УДК 620.178.5:620.179

Влияние неупругого сопротивления на вибродиагностические параметры наличия закрывающейся трещины в упругом теле при супергармоническом резонансе

В. В. Матвеев, О. Е. Богинич

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрены методы приближенного определения вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины усталости нормального отрыва в упругом теле с учетом различных видов неупругого сопротивления при супергармоническом резонансе 2-го порядка.

Ключевые слова: колебания нелинейных систем, вибродиагностика усталостного повреждения, закрывающаяся трещина, супергармонический резонанс, виды неупругого сопротивления.

Введение. Анализ известных литературных источников свидетельствует о продолжающемся интересе к изучению влияния трещин усталости на параметры колебаний упругих тел, на основе которого разрабатываются методы вибродиагностики наличия таких повреждений [1–3]. Весомое место в исследованиях занимают вопросы, связанные с определением параметров спектра колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной усталости нормального отрыва в области суб- и супергармонического резонансов. Однако как при аналитических, так и численных решениях этих задач, как правило, рассматриваются модели упругих тел с линейным вязким трением. Проведенный ранее [2] анализ колебаний одномассовой модели упругого тела с закрывающейся трещиной в области субгармонического резонанса показал существенное влияние вида неупругого сопротивления на вибродиагностические параметры наличия трещины. Поэтому цель данного исследования заключается в определении возможного влияния вида неупругого сопротивления на вибродиагностические параметры наличия в упругом теле закрывающейся трещины при супергармоническом резонансе 2-го порядка с помощью простых аналитических методов решения для случая системы с линейным вязким трением [4] при некотором уточнении их результатов.

Исходные расчетные зависимости. В работах [4, 5] для относительно малых размеров трещины упругое тело при данной резонирующей форме его колебаний представлено системой с одной степенью свободы с билинейной характеристикой восстанавливающей силы, вынужденные колебания которой при гармоническом возбуждении в зоне резонанса описываются уравнением вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + f\left(u, \frac{du}{dt}\right) + \omega^2[1 - 0{,}5\alpha(1 + \operatorname{sign} u)]\,u = q \sin \nu t \qquad (1)$$

при функции неупругого сопротивления

$$f\left(u, \frac{du}{dt}\right) = 2h\frac{du}{dt}. \qquad (2)$$

Здесь ω – собственная частота колебаний неповрежденного тела, или тела с закрытой трещиной; h – коэффициент вязкого трения; α – относительное изменение жесткости или квадрата собственной частоты упругого тела при открытии трещины,

$$\alpha = 1 - \left(\frac{\omega_{\text{т}}}{\omega}\right)^2, \tag{3}$$

где $\omega_{\text{т}}$ – собственная частота тела при открытой трещине; собственная частота колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной определяется по формуле

$$\omega_0 = \frac{2\omega\omega_{\text{т}}}{\omega + \omega_{\text{т}}} = \frac{2\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}\,\omega \approx \sqrt{1 - 0{,}5\alpha}\,\omega. \tag{4}$$

Рассматривается супергармонический резонанс 2-го порядка при $\nu = 1/2\omega_0$.

Исходя из принятого положения, что при супергармоническом резонансе кроме основной гармоники вынужденных колебаний $A_1 \sin(\nu t - \gamma_1)$ возникают колебания со спектром гармонических составляющих свободных колебаний, из которых вследствие пренебрежимо малых амплитуд высших гармоник в конечном итоге учитывается только основная резонирующая гармоника $A_2 \sin(2\nu t - \gamma_2)$, решение уравнения (1) отыскивается в виде

$$u(t) = A_0 + A_1 \sin(\nu t - \gamma_1) + A_2 \sin(2\nu t - \gamma_2). \tag{5}$$

Для нахождения характерного вибродиагностического параметра наличия закрывающейся трещины $\overline{A}_2 = A_2 / A_1$ был использован простой прямой способ удовлетворения уравнения (1) решению (5) в моменты известного значения восстанавливающей силы.

