

РОБАСТНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

*Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

Анотація. Розглядаються історичний розвиток планування експериментів і місце робастних планів при традиційній класифікації. Опіраючись на процесний підхід і системний аналіз, обґрунтовується комплекс вимог до планів експерименту. Показано, що найкращим чином цьому комплексу задовольняють робастні плани на основі псевдовипадкових рівномірно розподілених у багатовимірному просторі послідовностей.

Ключові слова: робастні плани експерименту, процесний підхід, планування експерименту, LP_τ рівномірно розподілені послідовності.

Аннотация. Рассматриваются историческое развитие планирования экспериментов и место робастных планов в традиционной классификации. Опираясь на процессный подход и системный анализ, обосновывается комплекс требований к планам эксперимента. Показано, что наилучшим образом этому комплексу удовлетворяют робастные планы на основе псевдослучайных равномерно распределенных в многомерном пространстве последовательностей.

Ключевые слова: робастные планы эксперимента, процессный подход, планирование эксперимента, LP_τ равномерно распределенные последовательности.

Abstract. The historical development of experiments design and robust plans under traditional classification is considered. Based on the process approach and system analysis, a complex of requirements to plans of the experiment is proved. It is shown that the best way to satisfy this set of robust plans based on a pseudo-random uniformly distributed in the multidimensional space of sequences.

Keywords: robust plans of experiment, process approach, design of experiments, LP_τ uniformly distributed sequences.

1. Введение. Проблема и цель работы

Планирование эксперимента возникло как выход из тупика классического подхода к исследованию, при котором изучение отклика происходило посредством изменения одного фактора при зафиксированных значениях всех прочих. Такое исследование, во-первых, требовало слишком много ресурсов, а, во-вторых, не позволяло изучать то, что впоследствии будет названо системами. Например, в агробиологии традиционный подход растягивал исследования чуть ли не на десятилетия. С другой стороны, такой подход не позволял выявлять влияние взаимодействий.

При планировании эксперимента (ПЭ) изменялись одновременно все факторы и широко использовалась рандомизация. Таким образом, изначально планирование позволяло сделать шаг к системному исследованию процесса (хотя до этих терминов было еще далеко) и резко сократить ресурсы (в первую очередь временные) на проведение исследования при обеспечении требуемого уровня надежности полученной информации. При этом изначально ПЭ опиралось на выборочный метод и рассматривалось как его часть, что служило обоснованием возможности распространения результатов на генеральную совокупность [1, 2]. При дальнейшем развитии ПЭ преимущество получило направление, в котором математическая сторона превалировала над статистической. В результате критерием качества плана стало достижение экстремального значения некоторой характеристики [3, 4].

Следствием развития этого направления стало появление большого количества разных планов разного типа, предназначенных, согласно своим критериям, для достижения разных целей (табл. 1) [5]. Составлялись многочисленные каталоги планов эксперимента.

Для прикладника трудность заключались не только в выборе критерия, но и в выборе конкретного плана под выбранный критерий. Относительно критерия: во-первых, прикладнику хотелось бы достижения сразу нескольких критериев одновременно, а во-вторых, в реальности выбор критерия определялся случайными обстоятельствами, а не был осознанным актом. Кроме того, вследствие отрыва от выборочного метода вопрос о репрезентативности исчез из поля зрения.

Таблица 1. Место робастных планов в общей классификации

Идентификация	Для оценки коэффициентов регрессии	<i>D</i> -оптимальность	←	Робастные (на основе многофакторных регулярных планов)				
		<i>A</i> -оптимальность						
		<i>E</i> -оптимальность						
		Минимакс дисперсии оценки коэффициентов						
		Минимум суммы относительных ошибок оценок						
		Ортогональность						
	Для оценки поверхности отклика	<i>G</i> -оптимальность			←	Робастные (на основе псевдослучайных чисел)		
		<i>Q</i> -оптимальность						
		<i>P</i> отабельность						
		Униформность						
		Спецификация					Дискриминирующие	←
							Отсеивающие	
Оптимизация	Динамические							
	Статические							

