigma \equiv \tau_F / \tau_Q$ ;  $\delta \equiv \tau_p / \tau_Q$  – відношення часів релаксації (монотонний режим еволюції реалізується, якщо характерний час зміни попиту  $\tau_Q$  набагато перевищує відповідні масштаби виробничої функції  $\tau_F$  та ціни  $\tau_p$ , отже,  $\sigma, \delta \ll 1$ ).

В системі *Олемського* та ін. збурюючим параметром є відношення купівельної спромож-

ності населення до попиту. Він може дорівнювати нулю (є попит, але купівельна спроможність населення дорівнює нулю), бути меншим 1 (є попит, але у населення мала купівельна спроможність), може дорівнювати 1 (рівновага між купівельною спроможністю і попитом), більшим 1 (купівельна спроможність набагато перевищує попит). В останньому випадку виробник у процесі «полювання за грошима» для приведення ринку до рівноваги намагається збільшити попит і обсяги виробництва продукції, в тому числі інноваційної. Це приводить до підсилення економіки в цілому. Якщо ж у подальшому попит на товар впаде, то можна очікувати катастрофічного падіння економіки підприємства або національної економіки в цілому.

Згідно з В.-Б. Зангом [16] система Лоренца має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= a_1(a_2Y - a_3X) \\ \frac{dY}{dt} &= c_1(c_2X - c_3Y) - c_4XZ. \\ \frac{dZ}{dt} &= -d_2Z + d_1XY \end{aligned} \quad (3)$$

Параметр  $a_2$  визначається як попит на міську продукцію, що нормується на душу населення; параметр  $a_3$  інтерпретується як рівень пропозиції продукції усередині міста. Відтак,  $a_2Y$  – це загальний попит на міську продукцію, а  $a_3X$  – загальний потік міської продукції на міський ринок. Якщо попит більший за пропозицію, виробництво має тенденцію до розширення, і навпаки. Параметр  $a_1$  за суттю є коефіцієнтом пропорційності.

Члени другого рівняння задають зміну чисельності міського населення. Величина  $c_2$  інтерпретується як попит на працю з боку фірм для виробництва одиниці продукції, відтак  $c_2X$  – це загальний попит на працю на міському ринку праці. Параметр  $c_3$  визначається як відношення чисельності міських жителів, що обирають працю в місті, до загальної чисельності міського населення. Величина  $c_3Y$  задає за-

гальну величину пропозиції праці на міському ринку праці. Член  $c_2X - c_3Y$  є надлишок попиту на працю в місті і впливає на напрям міграції. Саме цей член і вводить позитивний зворотний зв'язок у систему, збурює її і приводить в стан детермінованого хаосу. На міграцію впливає також величина земельної ренти, оскільки люди обирають для проживання місцевості з низькою ціною на землю (квартирною платою). Член  $c_4XZ$  враховує цей фактор.

Система Лоренца добре узгоджується з інноваційною математичною системою Й. Шумпетера, що осцилює, яка складається з двох рівнянь (*годинник Шумпетера*). Перероблена система Шумпетера відповідно до системи Лоренца в головних рисах добре описує об'єктивний економічний розвиток систем з перехідною економікою, який характеризується особливою нестаціонарністю і має високу частку невпевненості [14, 17]. Система Лоренца при цьому має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A [ka - (1 - k)x] = A [sh(a + kx) - xch(ax)] \\ \frac{da}{dt} &= B [k(x_0 - x) - a] = \\ &= -B [a_0sh(ax) + ach(ax)] \\ \frac{dk}{dt} &= C [\delta a - k] = C [sh(\delta x) + kch(\delta x)] \end{aligned} \quad (4)$$

де  $x = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$ , причому  $N_1$  – розширені інвестиції, що перевалюють;  $N_2$  – інвестиції для раціоналізації технологій;  $a$  – так званий *альтернативатор*, який визначає економічний клімат; за суттю це є «перемікач», який визначає перевагу інвестора між інвестиціями різних типів: за позитивних значень  $a$  перевага віддається інвестиціям  $E$ -типу (експансійні інвестиції), за від'ємних – інвестиціям  $R$ -типу (раціоналізаційні інвестиції);  $k$  – координатор (цей параметр описує схильність інвестора узгоджувати свою поведінку з поведінкою решти інвесторів);  $A, B, C, a_0, a, \delta$  – константи.

