

МОДЕЛЮВАННЯ КОНФЛІКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ В МЕРЕЖАХ: ЕВОЛЮЦІЙНО-ІГРОВИЙ ПІДХІД

В роботі розглянуто еволюційно-ігрову модель мережевої взаємодії. На сьогодні в мережі Інтернет існує велика кількість протоколів передачі даних, що різняться за якістю сервісу для кінцевого користувача. Процес вибору оптимального протоколу може бути розглянутий як математична гра, в якій гравці (користувачі) прагнуть до максимізації свого виграшу (пропускної здатності). В даній статті представлена модель мережевої взаємодії, що базується на диференційних рівняннях з розривною правою частиною, сформульовано матрицю виграшів для гри та знайдено умови існування рівноваги у вигляді обмежень на параметр чутливості до помилок. Результати підтверджено за допомогою симуляції.

Вступ

Теорія ігор широко застосовується для дослідження інформаційних мереж. Існуючі застосування ігрових моделей до розв'язання проблем у мережах охоплюють задачі маршрутизації, розподілу ресурсів, пошуку точки рівноваги мережі та аналізу стійкості роботи протоколів. Такого роду системи, як правило, надають послуги великій кількості користувачів, при цьому їх ресурси (пропускна здатність, буфери, потужність вузлів) обмежені. Користувачі (люди, програми, сервіси) є неоднорідними у своїх запитах і можуть діяти непередбачуваним чином. Необхідність розділяти ресурси між конкуруючими користувачами ефективним (максимально використовуючи можливості системи) та справедливим (максимально задовольняючи користувачів) чином ставить перед дослідниками складні проблеми.

Математичний апарат теорії ігор, розроблений для аналізу взаємодії декількох учасників виявився виключно придатним для опису процесів, які відбуваються у мережах, зокрема транспортній або телекомунікаційній – в першу чергу через те, що сама предметна область у цьому випадку припускає наявність незалежних агентів, що прагнуть максимізувати власний виграш – чи то якомога швидше дістатися до пункту призначення, чи найбільш швидко і надійно передати дані.

Відомі застосування ігрового підходу у комп'ютерних мережах до таких проблем як керування потоками даних

[1, 2], мережева маршрутизація [3, 4], балансування навантаження [5], розподіл ресурсів [6] та забезпечення якості обслуговування [7]. Втім, оскільки при аналізі взаємодії користувачів мережі набагато частіше мова йде про підмножини агентів зі спільними ознаками, що співіснують в одному середовищі природно формалізувати цю задачу в термінах теорії еволюційних ігор.

Еволюційна гра – різновид математичної гри, в якій розглядається взаємодія не окремих гравців, а цілих популяцій, або ж груп у межах однієї популяції. Уперше така термінологія була введена Дж. Смітом у роботі [8] для дослідження біологічних процесів, звідки й була успадкована термінологія: «популяція», «еволюція», «мутанти». Як аналог рівноваги за Нешем в еволюційних іграх запропоновано поняття «еволюційно стабільної стратегії» (ЕСС) – такого розподілу стратегій окремих осіб, що є сталим за часом і стійким до мутацій, тобто поява невеликої кількості гравців з незвичною стратегією не призводить до зміни структури популяції.

Формалізм еволюційних ігор виявився зручним для моделювання процесів за межами біології, зокрема, в економіці [9]. Дана робота пов'язана з застосування апарату теорії еволюційних ігор до розв'язання задачі знаходження положення рівноваги в комп'ютерній мережі. Справа в тому, що множину користувачів мережі можна розглядати як популяцію, члени якої конкурують за спільний

ресурс (в даному випадку – пропускну здатність), використовуючи при цьому одну з визначених стратегій поведінки (алгоритмів передачі даних). В такому випадку рівновага може бути описана як ЕСС популяції.

Проблемі пошуку такого стану та умов його існування присвячено роботи [10–12]. Зокрема, в [10] розглядається еволюційно-ігровий підхід до вибору оптимального алгоритму контролю завантаженості в бездротових мережах на прикладі конкуренції двох користувачів, кожен з яких має змогу обирати з двох AIMD-алгоритмів – «агресивного» і «мирного». Доведено наявність ЕСС в такій грі для різних співвідношень вигрів і досліджено вплив параметрів мережі на швидкість досягнення рівноваги.

В даній роботі поглиблюється та узагальнюється результат, отриманий у [10], в частині знаходження умов існування рівноваги в змішаних стратегіях для моделі взаємодії багатьох типів AIMD-з'єднань. Успішне розв'язання цієї задачі дозволить оптимізувати роботу протоколу TCP і характеристики можливих станів мережі за умов конкуренції користувачів.

В результаті побудовано модель еволюційної гри і знайдено точку рівноваги, яку досліджено на предмет відповідності умовам еволюційної стабільності. Виявляється, що тип рівноваги сильно залежить від параметрів, що характеризують протоколи і поведінку користувачів. В роботі представлено умови, що пов'язують ці параметри. Основною динамічною характеристикою системи в даній моделі є частка користувачів, що використовують певний вид протоколу. Значення 1 або 0 цієї величини відповідає стану рівноваги у чистих стратегіях, водночас як інші значення з проміжку (0, 1) – рівновазі у змішаних стратегіях. Динаміка зміни кількості користувачів у часі залежить від їх функції корисності і моделюється реплікаційним рівнянням. Для ілюстрації теоретичних результатів у роботі представлений чисельний розв'язок цього рівняння для різних значень пара-

метрів, виконаний у системі Wolfram Mathematica.

