УДК 519.85

В.И. НОРКИН, И.Г. МАГДЕНКО, Б.В. НОРКИН

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРАХОВОГО БИЗНЕСА МЕТОДОМ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Построена модель эволюции капитала страховой компании в виде марковской цепи с большим количеством (десятки тысяч) состояний. Для построения матрицы переходных вероятностей используется квартальная или годовая статистика прихода премий и выплат компании. Эта статистика учитывает корреляцию премий и выплат. Метод марковских цепей позволяет эффективно вычислять не только вероятность разорения страховой компании как функцию времени, но и наглядно прослеживать эволюцию распределения капитала с течением времени.

Введение. Проблема оценки рисков в страховании, в частности оценки риска разорения компании, является одной из центральных в актуарной математике, ей посвящены большое количество как классических, так и новейших исследований. Но эти работы в своем абсолютном большинстве имеют чисто теоретический характер, либо нацелены на получение аналитических результатов и недостаточны для получения количественных выводов.

Существует несколько подходов к математическому моделированию деятельности страховой компании. Основной особенностью страховой деятельности является то, что здесь бизнес основан на случайности, поэтому соответствующие модели – стохастические. Страховая деятельность нацелена на защиту клиента от риска больших случайных потерь за счет малых, но детерминированных потерь, которые называются страховыми премиями или страховыми взносами. Способность страховой компании вести такой бизнес, по сути, основана на законе больших чисел: собирая большое количество независимых страховых договоров, компания обеспечивает почти предполагаемую динамику ее капитала. Современная теория страхования построена на теории случайных процессов. Вопросы математического моделирования страховой деятельности обсуждаются в работах [1 – 8].

Эволюция капитала страховой компании может моделироваться методами теории случайных процессов (процессов риска).

Первая классическая модель такого рода – это модель коллективного риска Ф. Лундберга (1903). Данная модель впоследствии изучалась и развивалась в трудах Г. Крамера, В. Феллера, С. Андерсена, К. Борха, Х.У. Гербера и других ученых [4]. Важной компонентой этих исследований было изучение вероятности разорения страховой компании как функции от ее первоначального капитала и других параметров. Это нетривиальная проблема, поскольку нужно найти вероятность попадания графика случайного процесса в отрицательную область на бесконечном интервале времени. Основным методом исследования вероятности разорения в этих работах был метод интегральных уравнений. В частности получили развитие разнообразные точные и приближенные аналитические методы, численные методы, практические приближенные оценки вероятности разорения [4, 5, 8]. Они построены на том, что для классического процесса риска вероятность разорения удовлетворяет интегральному уравнению типа Вольтерра. Для более общих моделей страховой деятельности вероятность разорения как функция начального капитала также удовлетворяет некоторым более сложным интегральным уравнениям. Современное состояние исследований методов оценки и вычисления вероятности разорения приведено в монографии [8].

Указанные методы имеют существенные недостатки при решения практических задач:

аналитические методы применены только для сравнительно простых стохастических процессов риска с заданными простыми распределениями требований;

метод последовательных приближений может медленно сходиться в силу сложности итераций и проблем с критерием остановки;

метод Монте-Карло имеет низкую относительную точность при малых вероятностях разорения;

аналитические аппроксимации также имеют низкую точность при малых вероятностях разорения.

Таким образом, до настоящего времени стоит проблема эффективного вычисления вероятности банкротства страховой компании для достаточно общих процессов эволюции капитала. Несмотря на достаточное большое количество методов решения поставленной задачи, как аналитических, так и численных, в работе развивается новый подход к численной оценке вероятности разорения с помощью цепей Маркова, поскольку большинство методов имеют специфические требования для их применения. Метод цепей Маркова имеет еще то преимущество, что позволяет получать распределение конечного капитала в произвольный момент времени.

