Теорія оптимальних рішень

Доказаны критерий непрерывности линейного функционала, критерии существования сопряжённого оператора и его свойства. Выведены необходимые условия разрешимости общего операторного уравнения.

УДК 517.98

К.Г. ДЗЮБЕНКО

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА И РАЗРЕШИМОСТЬ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Понятие сопряжённого оператора является ключевым инструментом для решения функциональных уравнений и нахождения экстремумов целевых функционалов. В работе для линейного оператора общего вида доказаны критерии существования сопряжённого оператора и его основные свойства. Далее выведены необходимые условия разрешимости общего операторного уравнения. Это позволяет находить решение операторного уравнения как функцию управления – и применять его в задачах оптимизации.

N, R и C обозначают множества всех натуральных, действительных и комплексных чисел соответственно, $N_0 = N \bigcup \{0\}$. Всюду далее рассматриваются комплекснозначные функции и функционалы. Пусть L, L_1 – линейные пространства, $\vec{0}_1$ – нулевой элемент пространства L_1. *Ядро функционала* $\varphi : L \to C$ $Ker\varphi = \{x \in L : \varphi(x) = 0\}$. Для оператора $A : L \to L_1$ $Ker A = \{x \in L : Ax = \vec{0}_1\}$ – *ядро* A, $Im A = \{Ax : x \in L\}$ – *образ* A. $L_0 \subset L$ – *линеал в* L, если $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in L_0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in C$, $x_1, x_2 \in L_0$. Для линеала L_0 *размерность* $\dim L_0$ (конечная или бесконечная) – количество элементов максимального линейно независимого множества в L_0. Для множества $S \subset L$ *линейная оболочка* $\mathscr{L}(S)$ – минимальный линеал, содержащий S. *Индикаторная функция множества* H $I_H(x)$ равна 1 для $x \in H$, 0 для $x \notin H$.

Пусть L – линейное нормированное пространство. *Замыкание множества* S *в* L обозначаем $\overline{(S)_L}$. Множество $S \subset L$ *плотно в* L, если $\overline{(S)_L} = L$. Замкнутый линеал в E называется *подпространством*. *Базис* в L – линейно независимое множество $S \subset E$ с $\overline{(\mathscr{L}(S))_L} = L$. *Сопряжённое к* L *линейное пространство* L^* состоит из всех линейных непрерывных функционалов из E в C. Линейное пространство E будем называть *каноническим*, если задано *скалярное произведение* $(\cdot,\cdot): E \times E \to C$, для которого: 1) $(x,x) \ge 0$, и $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$; 2) $\overline{(x,y)} = (y,x)$, $x, y \in E$; 3) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in C$, $x_1, x_2, y \in E$. Здесь и далее $\vec{0}$ – нулевой элемент в пространстве E; верхняя черта над числом – комплексное сопряжение. *Норма вектора в* E $\| x \| = \sqrt{(x,x)}$, $x \in E$. Последовательность $\{x_n, n \in N\} \subset L$ *сходится к* $x_* \in L$ *при* $n \to \infty$ (обозначается $x_n \to x_*$, $n \to \infty$), если $\| x_* - x_n \| \to 0$, $n \to \infty$. Верно неравенство $|(x,y)| \le \| x \| \| y \|$, $x, y \in E$. Оно влечёт непрерывность (x,y) по паре переменных. $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ – *линейная сумма множеств* $S_1, S_2 \subset E$. $S_1 + S_2$ – *прямая сумма* S_1 *и* S_2 (обозначается $S_1 \oplus S_2$), если единственно каждое разложение $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$. S_1 и S_2 *ортогональны* (обозначается $S_1 \perp S_2$), если $(x_1, x_2) = 0$, $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$. $S_1 + S_2 = S_1 \oplus S_2$ для ортогональных S_1, S_2. Для $S \subset E$ *ортогональное дополнение* $(S)_E^{\perp} = \{x \in E : x \perp S\}$ ($x \perp S$ означает $\{x\} \perp S$). Другие определения см. в [1 – 5].