При этом рассматриваются вынужденные колебания в области слабого $(A_2 < A_1)$ и сильного $(A_2 > A_1)$ резонансов.

В первом случае уравнение (1) удовлетворяется на каждом полуцикле первой гармоники в моменты времени [4]

$$t_1' = \frac{\beta + \gamma_1}{\nu}; \qquad t_1'' = \frac{\pi - (\beta - \gamma_1)}{\nu};$$

$$t_2' = \frac{\pi + (\beta + \gamma_1)}{\nu}; \qquad t_2'' = \frac{2\pi - (\beta - \gamma_1)}{\nu}.$$

Используется одно значение β, выбираемое в интервале $0 < \beta < \pi/2$, и принимается, что в уравнении (1) $\operatorname{sign} u \equiv \operatorname{sign}[\sin(\nu t_{1,2}' - \gamma_1);\ \sin(\nu t_{1,2}'' - \gamma_1)]$.

Подставив для выбранных моментов времени решение (5) в (1), получим систему четырех исходных уравнений (1′), (1″), (2′), (2″), обозначаемых в соответствии с индексом указанных моментов времени.

В результате почленного алгебраического суммирования уравнений $[(1') - (1'')] - [(2') - (2'')]$ имеем

$$-\alpha \sin 2\beta \cos \Delta\gamma A_2 + 4h\frac{\nu}{\omega^2} A_1 \cos\beta = 2\frac{q}{\omega^2}\cos\beta \sin\gamma_1.$$

Заменяя тригонометрические функции угла β их средними значениями на интервале его изменения от 0 до $\pi/2$ и определяя $\sin\gamma_1$ из условия баланса подводимой энергии по первой гармонике и поглощаемой энергии по первой и второй гармоникам

$$\pi q A_1 \sin\gamma_1 = 2\pi h \nu (1 + 4\overline{A}_2^2) A_1^2, \tag{6}$$

найдем

$$\overline{A}_2 = \frac{\alpha\omega^2}{16h\nu}\cos\Delta\gamma, \tag{7}$$

где $\Delta\gamma = \gamma_2 - 2\gamma_1$ определяется из алгебраической суммы уравнений $[(1') - (1'')] + [(2') - (2'')]$

$$\Delta\gamma = \operatorname{arctg}\frac{2-\alpha-8(\nu/\omega)^2}{8h(\nu/\omega^2)}.$$

Анализ значений $\Delta\gamma$ при рассматриваемом слабом резонансе ($\overline{A}_2 < 1$) показывает, что $\cos\Delta\gamma \approx 1$. Следует заметить, что в формуле (6) коэффициент вязкого трения h определяет демпфирование колебаний по второй, резонирующей гармонике с частотой ω_0, и его значение удобно выразить через логарифмический декремент свободных колебаний δ с помощью соотношения

$$\frac{h}{\omega}\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\delta}{2\pi}. \tag{8}$$

Тогда для настроенного слабого супергармонического резонанса $\left(\nu = \frac{1}{2}\omega_0\right)$ получим простую формулу для определения вибродиагностического параметра

$$\overline{A}_2 \approx 0{,}785\frac{\alpha}{\delta}. \tag{9}$$

В случае сильного резонанса ($\overline{A}_2 > 1$) уравнение (1) удовлетворяется на каждом полуцикле резонирующей, т.е. второй, гармоники в моменты времени [5]

$$t_1' = \frac{\beta+\gamma_2}{2\nu}; \qquad t_1'' = \frac{\pi-\beta+\gamma_2}{2\nu}; \qquad t_2' = \frac{\pi+\beta+\gamma_2}{2\nu}; \qquad t_2'' = \frac{2\pi-\beta+\gamma_2}{2\nu};$$

$$t_3' = \frac{2\pi+\beta+\gamma_2}{2\nu}; \qquad t_3'' = \frac{3\pi-\beta+\gamma_2}{2\nu}; \qquad t_4' = \frac{3\pi+\beta+\gamma_2}{2\nu}; \qquad t_4'' = \frac{4\pi-\beta+\gamma_2}{2\nu}$$

на периоде $T = 2\pi/\nu$ при одном значении β в интервале $0 < \beta < \pi/2$ и $\operatorname{sign} u \equiv \operatorname{sign}[\sin(\nu t'_{1,2,3,4} - \gamma_2); \sin(\nu t''_{1,2,3,4} - \gamma_2)]$. В итоге имеем восемь исходных уравнений (1′), (1″), (2′), (2″), (3′), (3″), (4′), (4″) [5].