1. Модель

Розглянемо мережу, що складається з M робочих вузлів, з'єднаних у певну топологію. Кожен вузол має принаймні одну сервісну ланку, причому сумарна потужність сервісних ланок обмежена константою. Позначимо сервісну потужність вузлів p_i , $i=1, \dots, M$, де I , K – множини індексів вузлів $\{1, \dots, M\}$ та сервісних ланок $\{1, \dots, L\}$ відповідно. Розглянемо N користувачів, з'єднаних з мережею. Ми вважаємо, що мета користувачів полягає у передачі певного обсягу даних через мережу. Позначимо $x_j(t)$ швидкість передачі j -го користувача, де $j \in J = \{1, \dots, N\}$. Оскільки швидкість передачі даних не може бути від'ємною, то для вектора швидкостей $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$ виконується $x \in R_+^N$. Якщо сума швидкостей потоків даних, що використовують ланки певного вузла перевищать його потужність відбудеться переповнення (подія, наслідком якої буде втрата пакету користувача). Ця схема є ідеалізацією відомого алгоритму Droptail. Будемо вважати, також, що маршрутизація є детерміністичною, а інформація про втрату пакету надходить до користувача миттєво. Позначимо $u_k(t)$, $k \in K$ швидкість обслуговування k -ої ланки. Визначимо матрицю C наступним чином: c_{ij} дорівнює 1 якщо i -а ланка належить j -му вузлу і 0 в іншому разі. Використовуючи цю матрицю визначимо множину U як $\{u \in R_+^K \mid Cu \leq 1\}$. Множина U містить всі можливі набори швидкостей обслуговування мережі. Нехай $P = \text{diag}\{p_1, \dots, p_M\}$ – діагональна матриця. Матриця маршрутизації R – це матриця розмірності $M \times M$, елемент r_{ij} , $i, j \in P$ дорівнює 1 якщо вихід i -ї ланки є входом j -ї ланки і 0 в іншому разі. Матриця A є матрицею розмірності $L \times N$, елемент a_{ij} , $i \in K$, $j \in J$ дорівнює 1 якщо j користувач

використовує i ланку і 0 в іншому разі. Важливим результатом є визначення умов які б гарантували стабільну роботу системи, тобто умови за яких у системі не виникають переповнення.

Твердження 1.1. (Умова стабільності) Якщо вектор швидкостей $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ задовольняє умові $\Xi \bar{x}(t) < 1$, де матриця $\Xi = CP^{-1} \sum_{k=0}^{M-1} (R^T)^k A$, то в системі не виникає переповнення.

Доведення. Нехай $\bar{x}(t)$ – вектор швидкостей користувачів. Мережа намагається розподілити власні ресурси (вектор $\bar{u}(t)$) так, щоб найкраще обслужити користувачів: $Ax(t) - (I - R^T)P\bar{u}(t) = 0$. Це завжди можливо, якщо $\bar{u}(t) = P^{-1}(I - R^T)^{-1}A\bar{x} \in U$, де обернена матриця визначена як степеневий ряд $[I - R]^{-1} = \sum_{k=0}^{M-1} R^k$ (відома властивість матриці маршрутизації). Умова стійкості є формальним виразом наступного включення: $P^{-1}(I - R^T)^{-1}A\bar{x} \in \text{int } U$, границя множини U була виключена з розгляду щоб попередити подію переповнення.

Проілюструємо цей результат на деяких класичних прикладах.

1.1. Приклади

Single server. Найпростіша можлива топологія мережі. Розглянемо один вузол з потужністю p , $M = L = 1$. До мережі під'єднані N користувачів з швидкостями $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T$. $A = [1 \dots 1]$, множина $U = [0, p] \subset R_+$. Для даної системи $\Xi = \left[\frac{1}{p} \right]$ і умова стабільності записується у вигляді $x_1(t) + \dots + x_N(t) < p$.

Klimov model. Розглянемо модель, показана на рис. 1. N користувачів з вектором швидкостей $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T$ використовують N ланок, розташованих на одному вузлі. Кожна ланка має макси-

мальну швидкість обробки p_j , $j = 1, \dots, N$ та $u_j(t)$ – відсоток використання спільного ресурсу (напр., час CPU, пропускна здатність). Враховуючи, що $C = [1 \dots 1]$,

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_N \end{bmatrix} \text{ отримуємо:}$$

$$U = \left\{ u \in R_+^K \mid CP^{-1}u \leq 1 \right\} = \left\{ u \in R_+^K \mid \frac{u_1}{p_1} + \dots + \frac{u_N}{p_N} \leq 1 \right\}.$$

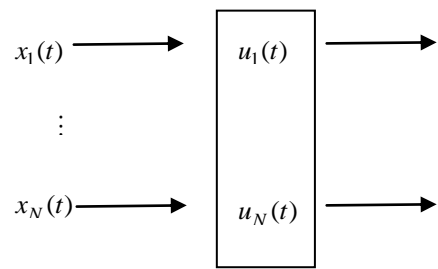


Рис. 1. Топологія мережі Klimov model

Матриця $A = I$, тому

$$\Xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & \dots & \frac{1}{p_N} \end{bmatrix}$$

і умова стабільності задається формулою

$$\frac{x_1(t)}{p_1} + \dots + \frac{x_N(t)}{p_N} < 1.$$

Re-entrant line. Розглянемо більш складну топологію, показану на рис 2.