Работа продолжает исследования, опубликованные в [1, 2]. В работе [1] (теорема 2) я доказал, что линейный функционал $\varphi: L \to C$ непрерывен по норме пространства тогда и только тогда, когда его ядро $Ker\,\varphi$ замкнуто. Докажем ещё один критерий непрерывности линейного функционала.

Теорема 1. Пусть L – линейное нормированное пространство, $\varphi: L \to C$ – линейный функционал, не равный тождественно нулю. Тогда непрерывность φ равносильна $\overline{(Ker\,\varphi)_L} \ne L$.

Доказательство. Для краткости $\overline{Ker\,\varphi} = \overline{(Ker\,\varphi)_L}$. Необходимость. Если φ непрерывен, то $\overline{Ker\,\varphi} = Ker\,\varphi$. $Ker\,\varphi = L$ означало бы $\varphi \equiv 0$. Достаточность. Пусть $\overline{Ker\,\varphi} \ne L$. Выберем $x_1 \in L \setminus \overline{Ker\,\varphi}$. Тогда $\varphi(x_1) \ne 0$. От обратного, нарушение непрерывности φ влечёт существование $\{x_n, n \ge 2\} \subset L$ и $\varepsilon_0 > 0$ таких, что $x_n \to \vec{0}$ (сходимость к нулевому элементу L по норме $\| \cdot \|$ в L), но $|\varphi(x_n)| > \varepsilon_0$, $n \in N$. Обозначим $\alpha_n = (\varphi(x_n))^{-1} \varepsilon_0$, $n \in N$. Для всех $n \in N$ $|\alpha_n| \in (0, 1)$ и $\varphi(\alpha_n x_n) = \varepsilon_0$. Пусть $y_n = \alpha_1 x_1 - \alpha_n x_n$, $n \in N$. Тогда

$\varphi(y_n)=\varepsilon_0-\varepsilon_0=0$, $n\in N$. Из $\|\alpha_n x_n\|=|\alpha_n|\|x_n\|\le\|x_n\|$ следует $y_n=\alpha_1 x_1-\alpha_n x_n\to\alpha_1 x_1$, $n\to\infty$. $\{y_n\}\subset Ker\varphi$ влечёт $\alpha_1 x_1\in\overline{Ker\varphi}$. Тогда и $x_1\in\overline{Ker\,\varphi}$, что противоречит выбору x_1.

Лемма 1. Пусть E – каноническое пространство. Тогда существует его пополнение $\hat{E}$, удовлетворяющее требованиям: 1) E – линеал в полном пространстве $\hat{E}$; 2) $\overline{(E)_{\hat{E}}}=\hat{E}$; 3) $\hat{E}$ – каноническое пространство.

Доказательство. Рассмотрим метрику $\rho(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in E$. Существование линейного нормированного пространства $\hat{E}$, удовлетворяющего требованиям 1 и 2, следует из теоремы о пополнении метрического пространства ([3], с. 71). В пополненном пространстве $\hat{E}$ корректно задана единственная метрика $\rho_1(x,y)$, продолжающая $\rho(x,y)$ на $\hat{E}\times\hat{E}$. Рассмотрим функцию $\|x\|_1=\rho_1(\vec{0},x)$, $x\in\hat{E}$. Ввиду непрерывности метрики, $\|x\|_1$ может быть представлена как $\|x\|_1=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\vec{0},x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$ независимо от выбора $\{x_n\}\subset E$ с $x_n\to x$ при $n\to\infty$ (сходимость по ρ_1). $re\,a$, $im\,a$ обозначают действительную и мнимую часть числа $a\in C$; i – мнимая единица. Для скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ и порождённой им нормы $\|\cdot\|$ при всех $x,y\in E$ верны равенства:

$$re(x,y)=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right],\ im(x,y)=\frac{1}{4}\left[\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\right]. \tag{1}$$

Зададим функцию $(\cdot,\cdot)_1:\hat{E}\times\hat{E}\to C$ соотношениями для $x,y\in\hat{E}$:

$$re(x,y)_1=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|_1^2-\|x-y\|_1^2\right],\ im(x,y)_1=\frac{1}{4}\left[\|x+iy\|_1^2-\|x-iy\|_1^2\right]. \tag{2}$$