Многофакторные регулярные планы [6, 7] позволяли избежать второй проблемы, поскольку с помощью каталога планов и преобразований или программного средства DESFACT можно строить план, оптимальный по *D*-критерию, под практически любое требующееся задание вида $K^I L^J M^G \dots / N$. Здесь *K*, *L*, *M* – число уровней варьирования факторов; *I*, *J*, *G* – число факторов с соответствующим количеством уровней варьирования, а *N* – количество опытов. Побочным бонусом являлась ортогональность подавляющего большинства сгенерированных планов. К недостаткам следует отнести требование известной структуры, а также для части планов (с «неудачным» сочетанием числа уровней факторов) выбор между невысокой эффективностью и малым количеством опытов или большим количеством опытов при высокой эффективности. Кроме того, фактическое число экспериментов в сгенерированном плане могло значительно отличаться от желаемого в обе стороны в виду особенностей каталогов.

Таким образом, достигнув совершенства, классические планы не устранили главные свои недостатки: требование известности частной структуры (спецификации) модели для обеспечения оптимальности плана и отсутствие связи с выборочным методом (регулярная матрица плана). Дополнительный недостаток – необходимость выбора определенного критерия оптимальности. Как первое, так и второе конфликтовало с практикой решения реальных задач. Как правило, частная структура в подавляющем числе случаев неизвестна. Более того, зачастую целью построения модели является как раз определение этой структуры. Что касается критерия оптимальности, то в прикладных задачах обычно требовалось достижение одновременно нескольких показателей.

Исключением являлся метод случайного баланса, в рамках которого была проведена большая работа по определению влияния свойств матрицы плана на надежность выделения значимых факторов, то есть, по сути, определения структуры. В его рамках была установлена необходимость минимальной закоррелированности всех эффектов кандидатов и случайной матрицы.

Кроме вышесказанного, вне рассмотрения оставался пассивный эксперимент, который в рамках теории планирования эксперимента считался полностью непригодным для использования. Вместе с тем зачастую в реальности отсутствовала возможность планирования. Разумеется, некоторые попытки работать в этом направлении были. Стоит упомянуть активно-пассивный эксперимент и релейные схемы, но ничего из этого не имело распространения и обоснования.

Осознание непригодности классических планов с одновременной необходимостью планирования экспериментов подвигло исследователей-практиков к собственным действиям по разрешению проблемы. Движение происходило в трёх направлениях:

- 1) как бы возврат к рандомизации с использованием равномерно распределенных псевдослучайных чисел;
- 2) приспособление существующих планов к своим потребностям;
- 3) разработка новых видов планов.

В первом направлении работали разработчики ПС «Эльбрус» (Москва), ВНИИ-ЖИВМАШ (Киев). В первом и втором одновременно – коллективы в Киеве (Радченко С.Г., Лапач С.Н.; Воронин А.Н.), в третьем – коллектив Воронина А.Н. (Киев).

Обоснование при этом было следующим: случайность как требование выборочного метода, стремление к минимальной закоррелированности или то и другое. Обоснование минимальной закоррелированности и выбора случайных матриц для определения структуры уравнения регрессии (частной спецификации) было исследовано и обосновано в методе случайного баланса.

Термин робастные для планов определения структуры был предложен Радченко С.Г., который с этой целью считал нужным использовать многофакторные регулярные планы (МФРП), разработанные Бродским В.З., но не насыщенные, а с большим числом степеней свободы. Планы на основе ЛП_т чисел независимо начали использовать в исследованиях Лапач С.Н. и Воронин А.Н. В коллективе Воронина А.Н. были разработаны планы обобщенной свастики.

На данный момент существуют три вида робастных планов [8]:

- 1) робастные планы эксперимента на основе МФРП (рис. 1);
- 2) планы на основе псевдослучайных чисел (ЛП_т равномерно распределенные последовательности, числа Холтона) (рис. 2);
- 3) планы обобщенной свастики (рис. 3).