Классический процесс риска в непрерывном и дискретном времени. Формально, классический процесс риска, который описывает эволюцию капитала страховой компании в непрерывном времени, задается соотношением [1 – 8]:

$$\xi_t = u + ct - S_t, \; t \ge 0, \qquad (1)$$

где t – время; u – начальный капитал страховой компании; c – интенсивность прихода премий; S_t – агрегированные страховые выплаты до момента t;

$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$; Z_k – независимые одинаково распределенные случайные страховые требования с функцией распределения $F(z)$ и средним значением μ; N_t – число выплат до момента t (пуассоновский процесс с интенсивностью α). Теория таких процессов детально изучена [1]. Основной объект исследования – это функция вероятности неразорения:

$$\varphi(u) = \Pr\{\xi_t \geq 0 \;\; \forall t \geq 0, \; \xi_0 = u\}.$$

Как известно, вероятность разорения $\varphi(u)$ как функция начального капитала u при условии $\alpha\mu/c < 1$ удовлетворяет интегральному уравнению восстановления [1]:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi(u-z)\left[1 - F(z)\right]dz.$$

Рассмотрим дискретный аналог классического процесса риска (1) в дискретном времени $t = 0,1,\ldots$ и с дискретным распределением премий и требований.

Теорема 1. Пусть в единицу времени в компанию могут приходить пары случайных премий и требований $\{(c_0, z_0), (c_1, z_1), \ldots, (c_m, z_m)\}$ с соответствующими вероятностями $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$, $\sum_{i=0}^{m} p_m = 1$, и, кроме того, компания выплачивает постоянные дивиденды (и другие платежи) d. Тогда вероятность неразорения компании $\varphi(u)$ за бесконечное время удовлетворяет уравнению

$$\varphi(u) = \sum_{j:u+c_j-z_j-d\geq 0} p_j \varphi(u + c_j - z_j - d). \qquad (2)$$

Теорема 2. Предположим, что в единицу времени в компанию приходит детерминированная премия c, а с вероятностью q приходит страховое требование с фиксированным дискретным распределением выплат $z \in \{z_0 \geq 0, z_1 \geq 0, \ldots, z_m \geq 0\}$ с соответствующими вероятностями $\{p_0 > 0, p_1 > > 0, \ldots, p_m > 0\}$, $\sum_{i=0}^{m} p_m = 1$. Тогда вероятность неразорения $\varphi(u)$ компании за бесконечное время как функция начального капитала u удовлетворяет уравнению

$$\varphi(u) = (1-q)\varphi(u+c) + q\sum_{j:u+c-z_j\geq 0} p_j \varphi(u + c - z_j). \qquad (3)$$

Квартальные и годовые статистические данные по премиям и выплатам $\{(c_0, z_0), (c_1, z_1), \ldots, (c_m, z_m)\}$ можно получить из страховой статистики [9, 10], а соответствующие вероятности можно взять равными $p_k = 1/(m+1)$. Эти же данные позволяют получить статистику по уровням выплат $\{z_0/c_0, z_1/c_1, \ldots, z_m/c_m\}$ и статистику выплат при фиксированной премии c, а именно, $\{z_0 = cz_0/c_0, z_1 = cz_1/c_1, \ldots, z_m = cz_m/c_m\}$ [11 – 13].

Очевидно, уравнения (2), (3) имеют тождественно нулевое решение, $\varphi(u) \equiv 0$. Следующая теорема дает условия, при которых существуют ненулевые решения этих уравнений.

Теорема 3. При условии $\sum_{j=0}^{m} p_j(c_j - z_j) > d$ уравнение (2), а при условии $c > q\sum_{j=0}^{m} p_j z_j$ уравнение (3) имеет единственное решение $\varphi(u)$ такое, что $0 \le \varphi(u) \le 1$ и $\lim_{u\to+\infty} \varphi(u) = 1$.