Рассмотрим любые $\alpha_1,\alpha_2\in C$, $x,y,z\in\hat{E}$ и $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}\subset E$ такие, что $x_n\to x$, $y_n\to y$ и $z_n\to z$ при $n\to\infty$ (сходимость по ρ_1). Запишем (1) для x_n, y_n и перейдем к пределу при $n\to\infty$. Получим $re(x_n,y_n)\to re(x,y)_1$, $im(x_n,y_n)\to im(x,y)_1$. Согласно (2), $(x,y)_1=\lim\limits_{n\to\infty}[re(x_n,y_n)+i\cdot im(x_n,y_n)]=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)$. Проверка аксиом скалярного произведения для $(\cdot,\cdot)_1$: 1) $(x,x)_1=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,x_n)\ge 0$, и $0=(x,x)_1=\lim\limits_{n\to\infty}(\rho(\vec{0},x_n))^2=(\rho_1(\vec{0},x))^2$ равносильно $x=\vec{0}$; 2) $(x,y)_1=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{(y_n,x_n)}=\overline{(y,x)_1}$; 3) $(\alpha_1 x+\alpha_2 z,y)_1=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_1 x_n+\alpha_2 z_n,y_n)=\alpha_1\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)+\alpha_2\lim\limits_{n\to\infty}(z_n,y_n)=\alpha_1(x,y)_1+\alpha_2(z,y)_1$.

Далее будем использовать обозначение $(\cdot,\cdot)$ и для продолжения скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на $\hat{E}\times\hat{E}$.

Теорема 2. Пусть E – сепарабельное каноническое пространство. Линейный функционал $\varphi: E \to C$ непрерывен тогда и только тогда, когда существует элемент $a \in \hat{E}$ такой, что $\varphi(x) = (x, a)$, $x \in E$, и такой a единственен.

Доказательство. Достаточность. $\varphi(x) = (x, a)$, $x \in E$, непрерывен в силу непрерывности скалярного произведения. Необходимость. Продолжим $\varphi: E \to C$ до линейного функционала $\hat{\varphi}: \hat{E} \to C$. Рассмотрим произвольное $x \in \hat{E} \setminus E$. Ввиду $\overline{(E)}_{\hat{E}} = \hat{E}$ найдётся $\{x_n\} \subset E$ такая, что $x_n \to x$, $n \to \infty$. Тогда $\{x_n\}$ фундаментальна в E, а $\{\varphi(x_n)\}$ фундаментальна в C ввиду $|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| \le \|\varphi\| \|x_n - x_m\|$, $n, m \in N$. Поэтому задан конечный $\hat{\varphi}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n)$, доопределяющий функционал φ на $\hat{E}$. Он линеен и ограничен (взятием предела в неравенствах $|\varphi(x_n)| \le \|\varphi\| \|x_n\|$, $n \in N$). $\hat{E}$ сепарабельно, так как базис E – это и его базис. По теореме о представлении линейного непрерывного функционала в полном сепарабельном каноническом пространстве ([3], с. 187 – 188) существует единственный $a \in \hat{E}$ такой, что $\hat{\varphi}(x) = (x, a)$, $x \in \hat{E}$. Понятно, что $\varphi(x) = (x, a)$, $x \in E$. Если существует другой $a_1 \in \hat{E}$ такой, что $\varphi(x) = (x, a_1)$, $x \in E$, то $(x, a_1 - a) = 0$, $x \in E$. Отсюда $(x, a_1 - a) = 0$, $x \in \hat{E}$. В частности, $(a_1 - a, a_1 - a) = 0$. Следовательно, $a_1 = a$.

Следствие. Для сепарабельного канонического пространства E: $E^* = \hat{E}$.

Общее определение сопряжённого оператора дано в ([4], с. 100): если L, L_1 – линейные нормированные пространства, *сопряжённый оператор* $A^*: L_1^* \to L^*$ для линейного оператора $A: L \to L_1$ задан соотношениями $(A^* y)(x) = y(Ax)$, $x \in L$, $y \in L_1^*$. В случае $A: E \to \hat{E}$ верны $E^* = (\hat{E})^* = \hat{E}$, и оператор A^* действует как отображение $\hat{E} \to \hat{E}$, удовлетворяющее соотношениям $(Ax, y) = (x, A^* y)$, $x \in E$, $y \in \hat{E}$. Будем называть такой оператор *сопряжённым в узком смысле* для оператора $A: E \to \hat{E}$.