Праві частини перших двох рівнянь системи (4) і є так звана система *годинника Шумпетера*.

Економіст В. Бурлачков (Інститут економіки РАН) появу турбулентності в економічних системах пояснює незбіжність швидкості закінчення обладнання і швидкості погашення зобов'язань. Швидкість закінчення обладнання забезпечується реалізацією товарів і послуг і її можна вважати максимальною швидкістю поширення взаємодії в економічній системі [18]. Між цими подіями-системами виникає різниця швидкостей, внаслідок чого і утворюються турбулентні вихорі. Однак зауважимо, що для пояснення причин виникнення турбулентності в економічних системах В. Бурлачков пропонує звертатись не до системи рівнянь Е.Н. Лоренца, а до релятивістських перетворень Г.А. Лоренца.

Незважаючи на певні досягнення в період 2002–09 років у теоретичному розвитку системи Лоренца стосовно економічних аспектів, прикладів практичного застосування моделей (2–4) ми не знайшли.

На рис. 1 наведено одну з проекцій фазового портрету дивного атрактора Лоренца, так званого «метелика Лоренца», одержаного за таких умов:  $X_{\min} = -20, X_{\max} = 20, x_0 = 0,1; Y_{\min} = -30, Y_{\max} = 30, y_0 = 0,1; Z_{\min} = 0, Z_{\max} = 50, z_0 = 0,1; a = 10; r = 28; b = 2,67; t = 30$  (все в у.о.).

Очевидно, що розвиток системи має автоколивальний, аперіодичний і нелінійний характер без будь-яких збурень зовні. Зображена на рис. 1 неперіодична траєкторія (ліворуч) жодного разу не перетинається: витки «намотуються» один на одного, не наближаючись до стаціонарного стану. Траєкторії випадково розходяться і випадково наближуються одна до одної. Не можна передбачити, які координати буде мати точка траєкторії через деякий час, можна лише впевнено казати, що вона буде знаходитися в зоні дивного атрактора.

Деякі фахівці в автоколивальному характері системи Лоренца вбачають аналогію з нелінійною моделлю Гудвіна – моделлю економіки закритого типу, що розвивається, без економічної активності держави, яку було опубліковано ще в 1950 р. [19]. Модель складається з двох диференціальних рівнянь:

$$\hat{\delta}_t = \rho v_t - (\alpha + \gamma) \hat{\delta}_t, \quad (5)$$

$$\hat{\vartheta}_t = \frac{1 - \delta_t}{\eta} - (\alpha + n) = \frac{1}{\eta} - (\alpha + n) - \frac{\delta_t}{\eta}$$

де  $(1 + n)$  – річний темп приросту населення;  $(1 + \alpha)$  – щорічне збільшення середньої продуктивності праці;  $\delta$  – частка праці в національному доході;  $v$  – показник зайнятості;  $\eta$  – капіталоємність національного доходу;  $\hat{\delta}_t = \hat{N}_t - n$ , де  $N$  – чисельність населення;  $\rho$  і  $\gamma$  – позитивні константи.

У цій моделі кон'юнктурні цикли виникають внаслідок зміни перерозподілу національного доходу між працею і капіталом. Система (4) утворює специфічну систему ЗДР Лоткі–Вольтерра в моделі «хижак–жертва» [20] з відповідними фазовими портретами і часовими траєкторіями (рис. 2).

