УДК 519.1

И.Э. ШУЛИНОК, Г.А. ШУЛИНОК

ПОКРЫТИЯ В ЧИСЛОВЫХ ГРАФАХ

Рассматриваются натуральные арифметические и натуральные модульные графы. Предлагаются алгоритмы и свойства, определяющие покрываемость рассматриваемых графов, а также находящих покрытия наименьшей длины для заданного натурального арифметического и натурального модульного графа.

© И.Э. Шулинок, Г.А. Шулинок, 2016

Введение. Среди труднорешаемых задач на графах важную роль на ряду с задачей о раскраске стоит задача о покрытиях. В общем случае для неориентированных графов она задается как поиск минимального подмножества вершин, инцидентных всем ребрам графа. Для числовых графов [1], очевидно, такую задачу тоже можно поставить, в частности для натуральных арифметических (НА-графов) и натуральных модульных (НМ-графов) графов.

Определение 1. Числовым графом $G(X, U, F, g)$ называется такой граф, в котором вершины содержаться в множестве X, и пары вершин $x, y \in X$ соединены дугами тогда и только тогда, когда $F(x, y) \in U$. Множество X называется множеством вершин, множество U множеством образующих, функция $F{:}X\times X\to R$ – порождающей функцией. Мно-жество $X = N_n$. Функция $g{:}X\to\{0,1\}$ называется функцией исключений.

В зависимости от вида порождающей функции и функции исключений, различают натуральные числовые графы ($g(x) = 1$, $x\in X$), а также арифметические ($F(x, y) =$ $= x + y$, A-графы) и модульные ($F(x, y)$ $=$ $= |x - y|$, M-графы) графы. Назовем такие натуральные графы соответственно *НА*-графами и *НМ*-графами.

Определение 2. Покрытием числового графа G будем называть такой набор вершин, который инцидентен всем ребрам графа.

Рассмотрим случай с *НА*-графами, поскольку эти графы исследуются на протяжении многих лет, и за этот период времени их структура достаточно изучена.

Обозначим $NA_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ – натуральный арифметический граф с n вершинами и множеством образующих $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

НА-графы, которые интересны для рассмотрения, должны иметь достаточное количество ребер и, как следствие, вершины с ненулевой степенью. Назовем такие графы покрываемыми. Среди покрываемых графов можно выделить графы, содержащие совершенные паросочетания, а также графы-паросочетания [2]. Очевидно, что в таких графах легко выделить набор вершин, составляющих покрытие. С другой стороны, для *НА*-графов интерес представляют графы с нечетным числом вершин, что в совершенных паросочетаниях исключено. При этом, граф, представляющий собой гамильтонову цепь, позволяет сформулировать нижнюю оценку длины покрытия в *НА*-графе.

Лемма 1. Минимальное покрытие *НА*-графа из n вершин не может быть короче $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Доказательство. Если рассмотреть в качестве примера *НА*-граф с образующими вида $U = \{u, 2n - u + 1\}, \quad u \geq 3$, то окажется, что вершины в нем можно распределить на два подмножества, содержащие чередующиеся звенья цепи. Поскольку в четном случае эти подмножества будут равны по мощности, а в нечетном – отличающихся на 1, то легко показать, что вершины из меньшего подмножества будут содержать концы всех ребер графа, что и требовалось доказать.

Еще один пример – граф с нечетными образующими. Если граф будет покрываемым, то он также будет двудольным, а доля, содержащая четные вершины в нечетном случае будет меньшей, откуда и вытекает оценка.

Верхнюю оценку длины покрытия в числовом графе дает свойство полного графа.

Лемма 2. Минимальное покрытие полного числового графа с n вершинами имеет длину $n-1$.

Доказательство. Поскольку в полном графе все вершины соединены со всеми вершинами, то удаление одной произвольной вершины дает покрытие. Однако, удаление еще одной произвольной вершины в покрытии привело бы к потере ребра графа, т. е. не являлось бы покрытием. Значит, покрытие длины $n-1$ является минимальным для полного графа.