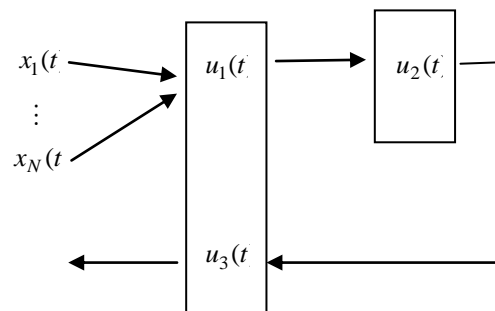


Рис. 2. Топологія мережі Re-entrant line

В даній моделі N користувачів з вектором швидкостей $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, \dots, x_N(t))^T$ надсилають свої пакети на першу ланку першого вузла з максималь-

ною пропускнуою здатністю p_1 та параметром керування $u_1(t) \in [0, 1]$. Після цього пакети потрапляють на другий вузол з однією ланкою потужності p_2 та параметром керування $u_2(t) \in [0, 1]$. Після обробки пакети повертаються на другу ланку першого вузла (з параметрами p_3 та $u_3(t) \in [0, 1]$) та покидають систему. Ланки 1 та 2 розташовані на одному вузлі, тому їх сумарна потужність обмежена.

Визначимо матриці і множину U для даної мережі:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \left\{ u \in R_+^3 \mid \frac{u_1}{p_1} + \frac{u_3}{p_3} \leq 1, u_2 \leq p_2 \right\}.$$

Матриця маршрутизації дорівнює

$$R^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

і

$$(I - R^T)^{-1} = I + R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Нарешті, } \Xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3} & \dots & \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3} \\ \frac{1}{p_2} & \dots & \frac{1}{p_2} \end{bmatrix} \text{ і}$$

умова стабільності складається з двох нерівностей:

$$\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3} \right) (x_1(t) + \dots + x_N(t)) < 1,$$

$$(x_1(t) + \dots + x_N(t)) < p_2.$$

Якщо вектор x задовольняє цим нерівностям, втрат у мережі не виникатиме.

1.2. Динамічна модель AIMD

Існують різні реалізації TCP алгоритму. Найбільш вживаний на сьогодні варіант, що називається New Reno TCP. Його поведінка досить близька до AIMD. New Reno збільшує розмір вікна лінійно на α пакетів за кожен період i , якщо виявлена подія переповнення, зменшує розмір вікна в β раз. Константи α та β дорівнюють 1 та 1/2, відповідно.

Специфікація TCP не забороняє користувачам використовувати інші механізми контролю перевантажень. Наприклад, при використанні AIMD схеми користувач може змінювати значення α та β . Очевидно, якщо визначити α та β більшими за стандартні налаштування (1, 1/2), можна отримати перевагу над з'єднаннями інших користувачів. Це призведе до несправедливого розподілу ресурсів і тому не є бажаним. Така взаємодія протоколів називається «недружною» при цьому говорять, що перший протокол є більш «агресивним», а інші – більш «миролюбними». Під агресивністю у даному контексті розуміється можливість захопити більшу частку ресурсів мережі ніж належить даному користувачу за справедливого розподілу. Питання взаємодії протоколів є достатньо складним, тому побудова аналітичної моделі, яка б передбачала поведінку мережі є нагальною проблемою.

Останнім часом виникли більш агресивні версії TCP такі як: HSTCP (High Speed TCP) та Scalable TCP. HSTCP може моделюватись AIMD схемою, де α і β не константи: мінімальні значення α і β дорівнюють 1 і 1/2, відповідно. Зі збільшенням вікна вони додатково збільшуються. Scalable TCP є MIMD (Multiplicative Increase Multiplicative Decrease) протоколом, де розмір вікна збільшується експоненціально, а не лінійно, і тому більш агресивно. Існують також версії TCP, які менш агресивні за New-Reno, наприклад Vegas.

Побудуємо динамічну модель AIMD з'єднання на основі теорії диференціальних рівнянь з розривною правою частиною. Нехай \bar{x}_0 початковий вектор

швидкостей, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ вектори параметрів протоколу. Відповідно до AIMD схеми швидкості користувачів зростають між подіями переповнення з швидкістю $\bar{\alpha}$. При переповненні відбувається стрибок швидкості в сторону зменшення, новий набір дорівнює $\bar{\beta}x$. Визначимо t_i , $i \geq 1$ – перший момент часу $t_i > t_{i-1}$, такий, що існує індекс $j \in J$: $[\mathcal{E}x(t_i)]_j = 1$. Будемо вважати, що всі з'єднання знаходяться у рівних умовах, втрати синхронізовані і коли сумарна швидкість досягає обмеження, падіння відбувається у всіх з'єднань.

Розглянемо рівняння

$$\dot{x}(t) = \bar{\alpha} - \sum_{i=1}^{N_t} (I - B)x(t_i)\delta(t - t_i), \quad (1)$$

де δ – Діраковська дельта-функція, $B = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_N\}$, $N_t = \max\{n : t_n \leq t\}$. Рівняння (1) є рівнянням Каратеодорі з розривною правою частиною (імпульсною правою частиною). Відомо, що це рівняння має майже неперервний розв'язок (неперервний скрізь окрім множини міри нуль)

$$x(t) = \alpha t - \sum_{i=1}^{N_t} (I - B)x(t_i)\eta(t - t_i), \quad (2)$$

де η – функція Хевісайда. Явна формула (2) не надто практична, але надає важливу інформацію щодо існування розв'язку та його властивостей.