Повсеместно применяемое определение сопряжённости приведено в ([5], с. 320). Следуя ему, рассмотрим X – полное каноническое пространство, D_1, D_2 – линеалы в X, где D_1 плотно в X. Для линейного оператора $A: D_1 \to X$ назовём $A^*: D_2 \to X$ *сопряжённым оператором,* если $(Ax, y) = (x, A^* y)$, $x \in D_1$, $y \in D_2$. Это понятие охватывает понятие сопряжённого оператора в узком смысле ($X = \hat{E}$, $D_1 = E$, $D_2 = \hat{E}$). В случае $X = \hat{E}$, $D_1 = E$, $D_2 = E$ то, что $A^*: E \to \hat{E}$ – сопряжённый оператор для $A: E \to \hat{E}$, равносильно $(Ax, y) = (x, A^* y)$, $x, y \in E$.

Известно, что сопряжённый оператор существует для непрерывного линейного оператора в полном сепарабельном каноническом пространстве ([3], с. 233). Оператор $A: D_1 \to X$ назовём *слабо непрерывным относительно* D_2, если функционал $\varphi_y(x) = (Ax, y)$, $x \in D_1$ непрерывен для всех $y \in D_2$. Оператор $A: E \to \hat{E}$ назовём *слабо непрерывным*, если $\varphi_y(x) = (Ax, y)$, $x \in E$ непрерывен для всех $y \in E$. Оператор $A: E \to \hat{E}$ назовём *слабо непрерывным в узком смысле*, если $\varphi_y(x) = (Ax, y)$, $x \in E$ непрерывен для всех $y \in \hat{E}$. Доказательство утверждений леммы 2 приведено в ([3], с. 159 – 160).

Лемма 2. Пусть X – полное сепарабельное каноническое пространство, M – подпространство X. Тогда верны утверждения: 1) $(M)_X^\perp$ – подпространство в X; 2) $X = M \oplus (M)_X^\perp$; 3) $((M)_X^\perp)_X^\perp = M$.

Пример 1. Пусть $E = C[-1,1]$; $(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)}\,dt$, $x, y \in E$; $a(t) = -I_{[-1,0)}(t) + I_{(0,1]}(t)$, $t \in [-1,1]$. a – элемент полного пространства $\hat{E} = L_2[-1,1]$, но он не принадлежит не полному E. $M = (\mathscr{L}(\{a\}))_E^\perp = \{x \in C[-1,1] : \int_{-1}^{0} x(t)\,dt = \int_{0}^{1} x(t)\,dt\}$ – подпространство E: если для $\{x_n\} \subset M$ и $x_* \in E$ верно $\int_{-1}^{1} (x_*(t) - x_n(t))^2\,dt \to 0$, $n \to \infty$, то и $\int_{-1}^{0} x_*(t)\,dt = \int_{0}^{1} x_*(t)\,dt$, т. е. $x_* \in M$. Но, ввиду $(M)_{\hat{E}}^\perp = \mathscr{L}(\{a\})$, верны $(M)_E^\perp = \{\vec{0}\}$ и $E \ne M \oplus (M)_E^\perp$.

Промах доказательства теоремы 1 в [1] связан с тем, что линейная сумма замкнутых множеств не всегда замкнута. Уточним и другие утверждения [1].

Теорема 3. Пусть X – полное сепарабельное каноническое пространство, D_1, D_2 – линеалы в X, D_1 плотно в X, $A: D_1 \to X$ – линейный оператор. Тогда существование $A^*: D_2 \to X$ – сопряжённого оператора для A – равносильно каждому из следующих утверждений.

1. $A: D_1 \to X$ слабо непрерывен относительно D_2.
2. $Ker(A\cdot, y)$ замкнуто в D_1 для любого $y \in D_2$.
3. $\overline{(Ker\,(A\cdot, y))}_{D_1} \ne D_1$ для любого $y \in D_2$, кроме случаев $(A\cdot, y) \equiv 0$.

