Теорія оптимальних рішень

УДК 517.977

В.К. ЧИКРИЙ

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ МОДЕЛИ СПОРТИВНЫХ ЕДИНОБОРСТВ

В рамках теории динамических игр для систем с переменной структурой рассматривается игровое взаимодействие двух противоборствующих сторон, моделирующее спортивные единоборства. Рассматриваются ситуации «атака – защита» и «защита – атака» для обеих сторон. На основании метода разрешающих функций установлены достаточные условия выигрыша каждого игрока, а также ничейного исхода в терминах параметров конфликтно-управляемого процесса.

Введение. Метод разрешающих функций [1 – 3] по своей сути основан на построении некоторых положительных скалярных функций, характеризующих выигрыш игрока в каждый текущий момент времени. При этом если сумма набранных «очков» достигает определенного числа, то наступает конец игры. Это обстоятельство позволяет применить указанный подход к моделированию спортивных единоборств. В предлагаемой модели атакующие и защитные действия игроков чередуются. При этом сознательно исключается из рассмотрения ситуации «атака – атака» и «защита – защита». В дальнейшем также предполагается, что игрок может набирать очки лишь только при атакующих действиях, что для многих видов спорта является вполне естественным.

Пусть $\{\tau_i\}$, $i=\{0\}\cup N$, $N=\{1,2,\ldots\}$, последовательность несовпадающих моментов времени полуоси $R_+=[0,+\infty)$. Будем считать, что любой компактный промежуток $[a,b]$, $[a,b]\subset R_+$, содержит конечное число точек τ_i.

Кроме того, обозначим $N_+=\{0,2,4,\ldots\}$ – совокупность четных натуральных чисел вместе с нулем, а $N_-=\{1,3,5,\ldots\}$ – множество нечетных натуральных чисел.

Образуем два непересекающихся множества на полуоси R_+

$$G_1=\bigcup_{i\in N_+}[\tau_i,\tau_{i+1}),\; G_2=\bigcup_{i\in N_-}[\tau_i,\tau_{i+1}),$$

содержательно обозначающие периоды атакующих действий соответственно первого и второго игрока.

Если игровое противостояние происходит на интервале $[0, t]$, то существует такой номер k, что $\tau_k \le t < \tau_{k+1}$, и атакующие действия первого игрока, соответственно, защитные действия второго, осуществляются на множестве

$$G_1^t = \begin{cases} [\tau_0, \tau_1) \cup [\tau_2, \tau_3) \cup \ldots \cup [\tau_k, t], \text{ если } k \text{ четное}, \\ [\tau_0, \tau_1) \cup [\tau_2, \tau_3) \cup \ldots \cup [\tau_{k-1}, \tau_k], \text{ если } k \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Аналогично, атакующие действия второго игрока вместе с защитными действиями первого реализуются на множестве

$$G_2^t = \begin{cases} [\tau_1, \tau_2) \cup [\tau_3, \tau_4) \cup \ldots \cup [\tau_k, t], \text{ если } k \text{ нечетное}, \\ [\tau_1, \tau_2) \cup [\tau_3, \tau_4) \cup \ldots \cup [\tau_{k-1}, \tau_k], \text{ если } k \text{ четное}. \end{cases}$$

Будем предполагать, что функциональное состояние игроков в режиме «атака – защита» (атака первого и защита второго) описывается равенством

$$z_1(t) = g_1(t) + \int_{G_1^t} \Omega_1(t, \tau) \varphi_1(u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

в режиме «защита – атака» – равенством

$$z_2(t) = g_2(t) + \int_{G_2^t} \Omega_2(t, \tau) \varphi_2(u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad t \ge 0. \tag{2}$$

Здесь в каждой ситуации обе противоборствующие стороны объединены в единую систему (1) или (2), причем $z_1(t) \in R^n$, $z_2(t) \in R^n$, $n \ge 2$. Функции $g_i(t)$, $g_i : R_+ \to R^n$, $i = 1, 2$ характеризуют начальные данные, они измеримы по Лебегу и ограничены при $t > 0$. Матричные функции $\Omega_i(t, \tau)$, $0 \le \tau \le t$, $i = 1, 2$, почти везде ограничены, измеримы по t и суммируемы по τ для каждого $t \in R_+$.