Уравнения (2), (3) могут быть численно решены, например, методом последовательных приближений [11, 14]. Например, для уравнения (3) метод имеет вид

$$\varphi^{k+1}(u) = (1-q)\varphi^k(u+c) + q \sum_{j:u+c-z_j\ge 0} p_j \varphi^k(u+c-z_j),$$
$$\varphi^0(u) \equiv 1, \quad k = 0,1,\ldots \ .$$

Таким образом, задача нахождения вероятности банкротства за бесконечное время для дискретного процесса риска может быть численно решена известным методом последовательных приближений. Вероятность неразорения – это показатель стабильности компании. Однако для компании важны также показатели прибыльности, которые базируются на знании распределения капитала в конце планового горизонта. Такое распределение может быть получено методом статистических испытаний (Монте-Карло) [11, 12]. Альтернативную возможность предоставляет метод цепей Маркова.

Моделирование процессов риска с помощью цепей Маркова. Надежность страховых компаний, как и других финансовых организаций и обязательств, может описываться значениями рейтингов, вырабатываемых специальными рейтинговыми агентствами (Moody's, Standard & Poor's, Fitch и др.). Рейтинг обычно может принимать несколько упорядоченных значений, например, Aaa, Aa1, Aa2, Aa3, A1, A2, A3, Baa1, Baa2, Baa3, Ba1, Ba2, Ba3, B1, B2, B3, Caa1, Caa2, Caa3, Ca, C (Moody's). Изменение рейтинга за некоторый период времени, например, год, описывается цепью Маркова с некоторой матрицей переходных вероятностей. Такое описание позволяет прогнозировать долгосрочную надежность компании. Например, определим следующие финансовые состояния страховой компании: (E)xcelent, (G)ood, (S)atisfactory, (B)ad, (D)efolt. Пусть вероятности перехода компании из одного состояния в другое за определенный период времени (год) задаются следующей матрицей P:

	E	G	S	B	D
E	0.9	0.1	0	0	0
G	0.1	0.8	0.1	0	0
S	0	0.2	0.7	0.1	0
B	0	0	0.1	0.7	0.2
D	0	0	0	0	1

Пусть начальное состояние компании является (S)atisfactory, $\left(X^0\right)' = (0,0,1,0,0),$, где символ « $'$ » обозначает транспонирование. Тогда состояние компании через 5 лет задается распределением вероятностей $\left(X^5\right)' = \left(P'\right)^5 (0,0,1,0,0)' = (0.1063, 0.3654, 0.2855, 0.1356, 0.1072)$ с вероятностью дефолта 0.1072. Поскольку цепь содержит поглощающее состояние, то с течением времени распределение постепенно сходится к состоянию дефолта, например,

$$\left(X^{100}\right)' = \left(P'\right)^{100} (0,0,1,0,0)' = (0.1207, 0.1083, 0.0424, 0.0146, 0.7139).$$

Однако марковские цепи могут использоваться и для более детального и точного прогнозирования состояния страховой компании. Например, рассмотрим процесс риска в дискретном времени $t = 0,1,\ldots$ и с дискретным целочисленным распределением премий и требований, описанный в теореме 2, т. е. предположим, что в единицу времени в компанию приходит детерминированная целочисленная премия c, а с вероятностью q приходит целочисленное страховое требование с фиксированным дискретным распределением выплат $z \in \left\{z_0 \ge 0, z_1 \ge 0, \ldots, z_m \ge 0\right\}$ с соответствующими вероятностями $\left\{p_0 > 0, p_1 > 0, \ldots, p_m > 0\right\}$, $\sum_{i=0}^{m} p_m = 1$.