З рис. 2 випливає, що модель Гудвіна і систему Лоренца об'єднує циклічність, однак модель Гудвіна є занадто «правильною», період

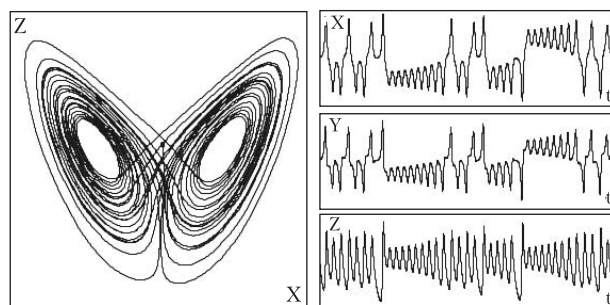


Рис. 1. Дивний аттрактор Лоренца (ліворуч) і часові траєкторії змінних (праворуч)

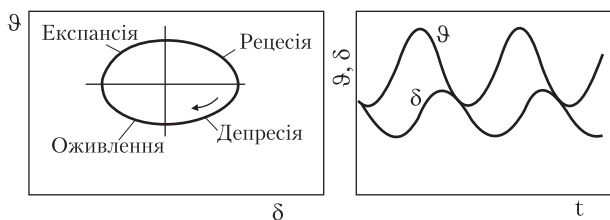
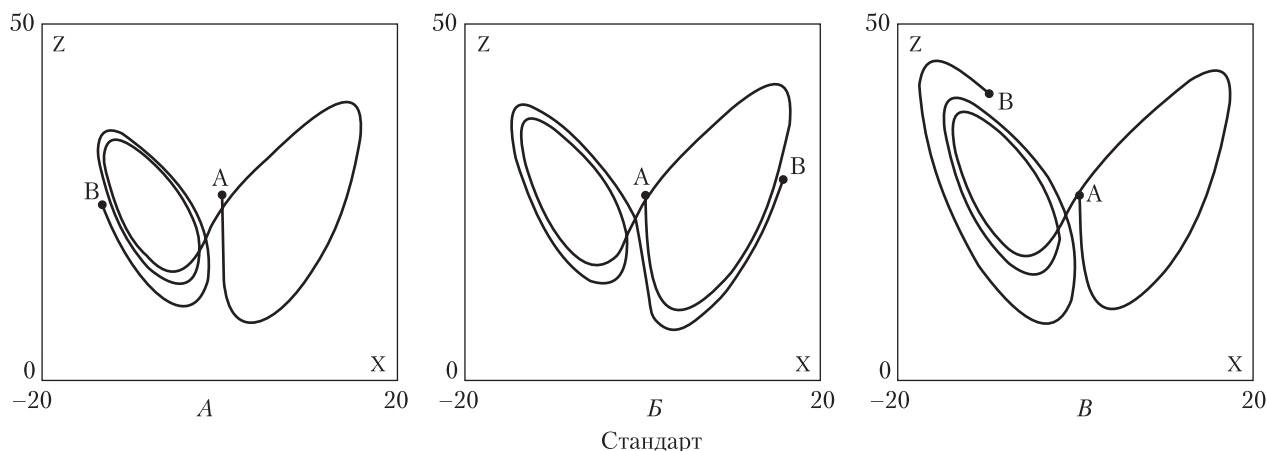
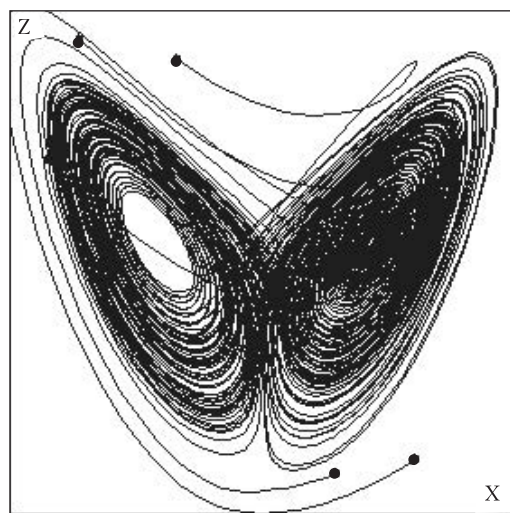