Блоки управляющих воздействий задаются функциями $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_1 : U_1 \times V_2 \to R^n$, $\varphi_2(u, v)$, $\varphi_2 : U_2 \times V_1 \to R^n$, которые предполагаются непрерывными по совокупности переменных на прямых произведениях непустых компактов $U_i \in K(R^n)$, $V_i \in K(R^n)$, $i = 1, 2$, где U_1 и V_1 обозначают атакующий потенциал каждого из игроков, а U_2 и V_2 – набор из защитных средств.

Допустимые управления $u_i(\tau)$, $u_i : R_+ \to U_i$, $v_i(\tau)$, $v_i : R_+ \to V_i$, $i = 1, 2$, измеримые функции времени, соответствующие атакующим и защитным действиям игроков.

Кроме динамики процессов (1) и (2) заданы целевые (терминальные) множества

$$M_1^* = M_1^0 + M_1, \; M_2^* = M_2^0 + M_2, \tag{3}$$

где M_1^0, M_2^0 – линейные подпространства из R^n, а M_1, M_2 – компакты, $M_1 \in K(L_1)$, $M_2 \in K(L_2)$, телесные части терминальных множеств, $L_1 = M_1^{0\perp}$,

$L_2 = M_2^{0\perp}$ – ортогональные дополнения к M_1^0 и M_2^0 в R^n соответственно. Выход с помощью атакующих действий траектории (1) на множество M_1^* – цель первого игрока, аналогично выход траектории (2) на множество M_2^* – цель второго игрока. В каждом случае это обозначает конец игры и выигрыш соответствующего игрока. Защитные ресурсы противника противодействуют этому.

Если игровое противостояние «атака – защита» происходит на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент t будем выбирать в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)),\ u(t) \in U_1, \tag{4}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t], v(s) \in V_2\}$ – предыстория управления второго игрока. Управление второго игрока при этом произвольное допустимое.

В ситуации «защита – атака» на интервале $[0, T]$ второй игрок в момент t выбирает управление в виде измеримой функции

$$v(t) = v(g(T), u_t(\cdot)),\ v(t) \in V_1, \tag{5}$$

где $u_t(\cdot) = \{u(s) : s \in [0, t], u(s) \in U_2\}$ – предыстория управления первого игрока.

При этом защитные действия первого игрока осуществляются произвольным допустимым управлением.

Цель исследования – установить для каждой из сторон достаточные условия выигрыша (выход соответствующей траектории на терминальное множество за меньшее время), а также условия ничейного результата (равное количество набранных очков за время игры).

Обозначим π_1 и π_2 операторы ортогонального проектирования из R^n на L_1 и L_2 соответственно.

Положим

$$\varphi_1(U_1, v) = \{\varphi_1(u, v) : u \in U_1\},\ v \in V_2,$$

$$\varphi_2(u, V_1) = \{\varphi_2(u, v) : v \in V_1\},\ u \in U_2,$$

введем многозначные отображения

$$W_1(t, \tau, v) = \pi_1 \Omega_1(t, \tau) \varphi_1(U_1, v),\ \tau \in G_1(t),\ v \in V_2,\ t \geq 0,$$

$$W_2(t, \tau, u) = \pi_2 \Omega_2(t, \tau) \varphi_2(u, V_1),\ \tau \in G_2(t),\ u \in U_2,\ t \geq 0$$

и будем предполагать, что они замкнутозначны [2].

Далее рассмотрим

$$W_1(t, \tau) = \bigcap_{v \in V_2} W_1(t, \tau, v),\ \tau \in G_1(t),$$

$$W_2(t, \tau) = \bigcap_{u \in U_2} W_2(t, \tau, v),\ \tau \in G_2(t)$$

и сформулируем аналоги условия Понтрягина [4] для каждой из противодействующих сторон.

Условие 1. Многозначное отображение $W_1(t,\tau)$ имеет непустые образы при $\tau \in G_1(t)$, $t \ge 0$.

Условие 2. Многозначное отображение $W_2(t,\tau)$ имеет непустые образы при $\tau \in G_2(t)$, $t \ge 0$.

Условия 1 и 2 фиксируют определенное преимущество атакующего арсенала игроков над защитными средствами противника.