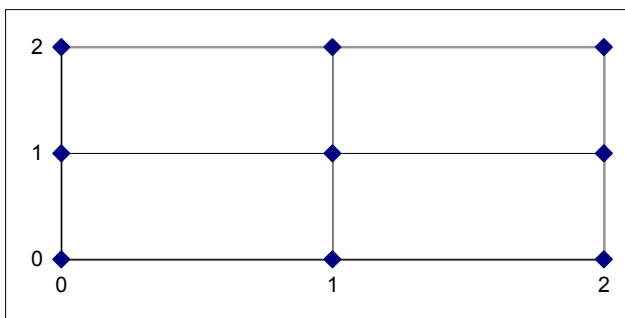


Рис. 1. Диаграмма рассеивания для МФРП 3//9

Место робастных планов в общей существующей классификации показано в табл. 1.

Теоретические разработки в указанном направлении практически отсутствовали. Это связано, с одной стороны, со сложностью задачи, с другой, с тем, что для теоретиков задача не входит в перечень интересных тем. Вместе с тем, хотя несколько десятилетий использования робастных планов

подтвердило их эффективность и практическую пригодность, проблема обоснования остается актуальной.

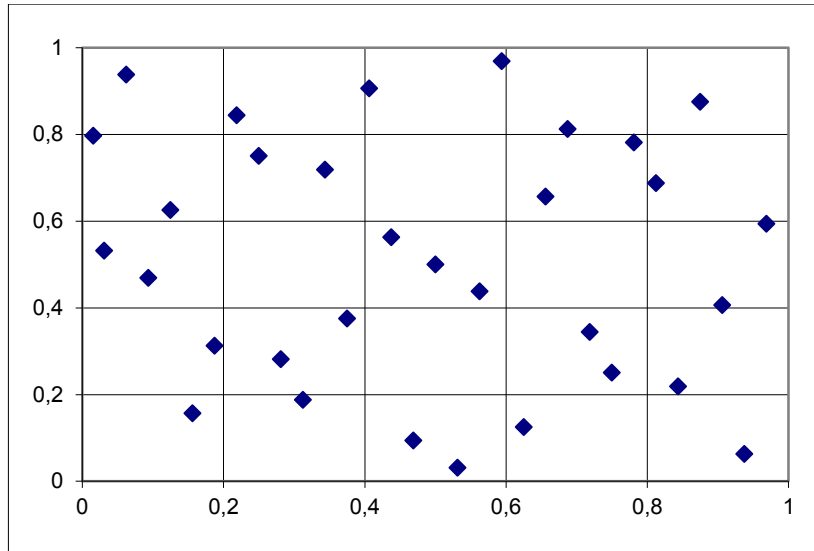


Рис. 2. Диаграмма рассеивания для плана на основе ЛП_r равномерно распределенных последовательностей для 32 опытов

Планы обобщенной свастики наилучшим образом подходят для задач, когда количество факторов близко к количеству возможных опытов. При этом то и другое достаточно мало. Планы первого и второго видов являются практически взаимозаменяемыми. При этом планы первой группы имеют более высокие статистические показатели качества. Но планы второй группы обладают при этом рядом важных практических преимуществ. Так, планы на основе псевдослучайных чисел возможно достраивать (в отличие от МФРП), если выяснится, что количество опытов недостаточно для построения адекватной модели.

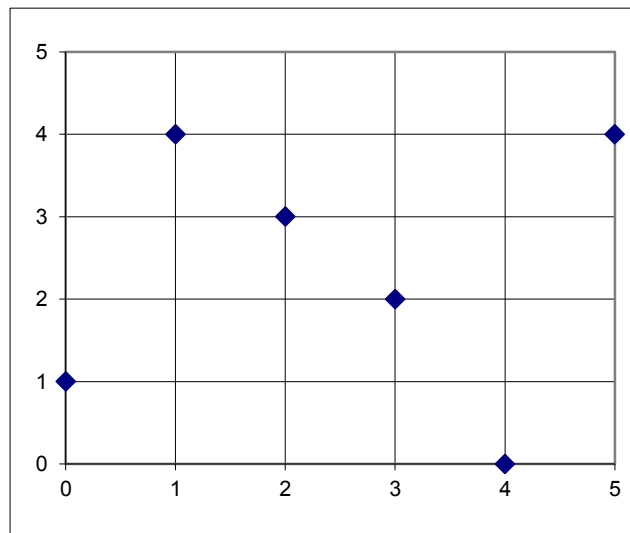


Рис. 3. Диаграмма рассеивания для плана «обобщенной свастики» – 2 фактора, 6 опытов

Место робастных планов в существующей классификации показано в табл. 1. При этом сплошные стрелки указывают на строго выполняющиеся условия, а пунктирные – частично.

