УДК 519.8

УДК 519.8

А.Г. ДОНЕЦ, С.П. ЗАГОРОДНЮК

ПОСТРОЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ МОЗАИКИ С ПОМОЩЬЮ ОДНОГО ШАБЛОНА

Рассматриваются задача построения дискретных образов на прямоугольном поле с помощью шаблонов. Вводится понятие самодостаточности шаблона, когда с его помощью можно построить единичный образ. Доказывается ряд утверждений о необходимых и достаточных условиях для шаблонов, обладающих таким свойством.

Введение. Здесь все понятия и определения взяты из [1]. Если система (4) не имеет специфической структуры, решать ее в общем случае, когда используется много шаблонов (а переменных тогда во много раз больше), практически невозможно. Необходимо придумать способ, чтобы отсеять зависимые переменные. Один из возможных способов такой. Представим, что изображение, которое необходимо построить, есть вектор b, такой, что $b_\alpha = 1$ $(1 \le \alpha \le n)$, а остальные $b_i = 0$ $(i \ne \alpha)$. Если существует решение системы уравнений (3), то назовем такое решение единицей и обозначим его $I(\alpha)$. Чтобы число переменных уравнялось в нашей системе уравнений (4) с числом уравнений, положим $x_{13} = x_{14} = 0$.

Решая систему уравнений для правой части $b_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, $b_j \equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ $(j > 1)$, получаем решение $x_1 = x_3 = x_7 = x_9 = x_{12} = 1$, а все остальные x_i равны нулю. Это означает, что если вместо переменных подставить координаты соответствующих шаблонов (см. рис. 5, [1]) , то их наложение на поле даст в первой клетке черный цвет, а в остальных клетках – цвет 0 (отсутствие цвета). Это будет уравнение

$$I(1) \equiv \left[s_1(1) + s_1(4) + s_2(4) + s_3(1) + s_4(1)\right](\mathrm{mod}\,2). \qquad (1)$$

Для проверки сложим множества соответствующих кортежей, при этом одноименные элементы складываются по mod 2:

$$(1,2,5,7,8)+(4,5,8,10,11)+(4,5,7,10,11)+(1,3,4,5,6)+(1,2,3,4,6)(\bmod 2).$$

Может получиться, что для других клеток поля не существует решения в виде (1), что возможно при ограничении поля или по другим причинам.

Рассмотрим еще два решения для правых частей: 1) $b_3 \equiv 1(\bmod 2)$, остальные b_i = 0; 2) $b_4 \equiv 1(\bmod 2)$, остальные b_i = 0. В первом случае получаем решение $x_4 = x_6 = x_8 = x_9 = x_{12} = 1$, остальные x_i равны нулю; во втором случае получаем решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_7 = x_8 = x_9 = 1$, остальные x_i равны нулю.

Таким образом можно получить решение для любой единицы в правой части, тогда решение для произвольных правых частей будет состоять из суммы решений для отдельных единиц. Например, если взять правые части равные $b_1 = b_3 = b_4 \equiv 1(\bmod 2)$, остальные b_i= 0, то решением будет сумма полученных ранее решений по mod 2, а именно: $x_2 = x_6 = x_9$ = 1, остальные равны нулю.

Это можно проверить, если сложить кортежи соответствующих шаблонов (2,3,6,8,9) + (2,3,5,8,9) + (1,3,4,5,6) = (1,3,4).

Определение 1. Будем говорить, что подмножество шаблонов $S_0 \subset S$ образует базис решения системы уравнений, если с его помощью можно построить любую единицу $I(\alpha)$ $\left(1 \le \alpha \le N\right)$.

Самый элементарный базис – это шаблон, состоящий из одной клетки.

Определение 2. Будем говорить, что шаблон s обладает свойством гомоморфности, если с помощью наложения его на самого себя в разных положениях можно получить связный фрагмент, меньший по количеству клеток.

Например, если сложить шаблоны, соответствующие переменным x_1 и x_5 на том же поле, то получим в результате образ, состоящий из двух клеток 4 и 5. Это можно записать в виде уравнения

$$s_1(1) + s_2(1) = (1, 2, 5, 7,8) + (1, 2, 4, 7,8) = (4, 5)(\bmod 2).$$

Определение 3. Назовем шаблон s гомоморфным единице $I(\alpha)$, если существует решение уравнения

$$I(\alpha) = \sum_i s(i) \ (\bmod 2), \qquad (2)$$

где i – некоторое значение метки допустимых положений шаблона и всех его преобразований.

Как видим, шаблон (см. рис. 3, [1]) гомоморфен единице.

Шаблон S называется самодостаточным для базиса, если он гомоморфен любой единице поля.

Лемма 1. Если число клеток шаблона четно, то он не гомоморфен ни одной единице.