Прежде чем решать вопрос нахождения наименьшего покрытия *НА*-графа рассмотрим способ определения его покрываемости. Прямой способ, которым можно выяснить, будет ли данный граф покрываемым, будет состоять в том, чтобы определить степень всех его вершин. Данная процедура может занять порядка $O(n \cdot m)$ операций, что нивелирует возможности графа. С другой стороны, образующие графа позволяют определять наборы вершин, задаваемые промежутками, которые будут связываться ребрами благодаря указанным образующим. Поэтому было бы уместно предложить процедуру определения покрываемости для заданного *НА*-графа, требующей в худшем случае порядка $O(\log m)$ операций.

Рассмотрим натуральный арифметический граф $\mathrm{NA}_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, содержащий n вершин и m образующих $3 \le u_1 < u_2 < \cdots < u_m \le 2n-1$. Каждая образующая сообщает графу некоторый набор ребер, а также охватывает определенный набор вершин графа. Так образующая 7 обеспечивает ребрами вершины от 1 до 6, сообщая графу ребра (1, 6), (2, 5) и (3, 4). Если в графе нет вершин 5, 6 и 7, то и ребер в графе не будет. Но если в графе достаточное количество вершин, то образующая 7 сообщает графу 3 ребра. Из работы [1] известно, что любая нечетная образующая $u \in U,\ u \le n+1$ сообщает графу $\left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor$ ребер, а четная – $\frac{u}{2} - 1$ ребер. При этом, нечетная образующая обеспечивает связность вершин от 1 до $u-1$, тогда как в четном случае вершина $\frac{u}{2}$ не будет задействована.

Если $u \in U,\ u > n+1$, то, в зависимости от четности, образующая дает $n - \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor$ ребер. Как и в предыдущем случае вершины $\frac{u}{2}$ для четной образующей не будут присутствовать во множестве порожденных вершин.

Таким образом, можно построить процедуру построения множества вершин в виде промежутков, определяющей существование промежутка вершин от 1 до n, которая не требует перебора вершин и всех образующих.

Алгоритм 1. Проверка *НА*-графа на покрываемость.

Шаг 0. Исходные данные: упорядоченный набор образующих U, число вершин n.

Шаг 1. Найти в наборе образующих такую, которая не меньше n. Построить промежуток вершин. Если образующая равна $n+1$ и нечетная – ответ положительный. Иначе находим промежуток вершин, охватываемый образующей.

Шаг 2. Если промежуток неполон снизу – находим образующую, которая удовлетворяет вершинам из нижнего промежутка. Если образующая найдена – ответ положительный.

Шаг 3. Для положительных образующих, теряющих вершину, находим другую образующую, связывающую упущенную вершину с другими. Если такие образующие есть – ответ положительный, иначе – ответ отрицательный.

Как видно, алгоритм 1 имеет логарифмическую вычислительную сложность по величине множества образующих. И программная реализация алгоритма подтверждает это.

Покрытие *НА*-графа наименьшей длины также может быть получено в результате итерационной процедуры. В самом деле, пусть в наличие будет покрываемый граф $\mathrm{NA}_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Покажем эту процедуру на рис. 1.