Для МФРП ресурсы оказываются потраченными напрасно. Планы на основе псевдослучайных чисел нечувствительны к малым изменениям значений уровней факторов и пропускам экспериментов в отличие от МФРП, для которых указанные ситуации приводят к значительному ухудшению свойств плана. В качестве дополнительного бонуса планы

являются планами для поиска оптимальных условий, то есть одновременно с построением модели позволяют осуществлять поиск оптимума по эксперименту.

Проблемы, возникающие вследствие несогласованности требований различных этапов построения регрессионных моделей и отрыва ПЭ от собственно регрессионного анализа, подробно рассмотрены в [9, 10]. Существуют необходимость в разрешении проблемы несогласованности ПЭ с РА и несоответствие ПЭ требованиям реальных экспериментальных исследований. Целью является обоснованное определение требований к планам эксперимента, которые можно назвать робастными, и соответствие им имеющихся робастных планов.

2. Требования к этапам построения модели

Не ограничивая себя рамками статистических методов, рассмотрим построение эмпирических математических моделей с точки зрения процессного подхода (или принципа Беллмана) [11]. То есть требования ко всем этапам определяются исходя из требований к конечному результату. Исходя из целей построения модели, мы должны определить требования к процессам и в конечном итоге к выборке. Конкретизация требований зависит от цели построения конкретной модели. Рассмотрим некоторый обобщенный случай, когда необходимо получить модель, позволяющую описывать и анализировать процесс. С точки зрения исследователя, модель должна быть адекватной описываемому процессу и надежной. Для конкретизации требований построим диаграмму Исикава (табл. 2), определяющую факторы отдельных этапов, влияющие на результат. Из этих факторов и будут следовать требования к отдельным процессам.

Таблица 2. Диаграмма Исикава для построения модели

Модель	Спецификация	Общая	Достаточное количество уровней	
		Частная	Малая закоррелированность	
	Идентификация	Оценки коэффициентов	Достаточный размер	Малая закоррелированность
			Малая закоррелированность	Способ получения оценок
		Статистические характеристики коэффициентов	Независимость	Достаточный размер
			Достаточный размер	Соответствие структуры
	Выборка	Репрезентативность	Соответствие структуры	Достаточный размер
			Достаточный размер	Независимость
			Независимость	Структура
		Свойства оценок	Структура	Случайность
			Случайность	Достаточный размер
			Достаточный размер	Независимость
	Проведение исследований	Общие	Независимость	Структура
			Структура	Способы оценки
			Способы оценки	Неизвестная структура
		Частные	Неизвестная структура	Возможность пассивного эксперимента
Возможность пассивного эксперимента			Минимизация размера	
Минимизация размера			Возможность наращивания размера	
Возможность наращивания размера			Возможность введения своих экспериментов	
Возможность введения своих экспериментов			Устойчивость к пропуску строк плана	
Устойчивость к пропуску строк плана	Устойчивость к малым изменениям значений в плане			
Устойчивость к малым изменениям значений в плане				

Рассмотрим эти требования более детально.

2.1. Спецификация

В общей спецификации решение опирается на знания и умения постановщика задачи, а также имеющие знания специалистов о предметной области. Единственное требование, которое должно быть выдвинуто на этой ветви к плану, – большое количество уровней варьирования, так как это позволяет обеспечить аппроксимацию сколь угодно сложной зависимости (исходя из теоремы Вейерштрассе). При этом не важно, какой вид функции будет выбран, поскольку теорема относится к классу предельных. При малом количестве уровней варьирования для быстроизменяющихся функций качественная аппроксимация невозможна [8, 12, 13].

Для частной спецификации важны условия для надежного её определения. Таким условием является минимальная закоррелированность (в идеале ортогональность) матрицы анализируемых эффектов [8, 14–18], которая позволяет надежно выделять истинные элементы структуры. Чем ниже закоррелированность выборки, тем надежнее определяются значимые элементы независимо от используемого алгоритма.