Это вытекает из того, что наложение любого количества таких шаблонов и их допустимых преобразований дает в пересечении четное число. Другими словами, в правой части будет число клеток цвета 1, равное $0(\bmod 2)$, а в левой – не должна появиться единица.

Теорема 1. Линейный шаблон $s=2l+1$ $(l\geq 1)$ не гомоморфен ни одной единице.

Доказательство. Построим для шаблона s систему уравнений на поле размерностью $N=m\times n$. Число горизонтальных шаблонов, расположенных в каждой строке, равно $n-s+1$, а всех – $m(n-s+1)$. Обозначим соответствующие переменные x_k, где $k=j+(i-1)(n-s+1)$ $\left(1\leq i\leq m; 1\leq j\leq n-s+1\right)$. Число всех вертикальных шаблонов будет равно $n(m-s+1)$. Обозначим соответствующие переменные y_v, где $v=j+n(i-1)$ $\left(1\leq i\leq m-s+1; 1\leq j\leq n\right)$. Рассмотрим матрицу $A(m_1,m_2)$ специального вида, обладающую следующими свойствами:

а) число ее столбцов равно m_2;

б) в i-м столбце $\left(1\leq j\leq m_2\right)$ первые i – 1 элементов равны 0, затем следует m_1 единиц, а дальше до конца опять нули.

Пусть $m_1=5$, $m_2=4$. Тогда матрица A (5, 4) имеет вид

$$A(5,4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Число строк в такой матрице равно m_1+m_2-1, поэтому в ней всегда m_1-1 строк зависимы. Если $m_2<m_1$, то строки от m_2 до m_1 состоят из одних единиц.

Лемма 2. Путем сложения нескольких строк всегда можно добиться, чтобы первые m_1 строк состояли из одних единиц.

Это легко достигнуть, если заметить, что начиная с (m_1+1)-й строки слева появляются нули. Поэтому, если к i-й строке $(1\leq i\leq m_1)$, в которой справа есть нули, добавить все строки с номером $i(\bmod m_1)$, то получим необходимое заполнение единицами.

В нашем примере строки 4 и 5 (от m_2 до m_1) уже состоят из единиц. Если к первой строке добавить строку $6 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$, то получим все единицы и так до 3-й строки.

Если рассматривать систему уравнений $A(m_2, m_1)\bar{X} = \vec{C}$, где $\bar{X}$ и $\vec{C}$ векторы размерности $(m_2 + m_1 - 1)$, то после образования единиц в первых m_1 строках, получаем разбиение правых частей на m_1 классов:

$$\left[\sum_{i=1(\mathrm{mod}\, m_1)} C_i \equiv \sum_{i=2(\mathrm{mod}\, m_1)} C_i \equiv \ldots \equiv \sum_{i=0(\mathrm{mod}\, m_1)} C_i\right] (\mathrm{mod}\, 2). \tag{4}$$

Введем понятие индексной функции от двух аргументов.
$\varphi(n_1, n_2) = (n_1 - 1)(n_2 - s + 1)$, где S – длина шаблона.

Обозначим $\lambda_i = \left(x_{\beta+1}, x_{\beta+2}, \ldots, x_{\beta+n-s+1}\right)$, $(1 \le i \le m)$;

$\sigma_i = \left(y_{\gamma+1}, y_{\gamma+2}, \ldots, y_{\gamma+n-s+1}\right)$, $(1 \le j \le n)$, где $\beta = \varphi(i, m)$, $y = \varphi(j, n)$.

Запишем уравнение (4) для первой строки поля. В наших обозначениях это

$$A(s,n)\lambda_1^T + E_n\sigma_1^T \equiv \tilde{b};\quad \tilde{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n). \tag{5}$$

Введем для удобства символические векторы-столбцы:

$$\Lambda = \left[A(s,n)\lambda_1^T, A(s,n)\lambda_2^T, \ldots, A(s,n)\lambda_m^T\right]^T;$$

$$\Sigma = \left[E_n\sigma_1^T, E_n\sigma_2^T, \ldots, E_n\sigma_n^T\right]^T.$$

Тогда система (4) запишется в клеточном виде:

$$E_m\Lambda + A\left(s, m-s+1\right)\Sigma = B.$$

Воспользуемся леммой 2 о свойствах матриц $A\left(m_1, m_2\right)$ для получения одинаковых элементов σ_i^T в первой и второй клеточных строках. Для этого в первой клеточной строке сложим все клеточные строки матрицы $A(s, m-s+1)$ с номером $1\,(\mathrm{mod}\, s)$, а во второй все строки с номером $2\,(\mathrm{mod}\, s)$. Здесь сложение подразумевается как сложение соответствующих матриц. После этого в первых двух клеточных строках получаем во всех обычных строках $s \times \sum_{i=1}^{n(m+s-1)} y_i = R$.