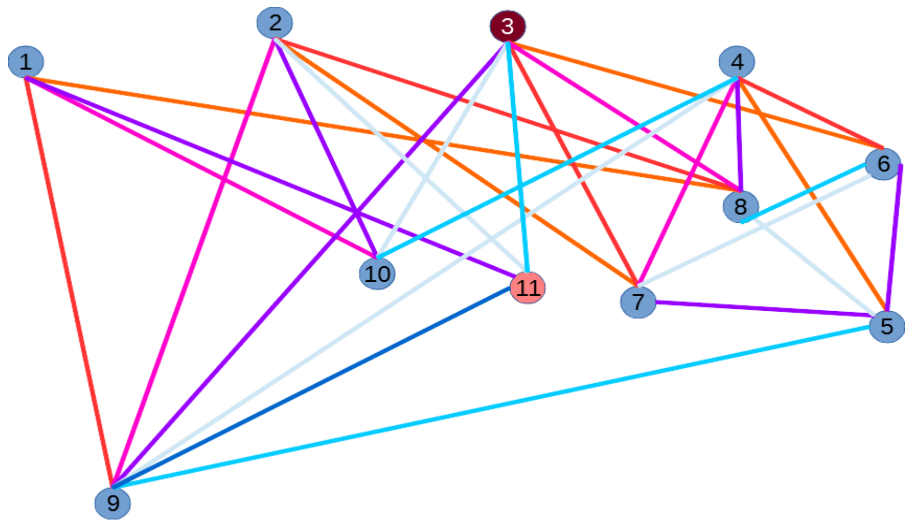

РИС. 1. Граф $NA_{11}(9, 10, 11, 12, 13, 14, 20)$

Выберем в графе вершину с наибольшей степенью и наименьшим индексом (вершина 3 на рис. 1). Такая вершина, очевидно, будет содержаться в наименьшем покрытии. С другой стороны, если пройтись по графу, и выделить висячие вершины, то, очевидно, что такие вершины не будут влиять на длину покрытия. При этом вершины, инцидентные висячим, по определению содержатся в минимальном покрытии. Таким образом, имеем один шаг процедуры, который можно вынести в предобработку и шаг итерации. Определим алгоритм формально.

Алгоритм 2. Нахождение минимальной длины покрытия *НА*-графа.

Шаг 0. Даны *НА*-граф с n вершинами, образующими $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, нижний список вершин L – пустой, верхний список, содержащий все вершины $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Шаг 1. Выясняем, является ли граф покрываемым по алгоритму 1. Если да, то переходим на шаг 2. Иначе – завершение, поскольку задача не имеет решения.

Шаг 2. Проходим по графу и удаляем висячие вершины из V и вершины, а вершины, инцидентные висячим – заносим в L.

Шаг 3. Находим вершину x с наибольшей степенью не содержащейся в списке L.

Шаг 4. Определяем список $I(x)$ инцидентных x и выбираем среди них вершину y с наибольшим индексом. Включаем в список L вершину x и все вершины, инцидентные y, если они не входят в список, а из списка V исключаем вершину y.

Шаг 5. Итерируем по списку $I(x)$ и исключаем из V вершины, инцидентные только вершинам из L.

Шаг 6. Если L и V имеют одинаковую длину – останов. Длина будет минимальной. Иначе – переход на шаг 3.

Из полиномиальной сложности шагов вытекает полиномиальная вычислительная сложность алгоритма 2.

Рассмотрим арифметический (*A*-граф) заданный с функцией пропуска g. Применительно к алгоритму 2 вытекает, что эта функция добавляет линейную сложность к алгоритму 2. Тем самым имеет место следующее свойство.

Теорема 1. Алгоритм нахождения длины наименьшего покрытия *A*-графа имеет полиномиальную сложность.

Учитывая то, что *A*-графы изоморфны множеству обыкновенных графов, вытекает следующее свойство.

Следствие. Задача нахождения наименьшего покрытия обыкновенного графа имеет полиномиальную сложность.

Натуральные модульные графы (*НМ*-графы) в свою очередь тоже позволяют находить покрытия наименьшей длины. Кроме того, из специфики *НМ*-графов множество образующих в них как правило меньше множества вершин. Для этих графов также можно сформулировать свойство, аналогичное лемме 1.

Лемма 3. Минимальное покрытие *НМ*-графа не может быть короче $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, где n – число вершин графа.

Доказательство. Простейший покрываемый *НМ*-граф содержит единственную образующую 1. Такой граф представляет собой цепь, соединяющую вершины от 1 до n. В силу специфики *НМ*-графа все ребра графа соединяют пары вершин, среди которых одна – четная, а другая – нечетная. При этом ни четные, ни нечетные вершины не соединяются между собой. То есть этот граф будет двудольным, и доля, состоящая из четных вершин, не будет превышать долю, содержащую нечетные вершины. Более того, любая из этих долей будет покрытием графа. Тем самым, меньшая доля будет иметь длину $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Предположим, что существует покрытие *НМ*-графа, длина которого будет меньше $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. В таком случае можно сказать, что будет существовать вершина, которая будет центром звезды ранга 3 и более, что противоречит выводам [3] о невозможности представить звезду в виде *НМ*-графа при ранге более 2.