Большое число экспериментов (достаточное) необходимо для обеспечения нужного количества степеней свободы, которое нужно для возможности описания сложной функции с большим количеством членов: чем больше размер, тем сложнее по числу членов может быть модель и закоррелированность.

Оба требования в определенной степени связаны друг с другом: чем больше размер при том же количестве факторов, тем легче обеспечить низкую закоррелированность матрицы выборки. Закоррелированность приводит к смешению эффектов и смешению показателей, что усложняет формирование частной структуры модели (определение частной спецификации). Чем ниже закоррелированность, тем выше устойчивость структуры модели.

2.2. Идентификация

Независимость – базовое требование при получении статистических оценок, достаточный размер требуется для обеспечения точности [19–21].

При выполнении идентификации на результат оказывают влияние как свойства матрицы, так и способы получения оценок коэффициентов. Устойчивость коэффициентов модели (и их точность) зависит от обусловленности матрицы, по которой эти коэффициенты получают. А обусловленность зависит от закоррелированности и соотношения величин факторов (столбцов матрицы). Снижение закоррелированности от достроенных эффектов обеспечивается ортогонализацией, а от разности величин – нормировкой столбцов. Ортогонализация и нормировка – это требования не к матрице, а к процессу обработки, то есть к способу получения оценок [8, 22–24]. Результат идентификации также зависит от способа решения системы линейных уравнений, результатом которого являются оценки коэффициентов регрессии [24].

Для определения статистических характеристик коэффициентов требуется независимость переменных, то есть минимальная закоррелированность и размер, обеспечивающий достаточную степень свободы и минимизацию величины доверительного интервала.

Правильность определения структуры уравнения регрессии (частная спецификация) также влияет на свойства регрессионных оценок [25].

2.3. Выборка

Требования выборочного метода направлены, во-первых, на обеспечение возможности распространения результатов, полученных на выборке, на генеральную совокупность, то есть на то, что называется репрезентативностью, а во-вторых, требуемую точность и свойства получаемых оценок. Эти требования известны и достаточно описаны в литературе [19–21], но в последнее время почти никто их не соотносил с планированием эксперимента

или регрессионным анализом. То есть независимость, случайность, соответствие структуре генеральной совокупности и достаточный размер обеспечивают репрезентативность. Соответствие структуре здесь несколько иное, чем традиционно понимаемое в выборочном методе. Здесь соответствие структуры есть такой отобранный набор независимых переменных (факторов) и форма факторного пространства, которая позволяет использовать полученную для заданных целей модель на всей генеральной совокупности. Требуемые свойства оценок обеспечиваются независимостью, достаточным для требуемой точности размером и способом получения этих оценок.

2.4. Проведение исследований

Особым блоком требований являются требования, вызываемые особенностью сферы проведения экспериментальных исследований, целью которых является построение математических моделей.

К общим требованиям, которые выдвигаются к планированию эксперимента от исследователей, относятся:

- 1) отсутствие требования знания структуры модели до эксперимента;
- 2) обеспечение минимизации необходимых ресурсов при обеспечении получения надежных результатов;
- 3) возможность использования пассивного эксперимента.

В классическом РА структура полагается известной до планирования, но в реальности это не так. Во многих случаях целью построения модели как раз и является выяснение структуры взаимосвязей между независимыми и зависимой переменными. Установление этой структуры и есть одна из задач в регрессионном анализе. Ранее ее формулировали как формирование наиболее информативного множества регрессоров, что не совсем верно, так как в такой формулировке происходит подмена исходной цели из предметной области целью более низкого уровня из математической статистики.

Минимизация затрачиваемых ресурсов при гарантированном обеспечении результата представляет собой обычное требование в практической деятельности, одной из частей её экономической составляющей. Идеальным вариантом матрицы планирования является матрица полного факторного эксперимента, которая получается перебором всех вариантов сочетаний уровней варьирования факторов. Такая матрица является полностью ортогональной и обеспечивает наилучшие условия для получения как структуры уравнения регрессии, так и оценок коэффициентов регрессии. Проблема только в том, что при реальном количестве факторов (5–8) и их уровней варьирования (3–4) число экспериментов для такой матрицы достигает фантастических значений в десятки тысяч или даже миллионы. Поэтому возникает необходимость в минимизации количества экспериментов при одновременном достижении целей исследования.

