УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІНУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА, ЯКИЙ ОБЕРТАЄТЬСЯ

*Державний вищий навчальний заклад "Національний гірничий університет", Дніпро, Україна

Анотація. *У статті за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення знайдено температурне поле кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціях Бесселя і Фур'є.*
Ключові слова: *узагальнене рівняння переносу енергії, інтегральні перетворення Лапласа, Фур'є, час релаксації.*

Аннотация. *В статье с помощью разработанного нового интегрального преобразования найдено температурное поле кусочно-однородного кругового цилиндра в направлении полярного радиуса, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ, с учетом конечной скорости распространения тепла в виде сходящихся ортогональных рядов по функциям Бесселя и Фурье.*
Ключевые слова: *обобщенное уравнение переноса энергии, интегральные преобразования Лапласа, Фурье, время релаксации.*

Abstract. *Temperature field of piecewise homogeneous circular cylinder in the direction of the polar radius, rotating at a constant angular velocity about the axis OZ, taking into account the finite speed of propagation of heat in the form of convergent orthogonal series of Bessel functions and of Fourier with the help of the newly developed integral transformation was found in the article.*
Keywords: *generalized equation of energy transfer, the integral Laplace transforms, Fourier, relaxation time.*

1. Вступ. Аналіз останніх досліджень і публікацій

У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість поширення тепла є нескінченно великою [1, 2]. Однак при високих інтенсивних нестаціонарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання, вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [2 – 4].

У [2] показано, що рівняння переносу енергії у випадку узагальненого закону теплопровідності Фур'є справедливе для одномірного, однорідного і стаціонарного простору.

В [5] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.

Метою роботи є розробка нової узагальненої математичної моделі температурних розподілів у кусково-однорідному циліндрі у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності та розв'язання отриманої крайової задачі для рівняння теплопровідності, розв'язки якої використовуються під час керування температурними полями.

Як показує огляд літератури, теплообмін у циліндрах, які обертаються, вивчений на даний час ще недостатньо [5, 6]. Показано, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндрів, які обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання [6].

Так, доводиться [6], що умови стійкості обчислень у методі кінцевих елементів і методі кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестаціонарних неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд

$$1-\frac{\Delta F_0}{\Delta\varphi^2}\geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta\varphi}-\frac{Pd}{2}\geq 0,$$

де F_0 – критерій Фур'є, Pd – критерій Предводителева.

Якщо $Pd=10^5$, що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра $\omega=1{,}671\,c^{-1}$ радіусом 100 мм, змінні $\Delta\varphi$ і ΔF_o повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta\varphi\leq 2\,10^{-5} \quad \text{і} \quad \Delta F_o\leq 2\,10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови Bi=5 (Bi – критерій Біо) час, необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює $Fo\approx 0{,}025$ [6]. Це означає, що потрібно принаймні здійснити $1{,}3\cdot 10^8$ операцій по часу для того, щоб був досягнутий стаціонарний розподіл температури.

Проте потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити $3{,}14\cdot 10^5$ обчислень, адже внутрішній стан у кільці характеризується $3{,}14\cdot 10^5$ точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату, видається нереальним.

Тому для вирішення крайової задачі, яка виникає при математичному моделюванні нестаціонарних процесів теплообміну в циліндрах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

2. Постановка задачі

Розглянемо розрахунок нестаціонарного температурного поля суцільного кругового циліндра зовнішнього радіуса R у циліндричній системі координат (r,φ,z) кусково-однорідного в напрямку полярного радіуса r, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. Теплофізичні властивості його в кожному шарі не залежать від температури за умови ідеального теплового контакту між шарами, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0, а на зовнішній поверхні циліндра температура відома і не залежить від часу $G(\varphi)$.

Відносні температури $\theta_s(\rho,\varphi,t)$ s-го шару циліндра обчислюються за формулою

$$\theta_s(\rho,\varphi,t)=\frac{T_s(\rho,\varphi,t)-G_0}{T_{\max}-G_0},$$

де $T_s(\rho,\varphi,t)$ – температура s-го шару циліндра, $T_{\max}=\max\limits_{\varphi}G(\varphi)$, $\rho=\frac{r}{R}$, $s=1,2$.