Рис. 2. Фазовий портрет (аттрактор типу «граничний цикл») (ліворуч) і часові траєкторії фаз (праворуч) моделі Гудвіна



**Рис. 3.** Фазові портрети системи Лоренца за різних вхідних параметрів: А – зменшення значень параметрів:  $a = 9,8$  (–2 %);  $r = 27$  (–3,6 %);  $b = 2,6$  (–2,6 %); В – стандарт:  $a = 10$ ;  $r = 28$ ;  $b = 2,67$ ; В – збільшення значень параметрів:  $a = 10,2$  (+2 %);  $r = 29$  (+3,6 %);  $b = 2,73$  (+ 2,25 %)



**Рис. 4.** Утворення дивного атратора Лоренца з різних точок фазового простору за умови  $t = 30$  у.о.

**Координати точки В**

	Координати точки В	
	X	Z
Стандарт	15,8	28,2
Зменшення параметрів	–13,3 зміна на 84,4 %	24,7 зміна на 34,8 %
Збільшення параметрів	–10 зміна на 63,5 %	40,5 зміна на 12,3 %

дичною, симетричною, що не відповідає реальності. Крім того, модель Гудвіна, як і модель Лоткі–Вольтерра, є «негрубою», тобто відкликається суттєвими спотвореннями на будь-які зовнішні збурення. Отже, при моделюванні перевагу потрібно віддавати системі Лоренца.

Циклічність економічних процесів дозволила навіть провести аналогію з циклічністю змінного електричного струму.

Проведемо тест системи Лоренца на нелінійність. Для цього зменшимо і збільшимо вхідні параметри і порівняємо координати точки В, до якої траєкторії рухаються з точки А. Для наочності час процесу зменшимо до 3 у.о. Результати наведено на рис. 3 і в таблиці.

Відтак, зміна вхідних параметрів на 1–3 % викликала зміну вихідних параметрів на 40–80 %, тобто в декілька десятків разів (випадково координати точки В можуть і не змінитися), що свідчить про сильну нелінійність системи Лоренца (і економічних систем взагалі). Таку нелінійність в аналітичних розрахунках методами неокласичної економіки врахувати неможливо.

Можна лише уявити, де опинилась би система, якщо «умовні реформатори» у поточному моменті самодовільно змінили б вхідні дані не на декілька відсотків, а значно більше. З



цього приводу вважаємо доцільним навести дві цитати. Еконофізик проф. Д. С. Чернавський (ФІАН) зауважує: «Якщо знаходяться люди, які говорять: «давайте зруйнуємо усю планову систему», – катастрофа неминуча. В Японії, наприклад, планова система сьогодні превалює над ринковою» [21], а докт. філософії (ІФ РАН) В. Федотова говорить: «за такої практики порядок може народитись без нас, після нас, зовсім не такий, який ми хочемо» [22].

Утворення дивного атрактора може розпочатися з будь-якої початкової точки, що знаходиться у полі фазового простору, але в кінцевому результаті можна спостерігати перехід траєкторій у простір стандартного дивного атрактора (рис. 4). Такий результат не є очевидним на початку процесів (наприклад, за  $t = 1$  у.о.) (рис. 5).

Дивний аттрактор Лоренца утворюється за умови суворо визначених початкових констант:  $a = 10$ ;  $r = 28$ ;  $b = 8/3$ , однак в реальності константи можуть бути іншими, при цьому утворюються різні фазові портрети. Зокрема, якщо  $r < \sim 24$ , то траєкторії прямують до точкових атракторів і системи швидко приходять до стану рівноваги через стійкі фокуси (рис. 6). Якщо ж  $r \gg 28$ , то за суттю дивний аттрактор вироджується в аттрактор типу «граничний цикл» з регулярною циклічністю (рис. 7).