При всех этих преобразованиях в векторе Λ будут складываться переменные x_i, но матрицы $A(s,n)$ в первых двух клеточных строках не изменяются. В общем виде получаем

$$A\left(s,n\right)Z_1^T + R \cdot E_n = \bar{C}_1;$$

$$A\left(s,n\right)Z_2^T + R \cdot E_n = \bar{C}_2. \tag{6}$$

Здесь Z_1, Z_2 – векторы, полученные сложением переменных x_i во время предыдущих операций. Аналогично $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ получены от сложения элементов правых частей, при этом ни один элемент не принадлежит обоим этим векторам. Если применить равенство (4), то получим разбиение элементов вектора на s равных по сумме частей. Если бы линейный шаблон был гомоморфен единице, то какое-нибудь $b_r = 1$, а все остальные равны нулю. Но тогда равенство (4) никогда бы не выполнялось. Это противоречие и подтверждает справедливость теоремы.

Можно также показать, что такие шаблоны не гомоморфны ни одной связной фигуре. Для того, чтобы шаблон обладал указанным свойством, необходимо иметь определенную структуру, которая в некотором смысле идентична выпуклости. Такую структуру имеет первый шаблон (см. рис. 1 или рис. 3, [1]), и не имеют два остальных шаблона. Относительно возможностей второго шаблона утверждает лемма 1. Легко доказывается следующая

Теорема 2. Шаблон s (см. рис. 3) самодостаточный для базиса в любом поле размерностью, не меньшей $N = 4 \times 3$.

Справедлива еще одна теорема о самодостаточности шаблона.

Теорема 3. Шаблон, уравнение которого $S_1 = (\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2,\ \alpha+3,\ \alpha+n)$, является самодостаточным для базиса в любом поле размерности, не меньшей, чем $N = 5 \times 4$.

Убедимся в гомоморфности этого шаблона, складывая s_3 (5) и s_4 (6):

$$(5, 6, 10, 14, 18) + (6, 7, 10, 14, 18) = (5, 7).$$

Складывая те же шаблоны с координатами 6 и 7, т. е. s_3 (6) и s_4 (7), получим в результате (6, 8). В сумме это дает окрашенную вторую строку поля, т. е. (5, 6, 7, 8). Прибавляя теперь к этим четырем клеткам s_2 (1), s_5 (4), s_1 (5) и s_6 (5), получаем четыре единицы I(1), I(4), I(9) и I(12).

$$I(12) \equiv \left[s_3(5) + s_4(6) + s_3(6) + s_4(7) + s_6(5)\right] (\mathrm{mod}\, 2).$$

Складывая единицы в клетках 1, 5, 9 и 13 с шаблоном s_4 (1), получим единицу в клетке 2. Аналогично, складывая те же единицы с шаблоном s_8 (1), получим единицу в клетке 14. Складывая единицы в клетках 1, 2, 4 и 5 с шаблоном s_1 (1), получим единицу в клетке 3. Теперь введем новые координаты шаблонов для системы уравнений $\alpha' = 21 - \alpha$. Так как число клеток поля равно 20, то это равносильно, что поле повернули в плоскости на 180°. Это приведет к построению всех единиц поля, кроме 10 и 11. Но, имея уравнения единиц в остальных клетках, легко построить единицы и в этих клетках. Тем самым доказывается справедливость теоремы, которая была впервые доказана в [2].

А.Г. Донец, С.П. Загороднюк

ПОБУДОВА ДВОМІРНОЇ МОЗАЇКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ОДНОГО ШАБЛОНУ

Розглядається задача побудови дискретних образів на прямокутному полі за допомогою шаблонів. Вводиться поняття самодостатності шаблона, коли за його допомогою можна побудувати одиничний образ. Доводиться низка тверджень про необхідні та достатні умови для шаблонів, що мають такі властивості.

A.G. Donets, S.P. Zagordniuk

CONSTRUCTING A TWO-DIMENSIONAL MOSAIC BY MEANS OF ONE PATTERN

We consider the problem of constructing discrete images on a rectangular field by means of patterns. A notion of pattern self-sufficiency is introduced, which means that one can construct there identity image by means of the pattern. We prove several statements about necessary and sufficient conditions for patterns possessing this property.

1. *Донец А.Г., Шулинок И.Э.* Построение логистической инфраструктуры в виде двумерной мозаики // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2014. – С. 76 –83.
2. *Донец Г.А., Самер И.М. Альшаламе*. Решение задачи о построении линейной мозаики // Там само. – 2005. – № 4. – С. 15 – 24.

Получено 25.04.2016