Доказательство. Утверждения 1, 2 и 3 эквивалентны согласно приведенным выше критериям непрерывности линейного функционала. Пусть сопряжённый оператор $A^*: D_2 \to X$ существует. Для каждого $y \in D_2$ функционал $\varphi_y(x) = (Ax, y) = (x, A^* y)$, $x \in D_1$ непрерывен, и A слабо непрерывен относительно D_2. Обратно, пусть A слабо непрерывен относительно D_2.

Для каждого $y \in D_2$ непрерывен линейный функционал $\varphi_y(x) = (Ax, y)$, $x \in D_1$. По теореме 2 ($E = D_1, \hat{E} = X$) найдётся $a(y) \in X$ такой, что $\varphi_y(x) = (x, a(y))$, $x \in D_1$. Равенство $A^* y = a(y)$ задаёт сопряжённый оператор $A^* : D_2 \to X$.

Теорема 4. Пусть X – полное сепарабельное каноническое пространство, D_1, D_2 – линеалы в X, D_1 плотно в X, $A : D_1 \to X$ – линейный оператор, и существует сопряжённый оператор $A^* : D_2 \to X$. Тогда верны следующие утверждения.

1. A^* единственен. 2. A^* линеен. 3. A^* слабо непрерывен относительно D_1. 4. $Ker\, A$ замкнуто в D_1. 5. $Ker\, A^*$ замкнуто в D_2.

Пусть к тому же D_2 плотно в X. Тогда верны дополнительные утверждения.

6. $(A^*)^* = A$. 7. $\overline{(Ker\, A)_X} \perp \overline{(Im\, A^*)_X}$, и $X \supset \overline{(Ker\, A)_X} \oplus \overline{(Im\, A^*)_X}$. 8. Если $Ker\, A$ плотно в $(Im\, A^*)_X^{\perp}$, то $X = \overline{(Ker\, A)_X} \oplus \overline{(Im\, A^*)_X}$.

Доказательство. 1. Пусть $B : D_2 \to X$ – другой сопряжённый оператор для A. $(x, A^* y) = (Ax, y) = (x, By)$, $x \in D_1$, $y \in D_2$ влечёт $(x, A^* y - By) = 0$, $x \in X$, $y \in D_2$, и $A^* y = By$, $y \in D_2$. 2. Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in C$, $x \in D_1$, $y_1, y_2 \in D_2$:

$$(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = (Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1}(Ax, y_1) + \overline{\alpha_2}(Ax, y_2) =$$
$$= \overline{\alpha_1}(x, A^* y_1) + \overline{\alpha_2}(x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1) + (x, \alpha_2 A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2).$$

Положим $z = A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \alpha_1 A^* y_1 - \alpha_2 A^* y_2$. По непрерывности $(\cdot,\cdot)$, $(x, z) = 0$, $x \in \overline{(D_1)}_{\hat{E}} = X$, откуда $(z, z) = 0$ и $z = \vec{0}$. 3. Для любых $x \in D_1$ и $\{y_n\} \subset D_2$ с $y_n \to y_* \in X$, $n \to \infty$ верны $(x, A^* y_n) = (Ax, y_n) \to (Ax, y_*) = (x, A^* y_*)$, $n \to \infty$. 4. Пусть произвольная $\{x_n\} \subset Ker\, A$ такова, что $x_n \to x_* \in D_1$, $n \to \infty$. $(Ax_*, y) = (A(x_* - x_n), y) + (Ax_n, y) \to 0$, $n \to \infty$, $y \in D_2$. Поэтому $(Ax_*, y) = 0$ для всех $y \in D_2$ и для всех $y \in X$, откуда $Ax_* = \vec{0}$. 5. A^* слабо непрерывен относительно D_1 ввиду пункта 3, его ядро замкнуто в D_2. 6. Для $A^* : D_2 \to X$, где D_2 плотно в X, существование $(A^*)^* = A$ следует из $(A^* y, x) = (y, Ax)$, $y \in D_2$, $x \in D_1$. 7. Пусть $X_1 = (Im\, A^*)_X^{\perp}$, $X_2 = \overline{(Im\, A^*)_X}$. Тогда $X_1 = (X_2)_X^{\perp}$ по непрерывности $(\cdot,\cdot)$. Верны $Ker\, A = \{x \in D_1 : Ax = \vec{0}\} = \{x \in D_1 : (Ax, y) = 0, y \in D_2\} = D_1 \cap \{x \in X : x \perp Im\, A^*\} = D_1 \cap X_1$. По лемме 2, $X = X_1 \oplus X_2 \supset \overline{(Ker\, A)_X} \oplus \overline{(Im\, A^*)_X}$. 8. Следует из $Ker\, A = D_1 \cap X_1$ и $X = X_1 \oplus X_2$.