Зазначені особливості розширюють можливості системи Лоренца для опису динаміки економічних процесів. Алгоритм застосування системи Лоренца для прогнозування економічного розвитку може бути таким:

1. Початкові координати реальних станів системи фіксують в точках  $A$  і  $B$ , які відповідають  $t = 0$  і, наприклад, проміжкам  $t = 0,1$  (точок може бути більше), і наносять їх хоча б на дві фазові площини (рис. 8).

2. Підбиранням коефіцієнтів  $a$ ,  $r$  і  $b$  знаходять траєкторію, яка б точно з'єднувала точки  $A$  і  $B$  (у прикладі  $a = 10$ ,  $r = 10$ ,  $b = 2,67$ ).

3. Знаходять координати точок  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  – прогноз через певні проміжки часу.

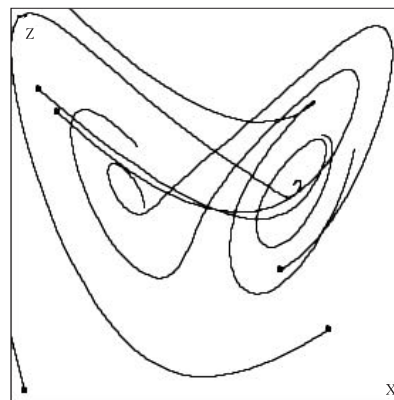


Рис. 5. Утворення дивного атрактора Лоренца з різних точок фазового простору за умови  $t = 1$  у.о.

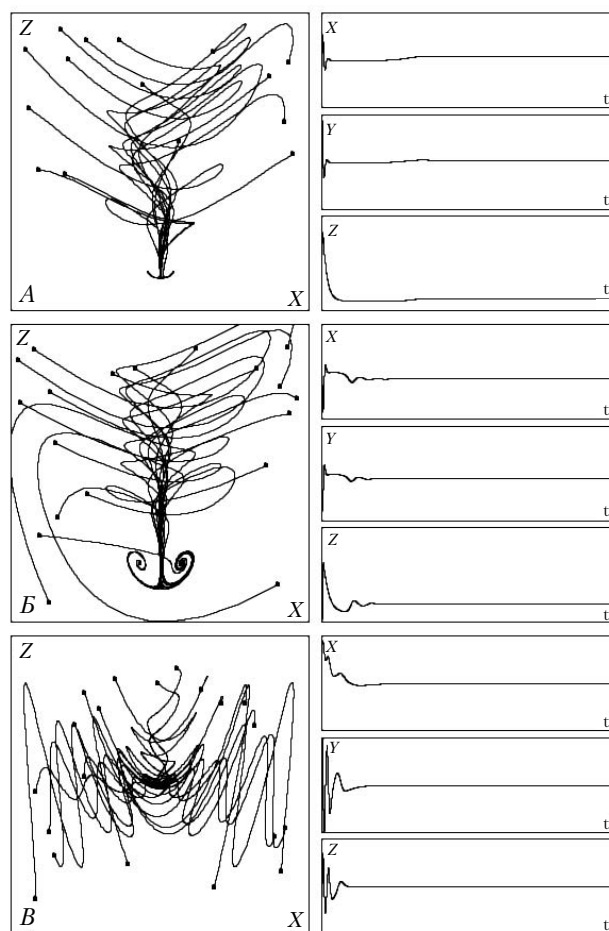


Рис. 6. Фазові портрети системи Лоренца, які одержано за умов: А –  $a = 10$ ;  $r = 2$ ;  $b = 2,67$ ; Б –  $a = 15$ ;  $r = 5$ ;  $b = 2$ ; В –  $a = 1$ ;  $r = 0$ ;  $b = 1$