При сделанных предположениях отображения $W_1(t,\tau)$ и $W_2(t,\tau)$ являются измеримыми по τ и поэтому в силу теоремы измеримого выбора [5] в них существуют измеримые по τ селекторы $\gamma_1(t,\tau)$, $\tau \in G_1(t)$ и $\gamma_2(t,\tau)$, $\tau \in G_2(t)$, при $t \ge 0$. С их помощью введем вспомогательные функции

$$\xi_i(t) = \pi_i g_i(t) + \int_{G_i(t)} \gamma_i(t,\tau)d\tau, \ t \ge 0, \ i = 1,2$$

и рассмотрим многозначные отображения

$$\mathcal{A}_1(t,\tau,v) = \left\{\alpha \ge 0 : \left[\pi_1\Omega_1(t,\tau)\varphi_1(U_1,v) - \gamma_1(t,\tau)\right] \cap \alpha\left[M_1 - \xi_1(t)\right] \ne \varnothing\right\},$$
$$\tau \in G_1(t), \ v \in V_2, \ t \ge 0,$$
$$\mathcal{A}_2(t,\tau,u) = \left\{\alpha \ge 0 : \left[\pi_2\Omega_2(t,\tau)\varphi_2(u,V_1) - \gamma_2(t,\tau)\right] \cap \alpha\left[M_2 - \xi_2(t)\right] \ne \varnothing\right\}, \qquad (6)$$
$$\tau \in G_2(t), \ u \in U_2 \ \ t \ge 0.$$

В силу условий 1 и 2 отображения $\mathcal{A}_1(t,\tau,v)$, $\mathcal{A}_2(t,\tau,v)$ обладают непустыми образами на областях своего определения.

Им соответствуют разрешающие функции [2, 3] противодействующих сторон

$$\alpha_1(t,\tau,v) = \sup\left\{\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_1(t,\tau,v)\right\}, \ \tau \in G_1(t), \ v \in V_2, \ t \ge 0,$$
$$\alpha_2(t,\tau,u) = \sup\left\{\alpha : \alpha \in \mathcal{A}_2(t,\tau,u)\right\}, \ \tau \in G_2(t), \ u \in U_2, \ t \ge 0. \qquad (7)$$

Данные скалярные функции – это опорные функции [6] многозначных отображений $\mathcal{A}_1(t,\tau,v)$, $\mathcal{A}_2(t,\tau,v)$ в направлении +1, так как образы последних являются числовыми множествами полуоси R_+. С другой стороны, упомянутые разрешающие функции являются обратными функционалами Минковского [1, 2] специальных многозначных отображений из формул (6).

В силу предположений о параметрах процессов (1) – (3) разрешающие функции (7) при фиксированном t являются $L \times B$-измеримыми [2] по совокупности переменных (τ,v) и (τ,u) соответственно в областях их определения.

Пусть $V_2(\cdot)$ $(U_2(\cdot))$ – совокупность измеримых функций со значениями из $V_2(U_2)$. В силу упомянутого свойства $L \times B$-измеримости разрешающие функции $\alpha_1(t,\tau,v)$ и $\alpha_2(t,\tau,u)$ являются суперпозиционно измеримыми [2] при любых $v(\cdot) \in V_2(\cdot)$, $u(\cdot) \in U_2(\cdot)$. Этот факт позволяет поставить им в соответствие множества

$$T_1 = T_1\left(g_1(\cdot), \gamma_1(\cdot,\cdot)\right) = \left\{ t > 0 : \inf_{v(\cdot)\in V_2(\cdot)} \int_{G_1(t)} \alpha_1(t,\tau,v(\tau))\,d\tau \geq 1 \right\},$$

$$T_2 = T_2\left(g_2(\cdot), \gamma_2(\cdot,\cdot)\right) = \left\{ t > 0 : \inf_{u(\cdot)\in U_2(\cdot)} \int_{G_2(t)} \alpha_2(t,\tau,u(\tau))\,d\tau \geq 1 \right\} \qquad (8)$$

и их наименьшие элементы

$$t_i = t_i\left(g_i(\cdot), \gamma_i(\cdot,\cdot)\right) = \inf\left\{ t : t \in T_i\left(g_i(\cdot), \gamma_i(\cdot,\cdot)\right)\right\}.$$

Поскольку $G_1(t) \cap G_2(t) = \varnothing$ для каждого $t > 0$, то $t_1 \neq t_2$.

Здесь в соотношениях (6) интегралы от разрешающих функций содержательно означают сумму набранных очков каждым из игроков за период атакующих действий, а если к тому же она превосходит заданное число (в данном случае единицу), то это означает достижение траекторией (1) или (2) соответствующего терминального множества или выигрыш игрока.