Таким чином, відносну температуру циліндра $\theta(\rho,\varphi,t)$ можна представити у вигляді

$$\theta(\rho,\varphi,t)=\begin{cases}\theta_1(\rho,\varphi,t) & \text{якщо} \quad \rho\in(\rho_0,\rho_1),\\ \theta_2(\rho,\varphi,t) & \text{якщо} \quad \rho\in(\rho_1,\rho_2).\end{cases} \qquad (1)$$

3. Розв'язок задачі

У [5] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно з [5], узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, приймає вигляд

$$\gamma\, c\left\{\frac{\partial T}{\partial t}+\omega\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \qquad (2)$$

де γ – щільність середовища, c – питома теплоємність, λ – коефіцієнт теплопровідності, $T(\rho,\varphi,t)$ – температура середовища, t – час, τ_r – час релаксації.

Математично задача визначення відносної температури циліндра $\theta(\rho,\varphi,t)$ (1) складається в інтегруванні гіперболічних диференціальних рівнянь теплопровідності (2) в області $D_s=\{(\rho,\varphi,t)|\rho\in(\rho_{s-1},\rho_s),\varphi\in(0,2\pi),\mathrm{t}\in(0,\infty)\}$, що, з урахуванням прийнятих допущень, запишеться у виді

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta_s}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_s}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\varphi\partial t}=\alpha_s^2\left[\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_s}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\varphi^2}\right] \qquad (3)$$

з початковими умовами

$$\theta_s(\rho,\varphi,0)=0,\quad \frac{\partial\theta_s(\rho,\varphi,0)}{\partial t}=0, \qquad (4)$$

граничною умовою

$$\theta_2(1,\varphi,t)=V(\varphi), \qquad (5)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_1(\rho_1,\varphi,t)=\theta_2(\rho_1,\varphi,t), \qquad (6)$$

$$\lambda_1\frac{\partial\theta_1(\rho_1,\varphi,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\theta_2(\rho_1,\varphi,t)}{\partial\rho}, \qquad (7)$$

а на осі циліндра виконується умова обмеженості

$$\theta_1(\rho,\varphi,t)<\infty, \qquad (8)$$

де $\rho_1=\frac{R_1}{R}$, $\rho_0=0$, $\rho_2=1$, R_1 – радіус межі шарів, λ_s – коефіцієнт теплопровідності, γ_s – щільність, c_s – питома теплоємність, $a_s=\frac{\lambda_s}{c_s\gamma_s}$ – коефіцієнт температуропровідності s-го шару циліндра, $\alpha_s^2=\frac{a_s}{R^2}$, $s=1,2$, $V(\varphi)\in \mathrm{C}(\mathrm{D})$.

Тоді рішення крайової задачі (3) – (8) $\theta_s(\rho,\varphi,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ і φ, один раз по t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [7], тобто $\theta_s(\rho,\varphi,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $V(\varphi)$, $\theta_s(\rho,\varphi,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [8]:

$$\left\{\begin{matrix} \theta_s(\rho,\varphi,t) \\ V(\varphi) \end{matrix}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{\begin{matrix} \theta_{s,n}(\rho,t) \\ V_n \end{matrix}\right\} \cdot \exp(in\varphi), \tag{9}$$

де

$$\left\{\begin{matrix} \theta_{s,n}(\rho,t) \\ V_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{\begin{matrix} \theta_s(\rho,\varphi,t) \\ V(\varphi) \end{matrix}\right\} \cdot \exp(-in\varphi) d\varphi,$$

де $\theta_{s,n}(\rho,t) = \theta_{s,n}^{(1)}(\rho,t) + i\,\theta_{s,n}^{(1)}(\rho,t)$, $\mathrm{V_n} = V_n^{(1)} + i\,\mathrm{V_n^{(2)}}$, i – уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta_s(\rho,\varphi,t)$ функції дійсні, надалі обмежимося розглядом $\theta_{s,n}(\rho,t)$ для $n = 0,1,2,...,$ тому що $\theta_{s,n}(\rho,t)$ і $\theta_{s,-n}(\rho,t)$ будуть комплексно спряженими [8]. Підставляючи значення функцій з (9) у (3) – (8), у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)} \theta_{s,n}^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r \vartheta_n^{(i)} \frac{\partial \theta_{s,n}^{(m_i)}}{\partial t} = \alpha_s^2 \left[\frac{\partial^2 \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \theta_{s,n}^{(i)} \right] \tag{10}$$

з початковими умовами

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho,0) = 0, \qquad \frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}(\rho,0)}{\partial t} = 0, \tag{11}$$

граничною умовою

$$\theta_{2,n}^{(i)}(1,t) = V_n^{(i)}, \tag{12}$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t) = \theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t), \tag{13}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial \rho}, \tag{14}$$

а на осі циліндра виконується умова обмеженості

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho,t) < \infty,$$

де $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n,\quad \vartheta_n^2 = \omega n$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $i = 1,2$.