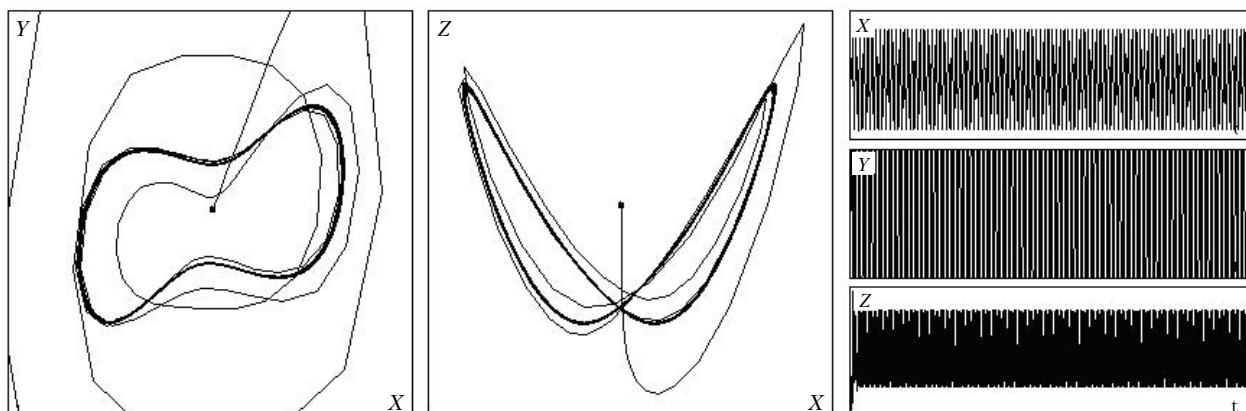


Рис. 7. Фазовий портрет системи Лоренца за умов:  $a = 10$ ;  $r = 600$ ;  $b = 2,67$

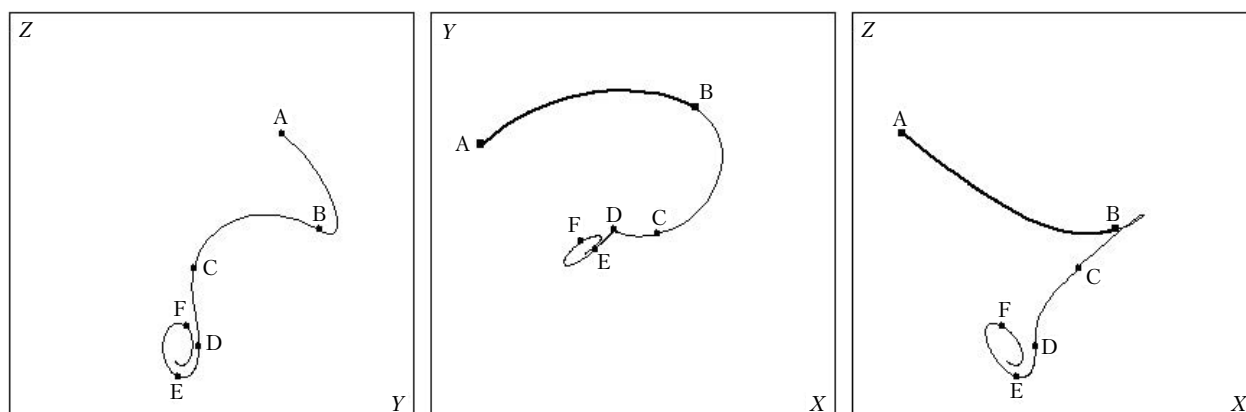


Рис. 8. Фазові площини для прогнозування економічного розвитку в системі Лоренца

Відтак, методами динаміки детермінованого хаосу, зокрема системою Лоренца, можна адекватніше описати реальні економічні процеси, що не регулюються і відбуваються самодовільно в ринкових середовищах. Проте навіть за зовнішнім видом траєкторій, які показано на представлених рисунках, можна переконатись у складності розробки прогнозувальних методик для практичного використання, тим більше при представленні їх у вигляді комп'ютерних програм. Складність полягає і в інтерпретації змінних і параметрів, що входять до моделі Лоренца, для опису розвитку національної економіки взагалі, а також вибору правильного масштабу, в тому числі часового.