Нетрудно сформулировать аналоги теорем 3, 4 в случае сопряжённого (сопряжённого в узком смысле) оператора для $A: E \to \hat{E}$ в терминах слабой непрерывности (слабой непрерывности в узком смысле).

Теорема 5. Пусть E – сепарабельное каноническое пространство, $A: E \to \hat{E}$ – линейный слабо непрерывный оператор, $f \in \hat{E}$, и уравнение $Ax = f$ имеет решение $x \in E$. Тогда верны следующие утверждения.

1. Решение $x \in E$ единственно $\Leftrightarrow$ $Ker\, A = \{\vec{0}\}$. 2. $f \perp Ker\, A^*$.

Пусть к тому же $k_0 = \dim E$; $\{b_k, k = \overline{1, k_0}\}$ – базис в E; $E^{(2)} = \overline{(\mathscr{L}(\{A^* b_k\}))_{\hat{E}}}$; $E^{(1)} = (E^{(2)})^{\perp}_{\hat{E}}$; $k_1 = \dim E^{(1)}$; $\{d_k, k = \overline{1, k_1}\}$ – ортонормированный базис в $E^{(1)}$; элементы $g_k = A^* b_k$, $k = \overline{1, k_0}$ ортогонализированы по правилу $e_1 = \| g_1 \|^{-1} g_1$, $e_k = \left\| g_k - \sum_{l=1}^{k-1} (g_k, e_l) e_l \right\|^{-1} \left(g_k - \sum_{l=1}^{k-1} (g_k, e_l) e_l \right)$, $k = \overline{2, k_2}$ с $k_2 \in N \bigcup \{\infty\}$ (если для $k \in N$ $g_k = \vec{0}$ или $e_k = \vec{0}$, g_k отклоняется, и ортогонализация продолжается с g_{k+1}). Тогда верны дополнительные утверждения.

3. $\{d_k\} \bigcup \{e_k\}$ – ортонормированный базис в $\hat{E}$. 4. $x = \sum_{k=1}^{k_1} (x, d_k) d_k + \sum_{k=1}^{k_2} (x, e_k) e_k$. 5. Если результат ортогонализации $\{g_k\}$ представлен в виде $e_k = \sum_{l=1}^{k} \gamma_{kl} g_l$, $k = \overline{1, k_2}$, где $\gamma_{kl} \in C$, $l = \overline{1, k}$, $k = \overline{1, k_2}$, то $(x, e_k) = \sum_{l=1}^{k} \overline{\gamma_{kl}} (f, b_l)$, $k = \overline{1, k_2}$. 6. Для любых $\{f_n\} \subset Im\, A$ с $(f_n, b_l) \to (f, b_l)$, $n \to \infty$ для всех $l \in N$ и $\{x_n\} \subset E$ с $Ax_n = f_n$, $n \in N$ верны $(x_n, e_k) \to (x, e_k)$, $n \to \infty$ для $k = \overline{1, k_2}$.

Доказательство. 1. Совпадение решений $x_1, x_2 \in E$ уравнения $Ax = f$ равносильно выполнению $A(x_1 - x_2) = \vec{0}$ лишь для $x_1 - x_2 = \vec{0}$. 2. Пункт 7 теоремы 4 для $X = \hat{E}$, $D_1 = D_2 = E$ и A^* влечёт $Ker\, A^* \perp Im\, A$. Разрешимость $Ax = f$ равносильна $f \in Im\, A$, откуда $f \perp Ker\, A^*$. 3. Ортонормированный базис $\{d_k\}$ в сепарабельном $E^{(1)}$ существует ([3], с. 149). $\{e_k, k = \overline{1, k_2}\}$ – ортонормированный базис в $E^{(2)}$ по построению. Осталось применить $\hat{E} = E^{(1)} \oplus E^{(2)}$.