Требование работы с пассивным экспериментом связано с тем, что часть факторов, которые необходимо использовать, часто бывают только контролируемые, но не управляемые.

Рассмотрим также некоторые дополнительные требования. Требование эксперимента связано с требованиями ограниченности ресурсов и ограничениями при проведении экспериментов или формировании выборки. Минимизация числа экспериментов вызвана необходимостью минимизации затрат на проведение исследований, которые всегда ограничены. Возможность наращивания числа экспериментов связана с предыдущим требованием. Она означает, что желательно начинать с минимально возможного количества экспериментов и лишь при обнаружении, что их недостаточно, проводить дополнительные.

Возможная вариативность строк (условий эксперимента) означает:

- возможность включать желаемые эксперименты;

- устойчивость свойств плана по отношению к незначительным отклонениям значений в плане;
- устойчивость свойств плана по отношению к пропускам части запланированных экспериментов.

Остановимся несколько подробнее на этих требованиях. Требования по устойчивости плана связаны с тем, что при проведении эксперимента в сложных условиях возможна ситуация, когда часть значений уровней будет фактически установлена на значениях, частично не совпадающих со значениями в плане, или небольшая часть экспериментов будет отбракована. В условиях, когда эксперименты невозможно проводить, дополнительно важным является сохранение оптимальности плана эксперимента при наличии указанных отклонений. Что касается первого требования, то очень часто экспериментатору желательно провести исследования сочетаний факторов, которые не входят в план эксперимента.

При проведении исследований чрезвычайно удобным является возможность наращивания количества экспериментов, начиная от некоторого минимума. В современном планировании, если выбранный план после проведения экспериментов и попытки построения модели оказался слишком мал, необходимо генерировать новый план большего размера. При этом ранее проведенные эксперименты использовать в дальнейшей работе нет возможности. Кроме этого, достаточно частыми при проведении исследований являются ситуации, когда несколько экспериментов (строк плана) оказываются бракованными или же значения установлены немного не на тех значениях, которые требуются планом. Это обычно связано с физическими особенностями проведения эксперимента. Достаточно часто исследователям требуется, чтобы некоторый набор условий был обязательно исследован и включен в построение модели.

3. Результаты исследований

Таким образом, для построения модели нам необходимо определить общую и частную структуры уравнения регрессии, а затем получить оценки коэффициентов регрессии и их статистические характеристики, то есть необходимо правильно выполнить её (модели) спецификацию и идентификацию.

Заметим, что налицо согласованность требований по ветвям спецификации и идентификации, частичный конфликт только с экспериментом: требование минимизации количества опытов против максимизации такового на других ветвях.

Обобщая полученную совокупность требований и не рассматривая требования к процессу обработки, мы можем видеть, что основным требованием является минимальная закоррелированность. Кроме этого, максимальное число уровней варьирования, возможность постепенного наращивания числа экспериментов и устойчивость к малым изменениям плана.

К конфликтующим требованиям относится одновременное требование как максимального числа экспериментов по одной ветви, так и минимального по другой. На самом деле максимум экспериментов означает такое их количество, которое обеспечило бы построение модели, удовлетворяющей поставленным в исследовании целям.

Разрешение этого конфликта может быть обеспечено выполнением требования возможности наращивания количества экспериментов, так как его выполнение позволяет постепенное наращивание числа экспериментов от минимально возможного (насыщенный план) до достаточного для решения задачи.

Число уровней варьирования теоретически может достигать количества экспериментов, а в реальности ограничено возможностью установки (поддержания) фактически различающихся значений конкретных факторов.

Обращаем внимание, что здесь не идет речь о пассивном и активном эксперименте. То есть речь идет только о свойствах матрицы выборки, а как они получены, то ли специ-

альным формированием матрицы и последующим её заполнением в процессе эксперимента, то ли выборкой из наблюдений, не устанавливается.