При этом премии и требования выражаются в целых числах (гривнах, тысячах или миллионах гривен). Состояния цепи могут принимать целочисленные значения от нуля до некоторого положительного n, а также значение (-1). Для моделирования процесса риска с помощью модели цепей Маркова необходимо построить матрицу перехода цепи $P = \left\{\pi_{ij}\right\}$, $\sum_{j=-1}^{n} \pi_{ij} = 1$. Эта матрица имеет размерность $(n+2)\times(n+2)$, где n – максимальный капитал компании (например, измеряемый в гривнах, тысячах или миллионах гривен). Два дополнительных состояния 0 и (-1) соответствуют нулевому значению капитала и состоянию банкротства, которое аккумулирует все отрицательные значения капитала. Состояние банкротства может быть более детально описано путем введения нескольких состояний разной степени неплатежеспособности. Предполагается, что если капитал превосходит максимальное значение n, то весь избыток выплачивается акционерам в виде дивидендов. Тогда ненулевые коэффициенты матрицы переходов P строятся согласно следующим правилам:

а) $\pi_{(-1)(-1)} = 1$;

б) с вероятностью $(1-q)$ (не пришло страховое требование) происходит переход цепи из состояния i в состояние $\min\{i+c, n\}$, т. е. $\pi_{i\min\{i+c,n\}} = 1-q$ для любого $i = 0,1,\ldots,n$;

в) с вероятностью $q \cdot p_k$ (пришло страховое требование) происходит переход цепи из состояния i в состояния $\left(\min\{i+c,n\}-z_k\right)$, т. е. $\pi_{i\left(\min\{i+c,n\}-z_k\right)} = q \cdot p_k$, для всех $i = 0,1,...,n$ и k таких, что $\left(\min\{i+c,n\}-z_k\right) \geq 0$;

г) с вероятностью $q \sum\limits_{k:\min\{i+c,n\}-z_k<0} p_k$ (пришло разорение) происходит переход из состояния i в состояние (-1), т. е. $\pi_{i(-1)} = q \sum\limits_{k:\min\{i+c,n\}-z_k<0} p_k$ для всех $i = 0,1,...,n$.

Для процесса риска из теоремы 1 матрица P состоит из следующих ненулевых элементов:

$$\pi_{(-1)(-1)} = 1;$$
$$\pi_{i(\min\{i+c_k,n\}-z_k-d)} = p_k, \quad \forall i = 0,1,...,n, \ \forall k: \min\{i+c_k,n\}-z_k-d \geq 0;$$
$$\pi_{i(-1)} = \sum\nolimits_{k:\min\{i+c_k,n\}-z_k-d<0} p_k, \quad i = 0,1,...,n.$$

Если начальное состояние цепи (начальный капитал компании) равно i, т. е. начальное распределение задается $(n+2)$-мерным вектором $(X^0)' = (0,...,0,i,0,...,0)$, то последующие распределения X^t состояния цепи задаются уравнением: $X^t = P'X^{t-1} = \left(P'\right)^t X^0$. Построенные и сохраненные векторы $\left\{X^t\right\}$ позволяют проследить эволюцию распределения капитала с течением времени $t = 0,1,...$, а компонента $X^t_{(-1)}$ задает вероятность разорения как функцию времени.

Программная реализация и тестирование. Моделирование изменения распределения капитала состоит из следующих этапов:

загрузка/ввод статистических даних и задание/изменение параметров;

формирование матрицы переходов;

формирование матрицы распределений капитала;

вывод результатов моделирования в виде графиков.

Данный алгоритм был реализован на языке C# на платформе .Net Framework 4.5 в среде разработки Microsoft Visual Studio 2013 [15]. Интерфейс программы показан на рис. 1. Интерфейс содержит ряд вкладок и полей для ввода параметров модели, отображения статистических данных по премиям и выплатам, а также две вкладки для графического отображения вероятности разорения как функции времени и для отображения плотности распределения капитала в тот или иной момент времени. Этот момент времени регулируется движком внизу графика, что позволяет наглядно проследить динамику распределения капитала.