Если же для некоторого $t > 0$ и некоторого $i = 1,2$, $\xi_i(t) \in M_i$, то это в силу формул (6), (7) влечет за собой равенство

$$\alpha_1(t,\tau,v) = +\infty, \ \tau \in G_1(t), \ v \in V_2,$$

или

$$\alpha_2(t,\tau,v) = +\infty, \ \tau \in G_2(t), \ u \in U_2.$$

Содержательно это может означать, например, нокаут в боксе. В этом случае естественно положить значение интеграла в (8) равным $+\infty$, а неравенства в (8) выполнены автоматически и

$$t \in T_i\left(g_i(\cdot), \gamma_i(\cdot,\cdot)\right), \ i = 1,2.$$

В случае, когда одно из неравенств в (8) не выполняется при всех $t > 0$, положим соответствующее $T_i\left(g_i(\cdot), \gamma_i(\cdot,\cdot)\right) = \varnothing$, а $t_i\left(g_i(\cdot), \gamma_i(\cdot,\cdot)\right) = +\infty$.

Обозначим

$$\alpha_1(t) = \inf_{v(\cdot)\in V_2(\cdot)} \int_{G_1(t)} \alpha_1(t,\tau,v(\tau))\,d\tau,$$

$$\alpha_2(t) = \inf_{u(\cdot)\in U_2(\cdot)} \int_{G_2(t)} \alpha_2(t,\tau,u(\tau))\,d\tau.$$

Используя технику разрешающих функций [1 – 3] приходим к выводу.

Утверждение. Пусть задана игровая задача (1), (2) с двумя терминальными множествами цилиндрического вида (3) и взаимной информированностью (4), (5).

Тогда, если выполнены условия 1 и 2 и при выбранных селекторах $\gamma_1(t,\tau)$, $\gamma_2(t,\tau)$ множества T_1 и T_2 непусты и $t_1 < t_2$, то выигрывает первый игрок, при $t_2 < t_1$ – второй. При $T_1 \neq \varnothing$, а $T_2 = \varnothing$ выигрывает первый игрок, при $T_1 = \varnothing$, а $T_2 \neq \varnothing$ – второй.

Если длительность игры фиксирована и равна T, а $T_1 = T_2 = \varnothing$, то при $\alpha_1(T) > \alpha_2(T)$ выигрывает первый игрок, при $\alpha_2(T) > \alpha_1(T)$ – второй, а при $\alpha_1(T) = \alpha_2(T)$ фиксируется ничейный результат.

Замечание 1. Если отображения (6) являются выпуклозначными [2, 6], то результаты утверждения могут быть реализованы в классе контруправлений [1 – 3].

Замечание 2. В случае шарообразных или элипсоидальных областей управления игроков разрешающие функции (7) являются большими положительными корнями некоторых квадратных уравнений [1].

Замечание 3. Методы исследования игровых задач с двумя терминальными множествами находят свои приложения, в частности, при моделировании гонки вооружений [7], а также при исследовании моделей конкуренции фирм [8].

Выводы. Следует заметить, что если предоставить игрокам право самим выбирать моменты τ_i, то предложенная схема дает новые возможности для моделирования спортивных единоборств.

В.К. Чикрій

ПРО ОДНУ ІГРОВУ МОДЕЛЬ СПОРТИВНИХ ЄДИНОБОРСТВ

Розглядається ігрова задача про спортивні єдиноборства. На основі методу розв'язуючих функцій встановлені достатні умови виграшу кожного гравця в термінах параметрів конфліктно-керованого процесу.

V.K. Chikriy

ONE GAME MODEL OF THE SPORT SINGLE COMBAT

A game problem on the sport single combat is explored on the basis of the method of resolving functions. Sufficient conditions for winning of each of the players are established, expressed in the terms of parameters of the conflict-controlled process under study.

1. *Chikrii A.A.* Conflict–Controlled Processes. – Springer Science and Busines Media. – 2013. – 424 p.
2. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 4. – С. 40 – 64.
3. *Чикрий А.А., Чикрий В.К.* Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управления движением // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 2. – С. 65 – 78.
4. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – **2**. – 576 с.
5. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. – Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. – 461 p.
6. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
7. *Михалевич В.С., Кунцевич В.М.* Об одном подходе к исследованию процесса управления уровнями вооружений. – Киев. – 1989. – 25 с. – (Препр. Института кибернетики АН Украинской ССР; № 89).
8. *Красс И.А.* Конфликтное взаимодействие двух линейных экономических моделей // Управляемые системы. – Новосибирск, 1969. – № 2. – С. 20 – 31.

Получено 24.03.2016