В табл. 3 представлено соответствие различным требованиям существующих разновидностей робастных планов эксперимента.

Таблица 3. Соответствие требований различным требованиям

		Вид плана		
		На основе МФРП	На основе ЛП _t	Обобщенной свастики
Требования к плану	Независимость	Да	Да	Да
	Максимальное число уровней варьирования	Нет	Да	Да
	Устойчивость к малым изменениям в плане	Нет	Да	Да
	Возможная вариативность условий	Нет	Да	Частично
	Минимизация ресурсов	Нет	Да	Да
	Достаточный размер	Да	Да	Нет
	Случайность	Нет	Да	Частично

Мы рассмотрели некоторый условный комплекс условий. В реальных обстоятельствах могут быть различные требования, которые изменяют выбор вида плана. Считая требования равноправными (равновесными), выполним многокритериальную оптимизацию для трех видов планов и получим обобщенные характеристики эффективности (значения от 0 до 1). Результаты отражены на рис. 4.

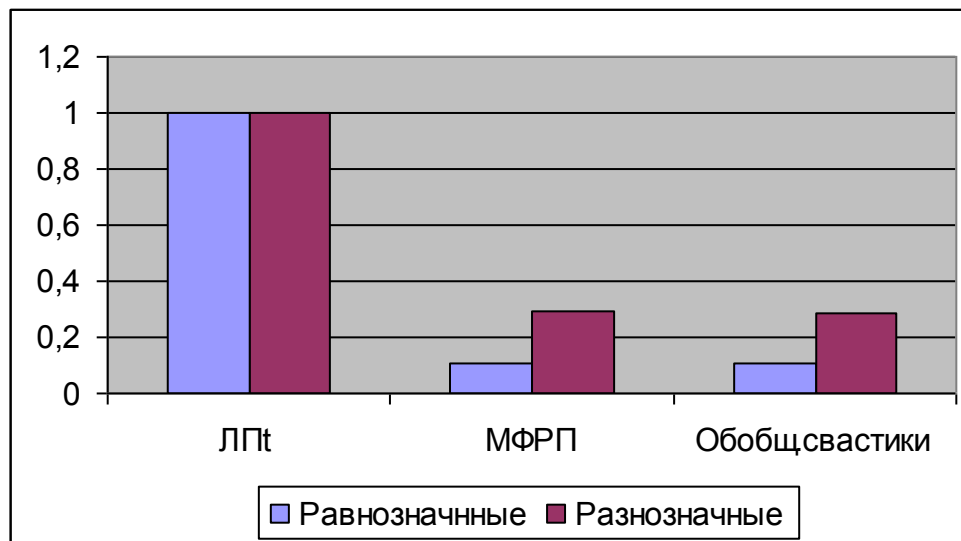


Рис. 4. Сравнительное обобщенное качество различных видов планов

Видно, что наилучшие в совокупности характеристики имеют планы на основе ЛП_t чисел. Уточним, что в определенных обстоятельствах это может быть и не так.

4. Выводы

Установлен комплекс требований для получения регрессионной модели с хорошими статистическими характеристиками, пригодной в дальнейшем для практического использования: анализ процесса, прогнозирование и прочее. Требования комплекса получены опира-

ясь на принцип Беллмана и процессный подход. Выполнена структуризация требований посредством диаграммы Исикава, представленной в табличной форме. Эти требования взаимосвязаны и относятся как к конструированию матрицы эксперимента, так и к алгоритмам построения регрессионной модели. При этом эксперимент не разделяется на пассивный и активный.

Полученная в результате предлагаемого подхода совокупность требований позволяет рассматривать построение эмпирической модели как единый процесс без деления на планирование эксперимента и регрессионный анализ и деления на пассивный и активный эксперименты. При этом понятно, на какие свойства модели влияют отдельные требования. Требования к плану и алгоритмам построения модели получают обоснование исходя из целей построения модели, а их выбор становится осознанным и соответствующим целям конкретного математического моделирования.