Крім того, навіть коли на базі моделі Лоренца буде створена методика для практичного використання, ми одержимо прогнозувальний інструмент, який лише констатуватиме можливий розвиток подій за умови невтручання держави в економічні процеси. Однак будь-яке грубе планування або, навпаки, самоусування державних органів від регулювання може привести, як показано, до негативних наслідків. Водночас треба пам'ятати, що, незважаючи на схожість економічної і біологічної еволюцій за Дарвіним, економічна еволюція може розвиватись і регулюватись свідомо за Ламарком [23]. При цьому керівнику будь-якого рангу необхідно знати основні принципи синерге-

тичного управління і попадати в резонанс, коли система компетентна до інновацій, готова прийняти їх, тобто необхідне вичікування. Такі принципи сформульовані і опубліковані в [24]. Керування означає переведення системи з одного стану в інший, з одної траєкторії атратора на іншу. При цьому вимагається застосовувати не метод безумовного підкорення адміністрації, а метод врахування компонентів системи (співробітників, служб) так, щоб вони еволюціонували в потрібному темпі і в потрібний бік за своїм бажанням. Все це накладає ще більші труднощі математичного обґрунтування симуляційної моделі розвитку національної економіки на базі моделі Лоренца.

Зазначимо, що на сьогодні не існує точного математичного апарату застосування теорії детермінованого хаосу для економічних досліджень, однак дослідники вважають, що це дійсно найперспективніший напрям математики з погляду прикладних економічних досліджень.

На підставі вищесказаного можна зробити такі висновки:

1. Система Лоренца є одним з інструментів для опису процесів, що відбуваються в режимі динамічного детермінованого хаосу. До таких процесів відноситься і некерований розвиток нестационарних економічних систем в ринкових умовах.

2. Незважаючи на широке теоретичне визнання системи, практичного застосування в економічних дослідженнях цей аналітичний інструмент ще не набув, що обумовлено методологічною складністю розробки практичних рекомендацій застосування системи Лоренца навіть на експертному рівні. Однак систему Лоренца потрібно вважати перспективною базою для розробки методики, яку в подальшому можна використовувати як дорадчий інструмент для осіб, що приймають стратегічні рішення щодо розвитку національної економіки.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Barnett W.A., Hinich M. Has chaos been discovered with economic data? // Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics. – 1993. – Oxford: Oxford University Press. – P. 254–265.
2. Oxley L. Economics on the Edge of Chaos: How does economics deal with complexity and the implications for systems management. – University of Canterbury. New Zealand. – 2004.
3. Ruth M., Hannon B. Modeling dynamic economic systems. Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
4. Sterman J.D. Deterministic Chaos in an Experimental Economic System // Working Paper #2040-88 Alfred P. Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology, July, 1988. – [dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/47164/...](http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/47164/)
5. Дж. Россер-мл. Настоящее и будущее эконофизики // Вопросы экономики, 30.11.2009. – [finanal.ru/?page=1](http://finanal.ru/?page=1).
6. Serletis A., Gogas P. Purchasing Power Parity Nonlinearity and Chaos // Applied Financial Economics. – 2000. – V. 10. – P. 615–622.
7. Serletis A., Gogas P. Chaos in East European Black Market Exchange Rates // Research in Economics. – 1997. – V. 51. – P. 359–385.
8. Хукс Д. Стоимость и капитал. – М.: Прогресс, 1993. – 488 с.
9. The Economy as a Complex Evolving System // Anderson P.W., Arrow K.J. & Pines D. (editors). – Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1988.
10. Brock W.A., Hsieh D.A., LeBaron, B. Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence. – Cambridge, MA: MIT Press, 1991.
11. Hommes C.H. Financial markets as nonlinear adaptive evolutionary systems // Quantitative Finance. – 2001. – V. 1. – P. 149–167.
12. Lorenz E.N. Deterministic non-periodic flow // Journal of Atmospheric Science. – 1963. – V. 20. – P. 130–141.
13. Sparrow C. The Lorenz Equation, Bifurcation, Chaos, and Strange Attractors. – Berlin-Heidelberg: Springer, 1982.
14. Andrášik L., Krempaský J. Emergencia deterministického chaosu: ohraničená pasáž v evolúcií ekonomiky // Ekonomický časopis. – 2002. – № 6. – P. 1076–1099.
15. Олемської О.І., Ющенко О.В., Кохан С.В. Синергетична модель економічної структури суспільства // Журнал фізичних досліджень. – 2004. – Т. 8, № 3. – С. 268–278.
16. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 355 с.
17. Krempaský J., Kluvánek P. Universality of Lorenz System of Equations // Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C. – 2009. – № 13. – P. 53–57.
18. Бурлачков В. Турбулентность экономических процессов: теоретические аспекты // Вопросы экономики. – 2009. – № 11. – [vopreco.ru/rus/archive.files/n11\\_2009.html](http://vopreco.ru/rus/archive.files/n11_2009.html).