2. Основний результат

Введемо множину V за формулою $\{v \in R_+^N \mid \min[\mathcal{E}v]_j = 1, j \in J\}$ та множину $W = \{w \in R_+^N \mid \mathcal{E}w \leq 1\}$. Зрозуміло, що V – компакт, W – опуклий компакт, і $V \subseteq \partial W$.

Умова 1. Для будь-якої точки $x \in V$ виконується $Bx \in \text{int } W$.

Ця умова означає, що після застосування оператора B швидкості гравців не покидають допустиму множину. Для формулювання та доведення головного результату нагадаємо необхідні визначення. Множина $X \subset R^n$ гомеоморфна множині $Y \subset R^m$, якщо існує бієктивне неперервне

відображення $h: X \rightarrow Y$, таке, що h^{-1} існує і також неперервне. Множина точок $\{x^0, \dots, x^n\} \subset R^m$ називається афінно незалежною, якщо з виконання рівностей $\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i = 0$ та $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ випливає, що $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$.

N -вимірним симплексом називається множина всіх додатних опуклих комбінацій $n+1$ афінно незалежних точок. Позначимо Δ_n замикання стандартного n -вимірного симплексу:

$$\left\{ y \in R^{n+1} \mid y_i > 0, i = 0, \dots, n; \sum_{i=0}^n y_i = 1 \right\}.$$

Теорема (Брауер) [12]. Нехай множина $X \subset R^n$ є гомеоморфною симплексу Δ_{n-1} і відображення $f: X \rightarrow X$ є неперервним. Тоді f має нерухому точку, тобто існує $x \in X$ така, що $f(x) = x$.

Тепер сформулюємо основний результат – про існування та єдність граничного розв'язку.

Твердження 2. Розглянемо допустиму пару векторів $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$. Якщо виконується умова 1, то для будь-якого $\bar{x}_0 \in W$ розв'язок існує та сходиться до єдиного періодичного розв'язку $\hat{x}(t)$.

Доведення. Розглянемо відображення $f: V \rightarrow V$, визначене за формулою $f(v) = \{y \in V \mid \exists t > 0: Bv + \alpha t = y\}$. Умова 1 виконується, тому $f(\cdot)$ визначене для будь-якої точки з V і не виводить за межі цієї множини. За визначенням $f(\cdot)$ – неперервне відображення. Розглянемо симплекс Δ_{N-1} побудований на точках e_1, \dots, e_N , де e_i – це вектори стандартного базису. Для кожної точки $x \in V$ існує єдиний вектор $\psi \in \Delta_{N-1}$, такий, що $x = a\psi$ для деякого числа $a \in R$. Це означає, що V гомеоморфна Δ_{N-1} , тому виконані умови теореми Брауера і існує нерухома точка $\bar{x}^* \in V$ відображення $f(\cdot)$. Позначимо $\bar{\gamma}$ вектор з компонентами

$\gamma_i = \frac{\alpha_i}{1 - \beta_i}$. За визначенням нерухомої точки виконується рівність

$$B\bar{x}^* + \bar{\alpha}T = \bar{x}^*,$$

де $T = \min\{t : \bar{x}^* + \bar{\alpha}t \in V\}$. Обчислимо \bar{x}^* :

$$\bar{x}^* = (I - B)^{-1}\bar{\alpha}T = \gamma T.$$

Умова $\bar{x}^* + \bar{\alpha}T \in V$ може бути переписана як $\min_i (\Xi \bar{x}^*)_i = 1$ або $\min_i (\Xi \gamma T)_i = 1$, тому T визначається однозначно і нерухомою точкою єдина. Розв'яжемо рівняння (1) з початкового стану $B\bar{x}^*$. Зрозуміло, що $\hat{x}(t) = \alpha t + B\bar{x}^*$ для $t \in [0, T)$ і $\hat{x}(T) = \hat{x}(0)$. Отже, розв'язок $\hat{x}(t)$ є періодичним з періодом T . Розглянемо довільний розв'язок з початкового стану $x(0) \in W$. Нехай $x(t_1)$ – перший момент часу, коли $x(t_1) \in V$, визначимо $z_n = f(z_{n-1})$, $z_0 = f(x(t_1))$. Всі елементи послідовності $\{z_n\}$, $n = 0, \dots, \infty$ належать компактну V , отже існує гранична точка $\tilde{x} \in V$, $\tilde{x} = f(\tilde{x})$. Єдиний можливий розв'язок, пов'язаний з цією граничною точкою – $\hat{x}(t)$. Отже, будь-який розв'язок сходиться до $\hat{x}(t)$.

Застосуємо теорему до розв'язку прикладів. Позначимо T – період коливань розв'язку, x^* – нерухомою точкою.

Single server. Зауважимо, що

$$\Xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \dots & \frac{1}{p} \end{bmatrix},$$

тому умова $x \in V$ переписується у вигляді $\frac{x_1}{p} + \dots + \frac{x_N}{p} = 1$.