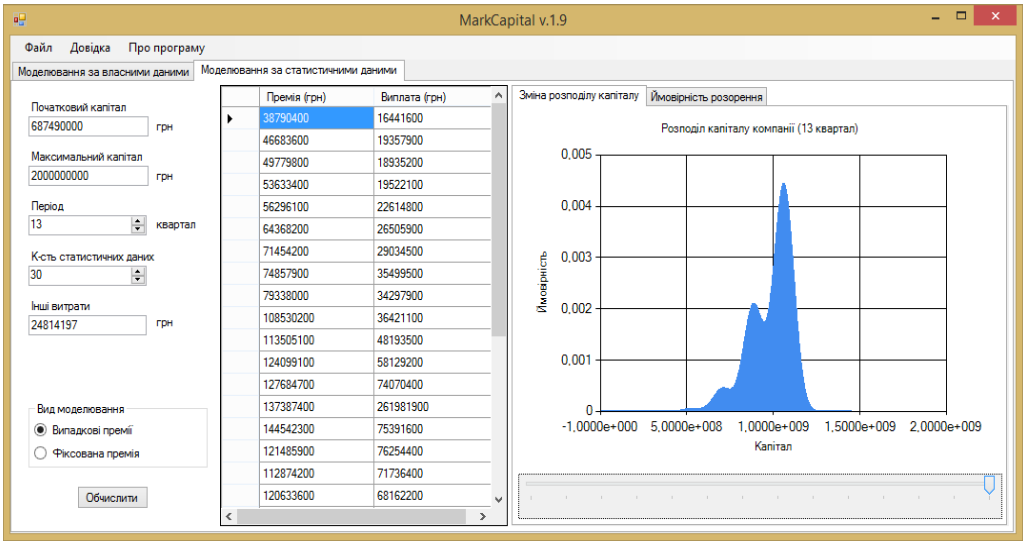

РИС. 1. Интерфейс программы

Разработанная программа опробовалась на статистических данных страховой компании «Інго Україна». Для тестирования программы из базы данных [10] были взяты квартальные данные по премиям и выплатам компании с 2005 года до третьего квартала 2012 года, т. е. выборку из 30 единиц равновероятных данных, и промоделировано изменение распределение капитала на протяжении следующих 13 кварталов, т. е. до третьего квартала 2015 года. В варианте модели с фиксированной премией ее значение выбиралось равным среднему значению премий из статистических данных. Результаты моделирования показаны на рис. 2, 3.