Как и для *НА*-графов, для *НМ*-графов можно предложить способ определения покрываемости. Очевидно, что *НМ*-граф будет покрываемым, если все его вершины имеют степень, превышающую 0. При этом, если граф содержит вершины, не соединенные с другими, это означает, что образующие графа будут превышать определенное значение. Получается, что имеет место следующее свойство:

Лемма 4. *НМ*-граф $NM_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ будет покрываемым тогда и только тогда, когда $2u_1 - n \bmod 2 < n$.

Доказательство. В данном графе образующие по определению имеют вид $u_1 < u_2 < \ldots < u_m$. Пусть в графе выполняется условие $2u_1 - n \bmod 2 < n$. Это означает, что образующая u_1 обеспечивает ребра, соединяющие все вершины от 1 до n. Так вершина 1 связана с вершиной $u_1 + 1$, а вершина u_1, в свою очередь, с вершиной $2u_1$. По условию леммы $2u_1 < n + n \bmod 2$, следовательно, вершина $2u_1$ принадлежит графу. Также вершина n соединяется ребром с вершиной $n - u_1 > 0$ и, как следствие, все остальные вершины от $n-1$ до $2u_1 + 1$ будут иметь ребра в графе. Таким образом граф покрываемый.

Рассмотрим покрываемый граф, в котором образующая u_1 такова, что $2u_1 > n$. По определению, остальные образующие будут еще больше. В этом графе, по предположению, должно быть ребро, соединяющее вершину u_1 и вершину $2u_1$. Но поскольку $2u_1 > n$, то вершина $2u_1$ не принадлежит графу. Следовательно, получаем противоречие. Лемма доказана.

Подобно алгоритму 2 можно сформулировать алгоритм, который находит покрытие наименьшей длины для заданного покрываемого графа.

Пусть начальное покрытие S_0 состоит из всех вершин графа. Исключим висячие вершины, получим покрытие S_1. Далее проводим процедуру, подобную изложенной в алгоритме 2. Используя два списка – верхний и нижний исключаем вершины из одного и добавляем в другой до тех пор, пока длина списков не станет одинаковой.

Прежде чем задать алгоритм формально, проиллюстрируем его работу на примере.

Пусть у нас есть *НМ*-граф $NM_{11}(1, 2, 3)$, показанный на рис. 2.

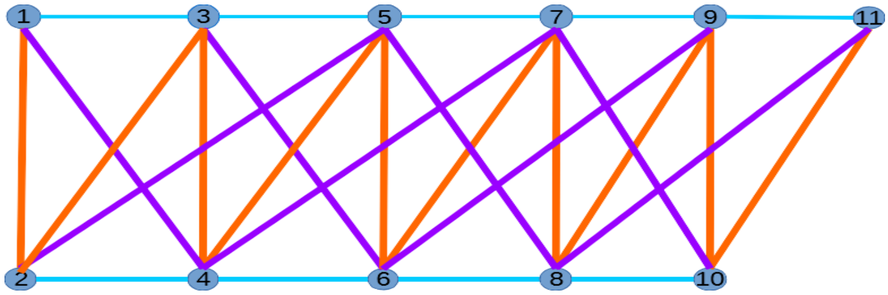

РИС. 2. Граф $NM_{11}(1, 2, 3)$

В этом графе нет висячих вершин. В таком случае верхнее множество содержит вершины от 1 до 11, а нижнее – пустое.