Из рассмотрения алгебраических сумм уравнений

$$\{[(1') + (4'')] - [(1'') + (4')]\} + \{[(2') + (3'')] - [(2'') + (3')]\}$$

и

$$\{[(1') - (4'')] - [(1'') - (4')]\} - \{[(2') - (3'')] - [(2'') - (3')]\}$$

при настроенном резонансе $\left(\nu = \frac{1}{2}\omega_0\right)$ соответственно получим

$$\left[(2-\alpha) - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\sin\Delta\gamma + \left(\alpha + 2h\frac{\omega_0}{\omega^2}\right)\cos\Delta\gamma = \frac{2q_0}{\omega^2 A_1}\sin\frac{\gamma_2}{2}; \tag{10a}$$

$$\left[(2-\alpha)-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\cos\Delta\gamma+\left(\alpha-2h\frac{\omega_0}{\omega^2}\right)\sin\Delta\gamma=\frac{2q_0}{\omega^2 A_1}\cos\frac{\gamma_2}{2}, \qquad (10б)$$

где $\Delta\gamma=\dfrac{\gamma_2}{2}-\gamma_1$.

Используя для тригонометрических функций правой части соотношение $\dfrac{\gamma_2}{2}=$ $=\Delta\gamma+\gamma_1$ и определяя $\sin\gamma_1$ из условия (6) при принятии с достаточным приближением $\cos\gamma_1\approx 1$, найдем выражение для основного вибродиагностического параметра

$$\overline{A}_2=\frac{\alpha\omega^2}{8h\omega_0}\cos 2\Delta\gamma, \qquad (11)$$

где

$$\cos 2\Delta\gamma=\sqrt{1-\left(1-\frac{0{,}5}{\alpha}\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\right)^2}. \qquad (12)$$

При этом, поскольку коэффициент вязкого трения h в формуле (11), как и в (7), определяет демпфирование колебаний по резонирующей гармонике, используем также соотношение (8).

Анализ формулы (11) в интервале приемлемых значений $\alpha=0{,}001\ldots0{,}3$ показывает, что отклонение $\cos\Delta\gamma$ от величины 0,6783, соответствующей среднему значению $\alpha=0{,}15$, не превышает $\pm3\%$, и для практических расчетов можно принять

$$\overline{A}_2\approx 0{,}725\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}. \qquad (13)$$

Таким образом, полученные приближенные решения для существенно нелинейной системы определяют весьма простые зависимости вибродиагностического параметра наличия в упругом теле закрывающейся трещины от отношения характерных параметров нелинейности α и демпфирующей способности δ колебательной системы. При этом четко выявляется различие в характере зависимости $\overline{A}_2(\alpha/\delta)$ при слабом (9) и сильном (13) супергармоническом резонансе. Здесь необходимо заметить, что для отношения α/δ должно быть ограничение по значению параметра $\alpha\le 0{,}3$. Это обусловлено тем, что используемое моделирование упругого тела системой с одной степенью свободы предполагает наличие относительно малых трещин, позволяющих пренебречь некоторым различием между собственными формами колебаний на полуциклах деформирования тела с закрытой и открытой трещиной.