Для розв'язання крайової задачі (10)–(14) побудуємо інтегральне перетворення [9 – 10]:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \int_{\rho_0}^{1} \frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\alpha(\rho)} \rho\ f(\rho) d\rho = \sum_{s=1}^{2} \int_{\rho_{s-1}}^{\rho_s} \frac{Q_s(\mu_{n,k}\rho)}{\alpha_s^2} \rho\, f(\rho) d\rho, \tag{15}$$

де $\qquad Q_0(\mu_{n,k}\rho),\ \alpha(\rho) = \begin{cases} Q_1\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right),\ \alpha_1^2 & \textit{якщо}\quad \rho \in (\rho_0,\rho_1), \\ Q_2\left(\dfrac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right),\ \alpha_2^2 & \textit{якщо}\quad \rho \in (\rho_1,\rho_2). \end{cases}$

Власні функції $Q_s(\mu_{n,k}\rho)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку задачі Штурма-Ліувілля:

$$\frac{d^2 Q_s}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dQ_s}{d\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}+\frac{\mu^2{}_{n,k}}{\alpha_s^2}Q_s=0, \tag{16}$$

$$Q_1(0)<\infty, \quad Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s}\right)=0, \tag{17}$$

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)=Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right), \quad \lambda_1\frac{\partial Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\partial\rho} \quad (s=1,2). \tag{18}$$

Розв'язавши задачу Штурма-Ліувілля (16) – (18), одержуємо

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)=\frac{J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)}{J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}, \quad Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=\frac{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}, \tag{19}$$

де $\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)-J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)$, $J_n(x), Y_n(x)$ – функції Бесселя $1^{го}$ і $2^{го}$ роду $n^{го}$ порядку відповідно [11].

Власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку трансцендентного рівняння

$$\frac{\mu_{n,k}J'_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\alpha_1 J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}=\sigma\frac{H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)},$$

де $H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\left[Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)J'_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)-J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)Y'_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)\right]$, $\sigma=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Формула оберненого перетворення має вигляд

$$\mathrm{f}(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2}\ \bar{f}(\mu_{n,k}), \tag{20}$$

де

$$\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2=\frac{\rho_1^2}{2\alpha_1^2}\left\{\left(1-\frac{\mathrm{n}^2\alpha_1^2}{\mu_{n,k}^2\rho_1^2}\right)+\left[\frac{\mu_{n,k}J'_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\alpha_1 J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}\right]^2\right\}+\frac{\rho_2^2}{2\alpha_2^2}\left[\frac{\alpha_2 H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)}{\mu_{n,k}\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2-$$

$$-\frac{\rho_1^2}{2\alpha_2^2}\left\{\left(1-\frac{\mathrm{n}^2\alpha_2^2}{\mu_{n,k}^2\rho_1^2}\right)+\left[\frac{\alpha_2 H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\mu_{n,k}\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2\right\}.$$

До системи диференціальних рівнянь (10) застосовуємо інтегральне перетворення (15) і, враховуючи позначення (1), в результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\overline{\theta}_n^{(i)}}{d\,t}+\vartheta_n^{(i)}\left[\overline{\theta}_n^{(m_i)}+\tau_r\frac{d\overline{\theta}_n^{(m_i)}}{d\,t}\right]+\tau_r\frac{d^2\overline{\theta}_n^{(i)}}{d\,t^2}=\frac{Q_2'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\right)V_n^{(i)}}{\mu_{n,k}}-\mu_{n,k}^2\overline{\theta}_n^{(i)} \tag{21}$$

з початковими умовами

$$\overline{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k},t)=0,\quad \frac{\partial\overline{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k},t)}{\partial t}=0\ \ (i=1,2). \tag{22}$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (21) інтегральне перетворення Лапласа [12]:

$$\widetilde{f}(s)=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\widetilde{\widetilde{\theta}}_n^{(i)}$:

$$s\widetilde{\widetilde{\theta}}_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\widetilde{\widetilde{\theta}}_n^{(m_i)}+\tau_r s\widetilde{\widetilde{\theta}}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\widetilde{\widetilde{\theta}}_n^{(i)}=q_{n,k}\left(\frac{Q_2'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\right)\widetilde{V}_n^{(i)}}{\alpha_2\mu_{n,k}}-\widetilde{\widetilde{\theta}}_n^{(i)}\right), \tag{23}$$

де $i=1,2$, $q_{n,k}=\mu^2{}_{n,k}$.