Нехай $x^* \in V$ нерухомою точкою, тоді

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{1 - \beta_1} & \dots & \frac{\alpha_N}{1 - \beta_N} \end{bmatrix}^T T,$$

і $\Xi A(Bx^* + \alpha T) = 1$. Розв'язуючи систему лінійних рівнянь, отримуємо:

$$T = \frac{p}{\frac{\alpha_1}{1 - \beta_1} + \dots + \frac{\alpha_N}{1 - \beta_N}}.$$

Зауважимо, якщо всі $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, то $T = \frac{p(1 - \beta)}{N\alpha}$, $x_i^* = \frac{p}{N}$.

Klimov model. Матриця

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ p_1 & \dots & p_N \end{bmatrix},$$

тому умова $x \in V$ переписується у вигляді $\frac{x_1}{p_1} + \dots + \frac{x_N}{p_N} = 1$. Нерухомою точкою є розв'язком системи рівнянь:

$$\Xi(Bx + \alpha T) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\beta_i x_i}{p_i} + \frac{\alpha_i T}{p_i} \right) = 1,$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{1 - \beta_1} & \dots & \frac{\alpha_N}{1 - \beta_N} \end{bmatrix}^T T.$$

Результат:

$$T = \frac{1}{\frac{\alpha_1}{(1 - \beta_1)p_1} + \dots + \frac{\alpha_N}{(1 - \beta_N)p_N}},$$

$$x_i^* = \frac{\alpha_i}{(1 - \beta_i) \left(\frac{\alpha_1}{(1 - \beta_1)p_1} + \dots + \frac{\alpha_N}{(1 - \beta_N)p_N} \right)}.$$

Re-entrant line.

$$\Xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3} & \dots & \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3} \\ \frac{1}{p_2} & \dots & \frac{1}{p_2} \end{bmatrix}.$$

Нерухомою точкою є розв'язком системи рівнянь:

$$\Xi(Bx + \alpha T) = 1,$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{1 - \beta_1} & \dots & \frac{\alpha_N}{1 - \beta_N} \end{bmatrix}^T T.$$

Результат

$$T = \frac{1}{\sum_i \frac{\alpha_i}{(1 - \beta_i)} \max \left\{ \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3} \right\}},$$

$$x_i^* = \frac{\alpha_i}{(1 - \beta_i)} T.$$

3. Ігрова модель

Розглянемо тепер конкуренцію між користувачами та побудуємо ігрову модель їх взаємодії. скільки було доведено існування періодичного рішення для мереж, що розглядаються, то при побудові гри будемо вважати, що мережа задана потужністю c . Визначимо N стратегій s_i з параметрами (α_i, β_i) , $i=1, \dots, N$. Нехай S – множина всіх допустимих стратегій. Будемо розглядати функцію виграшу у вигляді

$$J_i(s) = Thp_i(s) - \lambda R(s),$$

де $\bar{s} = (s_1, \dots, s_N)$ – вектор стратегій, $Thp_i(s) = 0.5(1 + \beta_i)x_i^*$ – усереднена швидкість i -го гравця; λ – параметр чутливості до втрат; $R(s) = \frac{1}{T(s)}$ – інтенсивність втрат.

Приклад. Обчислимо виграші для двох стратегій:

$$J_1(s_i, s_i) = J_2(s_i, s_i) = \frac{(1 + \beta_i)}{4}c - \lambda \frac{2\gamma_i}{c},$$

$$J_1(s_1, s_2) = \frac{(1 + \beta_1)\gamma_1 c}{2(\gamma_1 + \gamma_2)} - \frac{\lambda}{c}(\gamma_1 + \gamma_2),$$

$$J_1(s_2, s_1) = \frac{(1 + \beta_2)\gamma_2 c}{2(\gamma_1 + \gamma_2)} - \frac{\lambda}{c}(\gamma_1 + \gamma_2),$$

$$J_2(s_1, s_2) = J_1(s_2, s_1),$$

$$J_2(s_2, s_1) = J_1(s_1, s_2).$$

3.1. Рівновага у грі з N протоколами

Розглянемо гру, в якій кожен користувач може вибрати одну з N AIMD стратегій, після чого його виграш обчислюється у залежності від усього вектору s . Будемо вважати, що всі s_i впорядковані таким чином $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_N$, де $s_i \geq s_j$ означає, що $\alpha_i \geq \alpha_j$ і $\beta_i \geq \beta_j$. Іншими словами стратегії відсортовані у порядку зменшення агресивності.

Твердження 3.1. Якщо λ достатньо мале, агресивний протокол є домінуючою стратегією.

Доведення. Нехай $\alpha_1 \geq \alpha_i$, $\beta_1 \geq \beta_i$ для всіх $i = 2, \dots, N$. Розглянемо виграші першого гравця для різних стратегій – $J_1(s_1, s_{-1})$ і $J_1(s_j, s_{-1})$. Обчислимо виграші для кожного з випадків:

$$T(s_1, s_{-1}) = \frac{c}{\gamma_1 + A},$$

де $A = \sum_k \gamma_k$ – сума, визначена множиною стратегій $s_{-1} = (s_2, \dots, s_N)$, $T(s_j, s_{-1}) = \frac{c}{\gamma_j + A}$.