19. Goodwin R. M. A non-linear theory of the cycle // Rev. of Economics and Statistics. – 1950. – V. 32, № 4. – P. 316–332.
20. Козик В.В., Сидоров Ю.И. Проблемы застосування моделі Лоткі-Вольтерра «хижак-жертва» в економічній практиці // Наука та інновації. – 2011. – № 1. – С. 5–15.
21. *Интервью* с проф. Д. С. Чернавским, 2003. – <http://www.peoples.ru/science/physics/chernavskiy/index.html>.
22. Федотова В. Управляемый хаос // «ИНТЕЛПРОС – Интеллектуальная Россия». – [http://www.intelros.ru/2007/02/13/print:page,1,valentina\\_fedotova\\_upravljajet\\_muji\\_khaos.html](http://www.intelros.ru/2007/02/13/print:page,1,valentina_fedotova_upravljajet_muji_khaos.html).
23. Ходжсон Дж. Экономическая теория и институты: Манифест современной институциональной экономической теории. – М.: Дело, 2003. – 464 с.
24. Merry U. Coping With Uncertainty: Insights From the New Sciences of Chaos, Self-Organization and Complexity. – Westport, Conn.: Praeger, 1995. – 224 p. – <http://pw2.net.com/~nmerry/coping.htm>.

*Ю.И. Сидоров, В.В. Козик*

#### НЕЛИНЕЙНОЕ РАЗВИТИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В РАМКАХ МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

Рассмотрены известные теоретические публикации, касающиеся модели Лоренца, описывающей экономические процессы в рамках теории детерминированного хаоса. Экспериментально установлено, что в экономических системах незначительное изменение начальных параметров может вызывать изменение результатов на выходе в несколько десятков раз, что подтверждает силь-

но нелинейный характер развития этих систем. Показано, что при разных соотношениях констант рассматриваемой модели образуются точечные аттракторы, странный аттрактор и аттрактор типа «предельный цикл». Это расширяет возможности модели для практического использования в качестве прогностического инструмента.

*Ключевые слова:* детерминированный хаос, модель Лоренца, развитие экономической системы.

*Yu.I. Sidorov, V.V. Kozik*

#### NONLINEAR DEVELOPMENT OF ECONOMIC SYSTEM WITHIN THE FRAMEWORK OF THE LORENZ MODEL

The known theoretical publications concerning the model of Lorenz, which describes economic processes in framework of the determined chaos theory, had considered. It is experimentally established, that in economic systems a minor alteration of initial parameters can cause change of the outlet results in several tens times that confirms strongly nonlinear character of these systems development. It is shown, that different types of attractors, such as the dot attractors, strange attractor and attractor of a «limiting cycle» type, are formed at different parities of constants of the model under consideration. It expands possibilities of model for practical use in quality of the prognostic tool.

*Key words:* determined chaos, model of Lorenz, development of the economic system.

Стаття надійшла до редакції 01.06.11