4. Разложение в ряд по ортонормированному базису (сходимость по норме) верно для любого элемента пространства ([3], с. 151).

5. Для $k = \overline{1, k_2}$

$$(x, e_k) = (x, \sum_{l=1}^{k} \gamma_{kl} g_l) = \sum_{l=1}^{k} \overline{\gamma_{kl}} (x, A^* b_l) = \sum_{l=1}^{k} \overline{\gamma_{kl}} (Ax, b_l) = \sum_{l=1}^{k} \overline{\gamma_{kl}} (f, b_l).$$

6. $(x_n, e_k) = \sum_{l=1}^{k} \overline{\gamma_{kl}} (f_n, b_l) \to \sum_{l=1}^{k} \overline{\gamma_{kl}} (f, b_l) = (x, e_k)$, $n \to \infty$ для $k = \overline{1, k_2}$.

Комментарий 1. Традиционное для темы разрешимости операторных уравнений (теоремы Фредгольма, [3], с. 468 – 469) свойство замкнутости $Im\, A$ не рассматривается. Ведь, вообще говоря, E не полно, и $Im\, A$ не замкнут даже для $A = I - K$, где I – единичный оператор, K – компактный оператор $E \to \hat{E}$.

Комментарий 2. Коэффициенты (x, e_k), $k = \overline{1, k_2}$ одинаковы для всех решений $x \in E$ уравнения $Ax = f$. $(x_n, e_k) \to (x, e_k)$, $n \to \infty$ для $k = \overline{1, k_2}$ означают покоординатную сходимость в ортонормированном базисе $\{e_k\}$. Если $\{x_n\}$ ограничена, эта сходимость равносильна слабой сходимости в полном сепарабельном $E^{(2)} = \overline{(\mathscr{L}(\{e_k\}))_{\hat{E}}}$, т. е. $(x_n, y) \to (x, y)$, $n \to \infty$, $y \in E^{(2)}$ ([3], с. 156, 196). Отметим, что возможны строгие включения $E^{(2)} \subset \overline{(Im\, A^*)_{\hat{E}}}$, $E^{(1)} \supset \overline{(Ker\, A)_{\hat{E}}}$.

Пример 2. Пусть $T > 0$; $C^{(2)}[0, T]$ – пространство всех дважды дифференцируемых функций $(0, T) \to C$, которые с обеими производными непрерывно продолжаются на $[0, T]$; $(x, y) = \int_0^T x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$, $x, y \in C^{(2)}[0, T]$; $\omega = 2\pi T^{-1}$; $E = \{x \in C^{(2)}[0, T] : x(0) = x(T), \dot{x}(0) = \dot{x}(T)\}$. Тогда $\hat{E} = L_2[0, T]$ (пространство всех функций $[0, T] \to C$, квадратично интегрируемых по Лебегу). Линейный оператор $(Ax)(\cdot) = \ddot{x}(\cdot) + \omega^2 x(\cdot)$ из E в $\hat{E}$, описывающий гармонические колебания, слабо непрерывен: для $\{x_n\} \subset E$ с $x_n \to \vec{0}$, $n \to \infty$ и $y \in E$ верны

$$|(Ax_n, y)| = \left| \int_0^T \ddot{x}_n \bar{y}\, dt + \omega^2 \int_0^T x_n \bar{y}\, dt \right| = \left| \dot{x}_n \bar{y} \Big|_0^T - \int_0^T \dot{x}_n \dot{\bar{y}}\, dt + \omega^2 \int_0^T x_n \bar{y}\, dt \right| =$$

$$= \left| -x_n \dot{\bar{y}} \Big|_0^T + \int_0^T x_n \ddot{\bar{y}}\, dt + \omega^2 \int_0^T x_n \bar{y}\, dt \right| \le \| x_n \| \big(\| \ddot{y} \| + \omega^2 \| y \| \big) \to 0,\ n \to \infty.$$