Зрозуміло, що

$$T(s_1, s_{-1}) < T(s_j, s_{-1}).$$

$$Thp_1(s_1, s_{-1}) = \frac{(1 + \beta_1)x_1^*}{2} =$$

$$= \frac{\gamma_1(1 + \beta_1)c}{2(\gamma_1 + A)} = \frac{(1 + \beta_1)c}{2(1 + A/\gamma_1)},$$

$$Thp_1(s_j, s_{-1}) = \frac{(1 + \beta_j)x_j^*}{2} = \frac{(1 + \beta_j)c}{2(1 + A/\gamma_j)}.$$

$$J_1(s_1, s_{-1}) = Thp_1(s_1, s_{-1}) - \frac{\lambda}{c}(\gamma_1 + A),$$

$$J_1(s_j, s_{-1}) = Thp_1(s_j, s_{-1}) - \frac{\lambda}{c}(\gamma_j + A).$$

Запишемо умову домінування першої стратегії:

$$Thp_1(s_1, s_{-1}) - \frac{\lambda}{c}(\gamma_1 + A) >$$

$$> Thp_1(s_j, s_{-1}) - \frac{\lambda}{c}(\gamma_j + A),$$

$$\frac{(1 + \beta_1)c}{2(1 + A/\gamma_1)} - \frac{(1 + \beta_j)c}{2(1 + A/\gamma_j)} > \frac{\lambda}{c}\gamma_1,$$

$$\lambda < \frac{c^2}{\gamma_1} \left[\frac{(1 + \beta_1)c}{2(1 + A/\gamma_1)} - \frac{(1 + \beta_j)c}{2(1 + A/\gamma_j)} \right].$$

Оскільки вираз праворуч більше за нуль, то твердження доведене.

3.2. Рівновага за Нешем у грі з двома протоколами

З визначення функцій виграшу випливає, що $J_i(s_k, s_k) = J_j(s_k, s_k)$, тому в цьому випадку будемо опускати індекс і позначати виграш $J(s_k, s_k)$. Аналогічно $J_i(s_k, s_p) = J_j(s_p, s_k) = J(s_k, s_p)$, $j \in \{1, 2\} \setminus i$.

Матриця виграшів цієї гри наведена в таблиці.

Таблиця

Strategy	s_1	s_2
s_1	$J(s_1, s_1),$ $J(s_1, s_1)$	$J(s_1, s_2),$ $J(s_2, s_1)$
s_2	$J(s_2, s_1),$ $J(s_1, s_2)$	$J(s_2, s_2),$ $J(s_2, s_2)$

Використовуючи стандартні методи обчислення рівноваги за Нешем отримуємо:

$$J_1(s_1) = pJ(s_1, s_1) + (1 - p)J(s_1, s_2),$$

$$J_1(s_2) = pJ(s_2, s_1) + (1 - p)J(s_2, s_2),$$

де p – ймовірність використання другим гравцем першої стратегії. Система перебуває в точці рівноваги за Нешем, якщо ці дві величини рівні, що призводить до наступного рівняння:

$$pJ(s_1, s_1) + (1 - p)J(s_1, s_2) =$$

$$= pJ(s_2, s_1) + (1 - p)J(s_2, s_2).$$

Розв'язуючи яке ми отримуємо:

$$p = \frac{J(s_1, s_2) - J(s_2, s_2)}{J(s_1, s_2) - J(s_2, s_2) + (J(s_2, s_1) - J(s_1, s_1))}.$$

Враховуючи, що p – це ймовірність, потрібно накласти природні обмеження $0 \leq p \leq 1$, де крайні випадки $p = 1$ або $p = 0$ відповідають рівновазі у чистих стратегіях (з домінуючою стратегією s_1 та s_2 , відповідно), а $0 < p < 1$ відповідає рівновазі у змішаних стратегіях. Записуючи умови для останньої нерівності:

$$J(s_1, s_2) - J(s_2, s_2) = \frac{-\lambda(\gamma_1 + \gamma_2)}{c} +$$

$$+ \frac{c\alpha_1(1 + \beta_1)}{2(\gamma_2 + \gamma_1)} + \frac{2\lambda\gamma_2}{c} + \frac{1}{4}c(1 + \beta_2).$$

$$J(s_2, s_1) - J(s_1, s_1) = \frac{-\lambda(\gamma_2 + \gamma_1)}{c} +$$

$$+ \frac{c\alpha_2(1 + \beta_2)}{2(\gamma_1 + \gamma_2)} + \frac{2\lambda\gamma_1}{c} + \frac{1}{4}c(1 + \beta_1).$$

Підставляючи, отримуємо,

$$p = 1 - \frac{2\alpha_2(1 - \beta_1)}{\alpha_2(1 - \beta_1) - \alpha_1(1 - \beta_2)} -$$

$$- \frac{4\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) + c^2(\beta_1^2 - 1)}{c^2(1 - \beta_1)(\beta_1 - \beta_2)} +$$

$$+ \frac{4\lambda\alpha_2}{c^2(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}.$$

Розглядаючи випадок, коли гра має рівновагу у чистих стратегіях, потрібно записати дві рівності: $p = 1$ і $p = 0$, одна з яких має виконуватися.

Розв'язуючи дані рівняння ми знаходимо λ , які забезпечують домінуючу стратегію.

Твердження 3.2. Якщо параметр λ задовольняє нерівності

$$\frac{c^2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2(\alpha_1\bar{\beta}_2(1 + \beta_1) + \alpha_2\bar{\beta}_1(\beta_1 - 2\beta_2 - 1))}{4(\alpha_1^2\bar{\beta}_2^2 - \alpha_2^2\bar{\beta}_1^2)} < \lambda <$$

$$< \frac{c^2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2(\alpha_1\bar{\beta}_2(1 + 2\beta_1 - \beta_2) - \alpha_2\bar{\beta}_1(1 + \beta_2))}{4(\alpha_1^2\bar{\beta}_2^2 - \alpha_2^2\bar{\beta}_1^2)},$$

то в грі існує рівновага за Нешем у змішаних стратегіях. Якщо досягається рівність, то існує рівновага за Нешем у чистих стратегіях.