Розв'язавши систему рівнянь (23), одержуємо

$$\widetilde{\widetilde{\theta}}_n^{(i)}=\alpha_{n,k}\frac{\widetilde{V}_n^{(i)}\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q_{n,k}}\right)+(-1)^{i+1}\omega n\widetilde{V}_n^{(m_i)}(1+s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q_{n,k}}\right)^2+\omega^2n^2(1+s\tau_r)^2},\quad (i=1,2), \tag{24}$$

де $\alpha_{n,k}=\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}Q_2'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\right)$.

Застосовуючи для зображення функцій (17) формули оберненого перетворення Лапласа, одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{aligned}\overline{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)=&\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{V_n^{(1)}\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega ni\right]+V_n^{(2)}\cdot\left[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\}\cdot\\ &\cdot\left(e^{s_jt}-1\right)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{V_n^{(1)}\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega ni\right]+V_n^{(2)}\cdot\left[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\}\cdot\\ &\cdot\left(e^{s_jt}-1\right),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\overline{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)=&\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{V_n^{(2)}\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega ni\right]-V_n^{(1)}\cdot\left[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\}\cdot\\ &\cdot\left(e^{s_jt}-1\right)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{V_n^{(2)}\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega ni\right]-V_n^{(1)}\cdot\left[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)i\right]\right\}\\ &\left(e^{s_jt}-1\right),\end{aligned} \tag{26}$$

де $\zeta_{n,k}(s_j)=\frac{0{,}5s_j^{-1}\alpha_{n,k}}{(2\tau_r s_j+1)^2+(\tau_r\omega n)^2}$, а значення s_j для $j=1,2,3,4$ визначаються за формулами

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1+\tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}, \; s_{,3,4} = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1-\tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (9) і (20), одержуємо температурне поле кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho,\varphi,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t) + i \cdot \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t) \right] \frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\|^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi), \tag{27}$$

де значення $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)$ і $\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)$ визначаються за формулами (25), (26).

4. Висновки

У статті за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення знайдено температурне поле (27) кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціях Бесселя і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла, може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, прокатних валках, турбінах та ін.).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берд Р. Явления переноса / Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. – М., 1974. – 686 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности / Лыков А.В. – М., Высшая школа, 1967. – 599 с.
3. Лакуста Л.В. Некоторые оценки границ применимости гиперболического уравнения теплопроводности / Л.В. Лакуста, Ю.А. Тимофеев // ИФЖ. – 1979. – Т. 37, № 2. – С. 366 – 370.
4. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наукова думка, 1976. – 310 с.
5. Бердник М.Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну суцільного циліндра, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла / М.Г. Бердник // Вісник Дніпропетровського ун-ту. – (Серія «Механіка»). – 2005. – № 10. – С. 197 – 202.
6. Kuwashimo Kensuke Temperature distribution within a rotatinq cylindrieal body / Kuwashimo Kensuke, Yamada Tominori // Bull. JSME. – 1978. – Vol. 21, N 152. – P. 266 – 272.
7. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / Михлин С.Г. – М.: Высшая школа, 1977. – 427 с.
8. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Толстов Г.П. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
9. Бердник М.Г. Интегральные преобразования для кусочно-однородных сред в некоторых задачах теплопроводности / М.Г. Бердник // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Днепропетровск: ДГУ, 1984. – С. 82 – 87.
10. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Гринберг Г.А. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958. – 732 с.
11. Грэй Э. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике / Э. Грэй, Г.Б. Мэтьюз. – М.: ИЛ., 1949. – 386 с.
12. Галицын А.С. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А.С. Галицын, А.И. Жуковский. – Киев: Наукова думка, 1979. – 561 с.

Стаття надійшла до редакції 16.05.2016