$\int_0^T (\ddot{x} + \omega^2 x)\, \bar{y}\, dt = \int_0^T x(\ddot{\bar{y}} + \omega^2 \bar{y})\, dt$, $x, y \in E$, влечёт $(A^* y)(\cdot) = \ddot{y}(\cdot) + \omega^2 y(\cdot) = (Ay)(\cdot)$, $y \in E$. Совокупность $a_0(t) = \sqrt{T^{-1}}$, $a_{2k-1}(t) = \sqrt{2T^{-1}} \sin(2k\pi T^{-1} t)$, $a_{2k}(t) = \sqrt{2T^{-1}} \cos(2k\pi T^{-1} t)$, $t \in [0, T]$, $k \in N$, является ортонормированным базисом в E (см. [3], с. 392). $Aa_1 = Aa_2 = \vec{0}$; $Aa_k = \beta_k a_2$, где $\beta_k \in R \setminus \{0\}$, $k \in \{0, 3, 4, 5, \ldots\}$. Поэтому $B_1 = \{a_1, a_2\}$ и $B_2 = \{a_0\} \cup \{a_k, k \ge 3\}$ являются ортонормированными базисами соответственно для $Ker\, A = Ker\, A^*$ и

$E^{(2)} = \overline{(\mathscr{L}(B_2))_{\hat{E}}}$. Применим теорему 5 к $\{b_k\} = \{a_k\}$, $E^{(1)} = \overline{(\mathscr{L}(B_1))_{\hat{E}}} = \mathscr{L}(B_1)$, $E^{(2)}$, $\{e_k\} = B_2$ и $\{d_k\} = B_1$. Если для управления $f \in \hat{E}$ решение $x \in E$ уравнения $Ax = f$ существует, то $f \in Im A$, и $f \perp Ker A^*$. Это решение представимо в виде $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ с некоторыми $x^{(1)} \in E^{(1)}$, $x^{(2)} \in E^{(2)}$. При этом $x^{(1)} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ – произвольные постоянные. А $x^{(2)} = (x^{(2)}, a_0) a_0 + \sum_{k=3}^{k_2} (x^{(2)}, a_k) a_k$ – единственное решение $Ax = f$ в $E^{(2)}$, так как $Ax^{(1)} = \vec{0}$ и $Ker A \bigcap E^{(2)} = \{\vec{0}\}$. И если для $\{f_n\} \subset Im A$ $(f_n, a_k) \to (f, a_k)$, $n \to \infty$ для всех $k \in \{0, 3, 4, 5, ...\}$, а для $\{x_n\} \subset E$ $Ax_n = f_n$, $n \in N$, то $(x_n, a_k) \to (x^{(2)}, a_k)$, $n \to \infty$ для всех $k \in \{0, 3, 4, 5, ...\}$. Заметим, что для функции $f(t) = \cos \omega t$, $t \in [0, T]$, не ортогональной $Ker A^*$, уравнение $Ax = f$ не имеет решений в E. При этом оно имеет частное решение $x(t) = (2\omega)^{-1} t \sin \omega t$, $t \in [0, T]$ вне E: для него не выполнено условие $\dot{x}(0) = \dot{x}(T)$.

К.Г. Дзюбенко

ІСНУВАННЯ СПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА ТА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Доведено критерій неперервності лінійного функціонала, критерії існування спряженого оператора та його властивості. Виведено необхідні умови розв'язності загального операторного рівняння.

K.G. Dziubenko

ADJOINT OPERATOR EXISTENCE AND OPERATOR EQUATIONS SOLVABILITY

Linear functional continuousness criterion, criterion for adjoint operator existence and its properties are proved. Necessary conditions for general operator equation solvability are derived.

1. *Дзюбенко К.Г.* Ортогональные разложения пространств и их применения // Теория оптимальных решений. – 2010. – № 9. – С. 25 – 32.
2. *Dziubenko K.G.* Continuousness of linear functionals and operator equations // XV International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation". Abstracts of conference reports. – Kiev, May 25 – 27, 2011. – P. 30.
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
4. *Banach S.* Théorie des Opérations Linéaires. – Warszawa, 1932. – 265 p.
5. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу (пер. с фр.). – М.: Мир, 1979. – 592 с.

Получено 31.03.2016