4. Чисельне моделювання

4.1. Моделювання динамічної системи

Чисельне моделювання виконано у середовищі Wolfram Mathematica. На рис. 3 показана збіжність розв'язку AIMD системи до стаціонарного стану для двох і трьох вимірів.

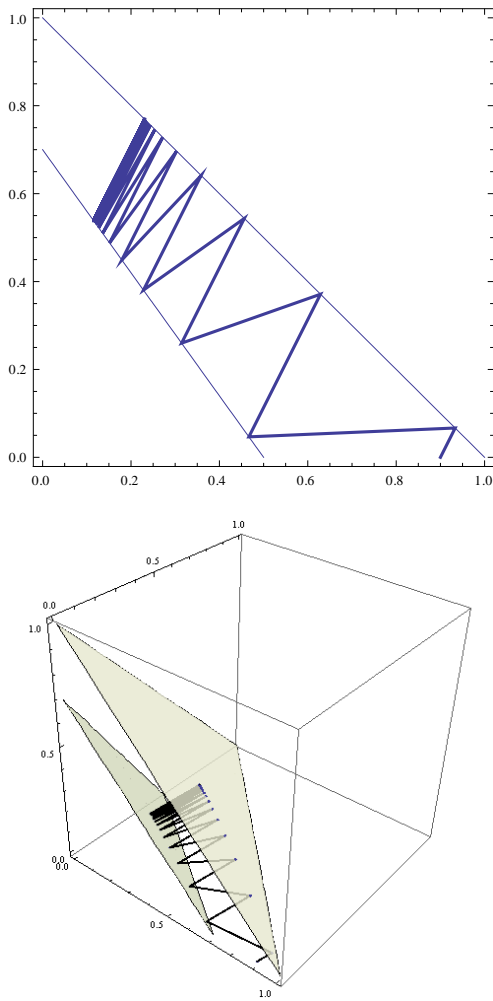


Рис. 3. Результати моделювання

4.2. Реплікаційна динаміка

Реплікаційна динаміка дозволяє дослідити динамічні властивості протікання гри та досягнення точки рівноваги. Множина користувачів представлена певною популяцією, що вибирає між стратегіями поведінки. Частка популяції, що вибрала певну стратегію відповідає змішаній стратегії у матричній грі. При цьому частка, що вибирає певну стратегію змінюється з часом відповідно до різниці між виграшами від використання даної стратегії і середнім за популяцією. Більш формально розглянемо N стратегій. Нехай x_i – часта загальної популяції, що використовує стратегію s_i . Отже, $\sum_i x_i(t) = 1$, $x_i(t) \geq 0$.

Реплікаційне рівняння визначається як:

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)K \left(\sum_{j \neq i} J(i, j)x_j - \sum_j x_j(t) \sum_{k \neq j} J(j, k)x_k \right)$$

Дослідимо випадок $N = 3$, який генерує досить нетривіальну динаміку і водночас може бути добре ілюстрований. Рівняння динаміки мають наступний вигляд:

$$J(s_1, X(t - \tau)) = x_1(t - \tau)J(s_1, s_1) + x_2(t - \tau)J(s_1, s_2) + x_3(t - \tau)J(s_1, s_3),$$

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)K(J(i, X(t - \tau)) - x_1(t - \tau)J(s_1, X(t - \tau)) - x_2(t - \tau) \times J(s_1, X(t - \tau) + x_2(t - \tau)J(s_1, X(t - \tau))).$$

На рис. 4–8 далі показані графіки відносних часток популяції, що використовують відповідну стратегію для гри, що визначається табличними параметрами:

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	λ	K	c	τ
1.5	1.25	1	0.75	0.5	0.25	168	0.2	50	0.25

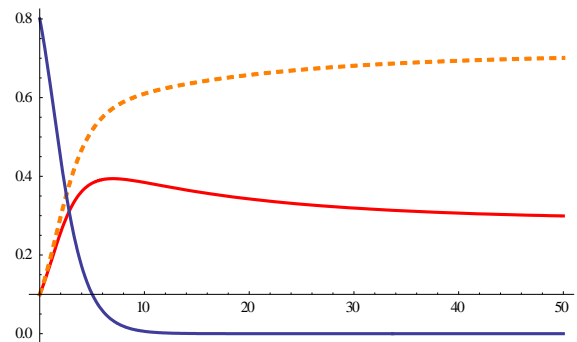


Рис. 4. $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	λ	K	c	τ
1.5	1.25	1	0.75	0.5	0.25	140	0.2	50	0.25

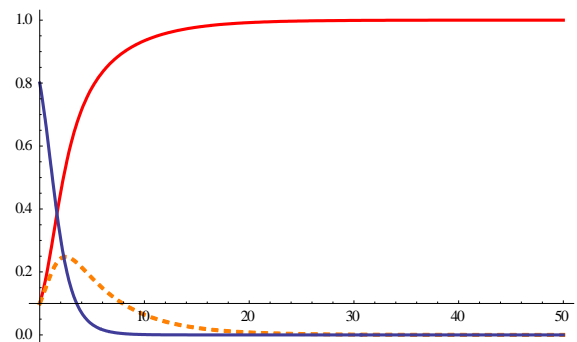


Рис. 5. $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	λ	K	c	τ
1.5	1.25	1	0.75	0.5	0.25	168	0.2	50	15