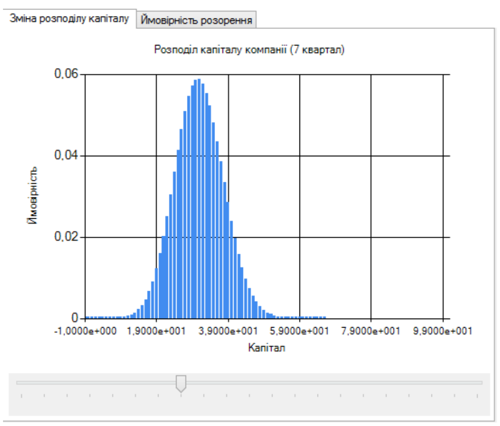

РИС. 2. Плотность распределения капитала

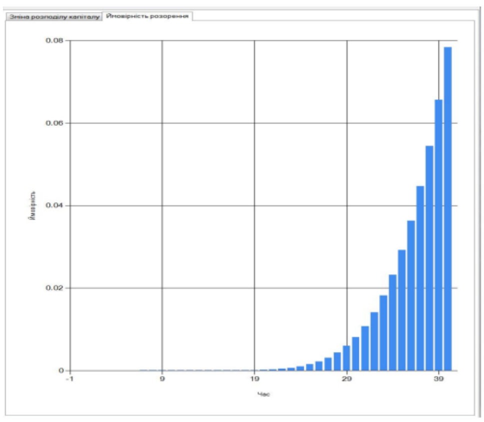

РИС. 3. Зависимость вероятности разорения от времени

Выводы. В работе построена модель эволюции капитала страховой компании в виде марковской цепи с большим количеством (десятки тысяч) состояний. Для построения матрицы переходных вероятностей используется квартальная или годовая историческая статистика прихода премий и выплат компании. Эта статистика учитывает корреляцию премий и выплат. Метод марковских цепей позволяет эффективно вычислять не только вероятность разорения страховой компании как функцию времени, но и наглядно прослеживать эволюцию распределения капитала с течением времени. Метод также позволяет детально моделировать событие неплатежеспособности страховой компании путем введения градаций неплатежеспособности и соответствующих вероятностей попадания и выхода из этих состояний. Простая и эффективная вычислительная схема метода позволяет оперативно прогнозировать результаты работы компании при изменении разнообразных параметров управления компанией.

В.І. Норкін, І.Г. Магденко, Б.В. Норкін

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТРАХОВОГО БІЗНЕСУ
МЕТОДОМ МАРКОВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ

Побудована модель еволюції капіталу страхової компанії у вигляді марковського ланцюга з великою кількістю (десятки тисяч) станів. Для побудови матриці перехідних ймовірностей використовується квартальна або річна статистика надходження премій і виплат компанії. Ця статистика враховує кореляцію премій і виплат. Метод марковських ланцюгів дозволяє ефективно обчислювати не тільки ймовірність розорення страхової компанії як функцію часу, а й наочно простежувати еволюцію розподілу капіталу з плином часу.

V.I. Norkin, I.G. Magdenko, B.V. Norkin

NUMERICAL SIMULATION OF THE INSURANCE BUSINESS BY MEANS
OF MARKOV CHAINS

A model of evolution of an insurance company's capital in the form of a Markov chain with a large number (thousands) of states is developed. To construct the transition probability matrix quarterly or annual statistics of the company’s premiums and claims is used. This statistic accounts for correlation of premiums and claims. Markov chains method allows effectively compute not only the probability of ruin of the company as a function of time, but also visually track the evolution of the distribution of company’s capital over time.

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1964. – Т. 1. – 498 с.; 1967. – Т. 2. – 752 с.
2. *Gerber H.U.* An introduction to mathematical risk theory. – Philadelphia: S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, 1979. – 164 p.
3. *Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E.* Risk theory. The stochastic basis of insurance // 3-rd edition. – London, New York: Chapman and Hall, 1984. – 408 p.
4. *Эмбрехтс П., Клюппельберг К.* Некоторые аспекты страховой математики // Теория вероятностей и ее применения. – 1993. – Т. 38, вып. 2. – С. 374 – 416.

5. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М.* та інші. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
6. *Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J. et al.* Modern Actuarial Risk Theory. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. – 309 p.
7. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д. и другие.* – Актуарная математика. – М.: Янус-К, 2001. – 656 с.
8. *Assmussen S., Albrecher H.* Ruin probabilities. Second Edition. – New Jersey, London: World Scientific, 2010. – 602 p.
9. *Ліга* страхових організацій України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://uainsur.com/stats/non-life/
10. *Фориншурер.* Интернет-журнал по страхованию в Украине [Електронний ресурс]. – Режим доступа : http://forinsurer.com/
11. *Норкін Б.В.* Числові методи розв'язання стохастичних задач оптимізації у страховій математиці: Автореф. дис. … доктора фіз.-мат. наук. – Київ, 2015. – 38 с.
12. *Норкин Б.В.* Системный имитационный анализ и оптимизация страхового бизнеса // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 2. – С. 112 – 125.
13. *Норкин Б.В.* Об идентификации моделей динамического финансового анализа страховой компании // Компьютерная математика. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2013. – № 2. – С. 24 – 33.
14. *Норкин Б.В.* Стохастический метод последовательных приближений для оценки риска неплатежеспособности страховой компании // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 116 – 130.
15. *Магденко І.Г.* Математичне моделювання динаміки капіталу страхової компанії за допомогою марковських ланцюгів. Дипломний проект. Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», факультет прикладної математики, кафедра прикладної математики. – Київ, 2016. – 63 с.

Получено 18.04.2016