В дальнейшем предполагается детализация и установление значимости отдельных требований в зависимости от конкретных целей математического моделирования и особенностей предметной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Финни Д. Введение в теорию планирования эксперимента / Финни Д. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1970. – 287 с.
2. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента / Шенк Х. – М.: Мир, 1972. – 381 с.
3. Математическая теория планирования эксперимента / Под ред. Ермакова С.М. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
4. Ермаков С.М. Математическая теория планирования эксперимента / С.М. Ермаков, А.А. Жиглявский. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
5. Налимов В.В. Логические основания планирования эксперимента / В.В. Налимов, Т.И. Голикова. – [2-е изд. перераб. и доп.]. – М.: Металлургия, 1981. – 180 с.
6. Бродский В.З. Многофакторные регулярные планы / Бродский В.З. – М.: Изд-во МГУ, 1972. – 218 с.
7. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей / В.З. Бродский, Л.И. Бродский, Т.И. Голикова [и др.]. – М.: Металлургия, 1972. – 752 с.
8. Лапач С.Н. Статистические методы в фармакологии и маркетинге фармацевтического рынка / Лапач С.Н., Пасечник М.Ф., Чубенко А.В. – К.: ЗАТ “Укрспецмонтаж”, 1999. – 312 с.
9. Лапач С.Н. Проблемы построения математических моделей экспериментально-статистическими методами / С.Н. Лапач // Прогресивна техніка і технологія машинобудування, приладобудування і зварювального виробництва. Праці НТУУ “КПР”. – К.: НТУУ “КПР”, 1998. – Т. 2. – С. 25 – 29.
10. Лапач С.Н. Основные проблемы построения регрессионных моделей / С.Н. Лапач, С.Г. Радченко // Математичні машини і системи. – 2012. – № 4. – С. 125 – 133.
11. Лапач С.Н. Регрессионный анализ. Процессный подход / С.Н. Лапач // Математичні машини і системи. – 2016. – № 1. – С. 129 – 138.
12. Лагутин М.Б. Наглядная математическая статистика / Лагутин М.Б. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 472 с.
13. Калиткин Н.Н. Численные методы / Калиткин Н.Н. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1978. – 512 с.
14. Повышение эффективности метода случайного баланса путем применения ветвящейся стратегии и электронно-вычислительных машин / Р.И. Слободчикова, В.Л. Фрейдлина, З.С. Лапина [и др.] // Заводская лаборатория. – 1966. – № 1, Т. 32. – С. 53 – 58.
15. Сравнительный анализ алгоритмов выделения значимых факторов флотационного процесса методом случайного баланса / Л.А. Барский, Ю.Б. Рубинштейн, Р.Н. Слободчикова [и др.] // Заводская лаборатория. – 1968. – № 5, Т. 34. – С. 564 – 569.
16. К вопросу о построении матрицы планирования отсеивающего эксперимента / В.Д. Барский, Л.А. Забенко, А.А. Аксенина [и др.] // Заводская лаборатория. – 1971. – № 7, Т. 37. – С. 721 – 825.
17. Лапина З.С. Исследование границ применимости алгоритма случайного баланса / З.С. Лапина, Р.И. Слободчикова // Заводская лаборатория. – 1971. – № 7, Т. 37. – С. 818 – 821.
18. Мешалкин Л.Д. К обоснованию метода случайного баланса / Л.Д. Мешалкин // Заводская лаборатория.

ратория. – 1970. – № 3, Т. 36. – С. 316 – 318.

19. Дружинин Н.К. Выборочное наблюдение и эксперимент (Общие логические принципы организации) / Дружинин Н.К. – М.: Статистика, 1977. – 176 с.

20. Кохрен У. Методы выборочного исследования / Кохрен У. – М.: Статистика, 1976. – 440 с.

21. Михок Г. Выборочный метод и статистическое оценивание / Г. Михок, В. Урсяну. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 245 с.

22. Петров Ю.В. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов / Петров Ю.В. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 160 с.

23. Петрович М.Л. Регрессионный анализ и его математическое обеспечение на ЕС ЭВМ / Петрович М.Л. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 199 с.

24. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение / Райс Дж.; пер. с англ. О.Б. Арушаняна; под ред. В.В. Воеводина. – М.: Мир, 1984. – 264 с.

25. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии / Демиденко Е.З. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.

Стаття надійшла до редакції 29.06.2016