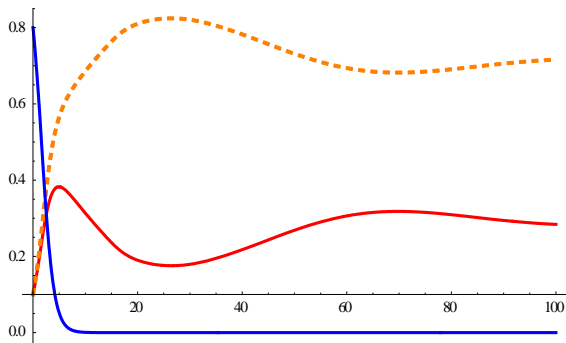


Рис. 6. $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$

Розширимо динаміку на більш загальний випадок:

$$J(s_1, X(t-\tau)) = \sum_p \sum_q x_p(t-\tau)x_q(t-\tau)J(A, p, q)$$

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	λ	K	c	τ
1.3	1.5	1.1	0.25	0.4	0.85	140	0.25	50	5

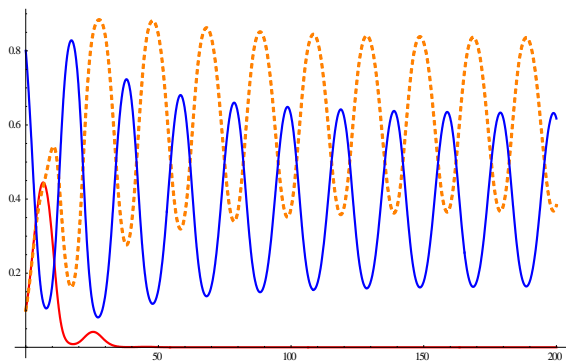


Рис. 7. $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	λ	K	c	τ
1.5	1.25	1	0.75	0.5	0.25	140	0.25	50	5

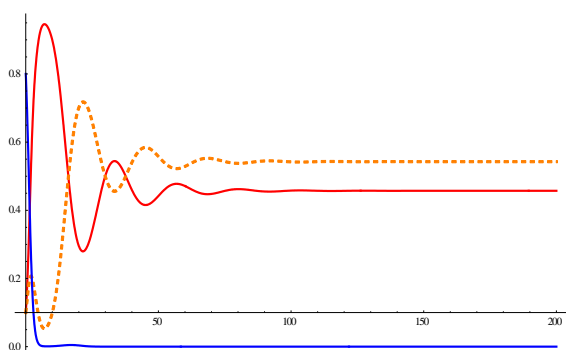


Рис. 8. $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$

Висновки

В роботі розглядається підхід до моделювання конфліктних процесів у мережі на основі еволюційно-ігрового підходу. Запропонована динамічна ігрова модель з використанням рівнянь з розривною правою частиною та доведено існування та єдність розв'язку. Для гри AIMD з'єднань побудована платіжна матриця та знайдені умови існування рівноваги за Нешем в залежності від параметру чутливості до помилок. Результати підтверджено за допомогою чисельного моделювання.

1. *Chiu, Dah-Ming, and Raj Jain.* Analysis of the increase and decrease algorithms for congestion avoidance in computer networks. *Computer Networks and ISDN systems* 17.1 (1989): 1–14.
2. *Kelly, Frank P., Aman K. Maulloo, and David KH Tan.* "Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability" // *Journal of the Operational Research society.* 1998. – P. 237–252.
3. *Mo J., Walrand J.* Fair end-to-end window-based congestion control // *IEEE/ACM Transactions on Networking.* – 2000. – 8. – P. 556–567.
4. *Paganini F., Doyle J.C., Low S.H.* Scalable laws for stable network congestion control // *Proc. of IEEE Conference on Decision and Control.* – 2001. – 1. – P. 185–190.
5. *Low S.H., Srikant R.* A Mathematical Framework for Designing a Low-Loss, Low-Delay Internet // *Network and Spatial Economics.* – 2004. – 4 (1). – P. 75–102.
6. *Altman E. et al.* The evolution of transport protocols: An evolutionary game perspective // *Computer Networks.* – 2009. – Т. 53. – N 10. – С. 1751–1759.
7. *Smith, John Maynard.* *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge university press, 1982.
8. *Altman E., Bonneau N., Debbah M., Caire G.* An evolutionary game perspective to ALOHA with power control, in // *Proceedings of the 19th International Teletraffic Congress, Beijing, 29 August–2 September, 2005.*

9. *Han, Zhu, et al.* Game theory in wireless and communication networks. Cambridge University Press, 2012.
10. *Meyn, Sean P.* Control techniques for complex networks. Cambridge University Press, 2008.
11. *Filippov, Aleksei Fedorovich, and Felix Medland Arscott, eds.* Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems. Vol. 18. Springer, 1988.
12. *Border, Kim C.* Fixed point theorems with applications to economics and game theory // Cambridge university press. – 1989.

Одержано 18.11.2013

Про авторів:

Ігнатенко Олексій Петрович,
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,

Синецький Олександр Борисович,
аспірант.

Місце роботи авторів:

Інститут програмних систем
НАН України,
03187, Київ-187,
проспект Академіка Глушкова, 40.
Тел.: 526 6025.
E-mail: o.ignatenko@gmail.com