Найдем вершину с наибольшей степенью и наименьшим индексом – это 4. Внесем ее в нижнее множество. Найдем вершину, инцидентную 4 с наименьшим индексом – это 1. Рассмотрим вершины, связанные с 1 – это 2, 3 и 4. Среди этих вершин, вершина 1 имеет наименьшую степень. Исключаем ее из верхнего множества, а в нижнее добавляем 2 и 3. Получаем $V = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$. Итерация завершена. Поскольку нижнее и верхнее множества имеют разную длину – продолжаем.

Выбираем следующую вершину с наибольшей степенью – это будет 8. Находим связанные с ней вершины наименьшей степенью. Все вершины, связанные с 8 имеют степень не меньше, чем у нее. Добавляем 8 в нижний список, а вершину 11 исключаем из рассмотрения. Получаем $V = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$. Вершины 9 и 10 вносим в нижний список. Переходим на следующую итерацию.

Следующая вершина – 6. Среди инцидентных ей – 5 и 7. Исключаем вершину 7. Вершину 5 включаем в нижний список. Имеем нижний список $V = (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10)$, верхний список $V = (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10)$. Списки совпали, процедура достигла минимума. $S^*=\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, $|S^*|=8$, т. е. наименьшее покрытие графа $NM_{11}(1, 2, 3)$ имеет длину 8.

Запишем процедуру формально.

Алгоритм 3. Нахождение минимальной длины покрытия *HM*-графа.

Шаг 0. На входе – покрываемый *HM*-граф с набором образующих $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $1 \le u_1 < u_2 < \cdots < u_m < n$, $n > 2u_1 - n \bmod 2$. Заданы верхнее и нижнее множества покрытия V и L соответственно. $L = \varnothing$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, список степеней вершин графа D.

Шаг 1. Выбираем вершину графа с наибольшей степенью и наименьшим индексом. Обозначим ее v. Заносим вершину в список L. Среди вершин, инцидентных v выбираем такую, у которой степень будет наименьшей. Обозначим ее w. Исключаем ее из списка V.

Шаг 2. Вносим все вершины, инцидентные w в список L. Среди вершин списка V уменьшаем в D степень вершин, инцидентных вершинам из L.

Шаг 3. Если длина списка L равна длине списка V, то выход – список V будет покрытием наименьшей длины. Иначе – переход на шаг 1.

Как и в случае с *HA*-графами, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Алгоритм 3 обеспечивает нахождение покрытя минимальной длины для модульного графа.

Как и в случае с *A*-графами, *M*-графы тоже изоморфны обыкновенным графам. Для данной теоремы тоже можно сформулировать подобное следствие.

Выводы. Данная работа завершает цикл базовых исследований по простейшим числовым графам – *HM*-графам и *HA*-графам. Эти графы достаточно просты в исследовании, но они позволяют разрабатывать методы, применимые для обычных графов, при условии решения задачи представления.

І.Е. Шулінок, Г.О. Шулінок

ПОКРИТТЯ ЧИСЛОВИХ ГРАФІВ

Розглядаються натуральні арифметичні й натуральні модульні графи. Доводяться властивості графів, що розв'язують задачу існування покриття, а також алгоритми знаходження покриття для заданого числового графа. Пропонується розширення алгоритмів, яке дозволяє застосування для арифметичних та модульних графів, а також і для звичайних графів.

I.E. Shulinok, G.A. Shulinok

ABOUT NUMERIC GRAPHS NODES MATCHING

Natural arithmetic and natural modular graphs are considered. The graphs qualities for cover problem are solved. The algorithms to allow compute coverability of NA- and NM-graphs were developed. Also algorithms to compute minimal cover for any NA- and NM-graph were made and appropriate statements were proved.

1. *Донец Г.А.* Основы теории числовых графов. – Кировоград: ЧП «Эксклюзив-Систем», 2013. – 280 с.

2. *Шулинок И.Э., Шулинок Г.А.* О паросочетаниях в числовых графах // Теорія оптимальних рішень. – К.: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2015. – С. 29 – 34.
3. *Шулинок И.Э*. Полное описание структуры одного подкласса *NM*-графов // Там само. – 2000. – С. 75 – 81.

Получено 23.03.2016