Амплитуда основных вынужденных колебаний A_1 как при слабом, так и сильном резонансах определяется с достаточным приближением из рассмотрения колебаний линеаризованной системы с собственной частотой ω_0 при частоте возбуждения $\nu=\dfrac{1}{2}\omega_0$:

$$A_1\approx\frac{4q}{3\omega_0^2}. \qquad (14)$$

Прежде чем перейти к анализу влияния различных видов неупругого сопротивления на вибродиагностические параметры, оценим достоверность полученных зависимостей (9), (13) и формулы (14) на примере системы с вязким трением при $h = 0{,}0016$ с$^{-1}$ (соответственно $\delta \approx 0{,}01$), $\omega = 1$ с$^{-1}$ и $q = 1$мм/с^2. Результаты расчета сравним с данными численного решения уравнения (1), выполненного с использованием метода Рунге-Кутта [6] с последующим преобразованием Фурье.

На рис. 1 представлены искомые зависимости A_1 и $\overline{A}_2$ от параметра α для случая слабого резонанса. Как видно, расчетное значение амплитуды первой, основной гармоники вынужденных колебаний (14) хорошо согласуется с данными численного решения, но для вибродиагностического параметра (9) наблюдается заметное расхождение, возрастающее с увеличением α. Это обусловлено тем, что с приближением значения $\overline{A}_2$ к единице, т.е. A_2 к A_1, все более уязвимо принятое для определения билинейной восстанавливающей силы допущение $\operatorname{sign} u \equiv \operatorname{sign}[\sin(\nu t'_{1,2} - \gamma_1);\ \sin(\nu t''_{1,2} - \gamma_1)]$, так как изменение знака суммарного перемещения за период первой гармоники будет определяться еще и изменением знака перемещения второй гармоники (рис. 2). Корректировка в формуле (9) коэффициента пропорциональности на 0,58, т.е.

$$\overline{A}_2 \approx 0{,}58\frac{\alpha}{\delta}, \tag{15}$$

дает хорошее согласование результатов для $\overline{A}_2 \le 0{,}9$. При этом условие $\overline{A}_2 \le 0{,}9$ определяет диапазон значений отношения $\alpha/\delta \le 1{,}56$ для разной величины δ при отмеченном ранее ограничении $\alpha < 0{,}3$.

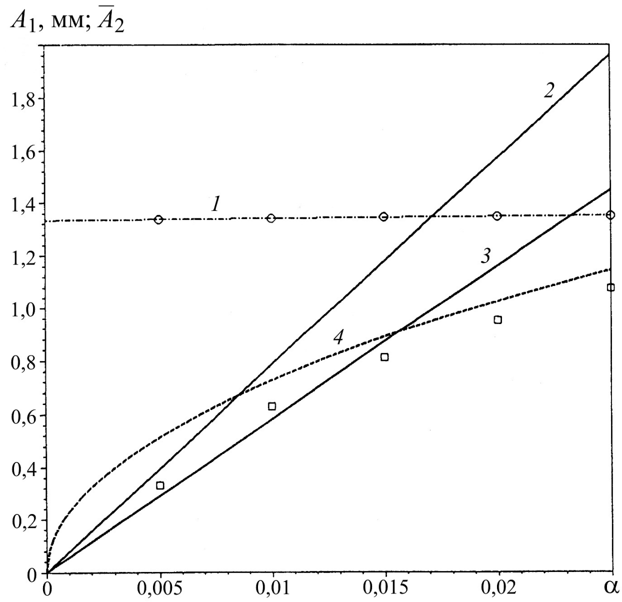


Рис. 1. Зависимость амплитуды первой гармоники A_1 и относительной амплитуды резонирующей гармоники $\overline{A}_2$ от параметра α, рассчитанная при $\omega = 1$ с$^{-1}$, $q = 1$ мм/с^2, $\delta = 0{,}01$ по формулам (14) – кривая *1*, (9) – кривая *2*, (15) – кривая *3* и (13) – кривая *4*. (Здесь и на рис. 3 и 4: точки – данные численного решения уравнения (1).)

Для сильного резонанса ($\overline{A}_2 > 1$) наблюдается иная картина. В качестве примера на рис. 3 представлены зависимости параметра $\overline{A}_2$ и амплитуд первой A_1 и резонирующей $A_2 = \overline{A}_2 A_1$ гармоник от α, полученные путем расчета и по данным численного решения. Как видно, имеет место полное соответствие результатов. Более

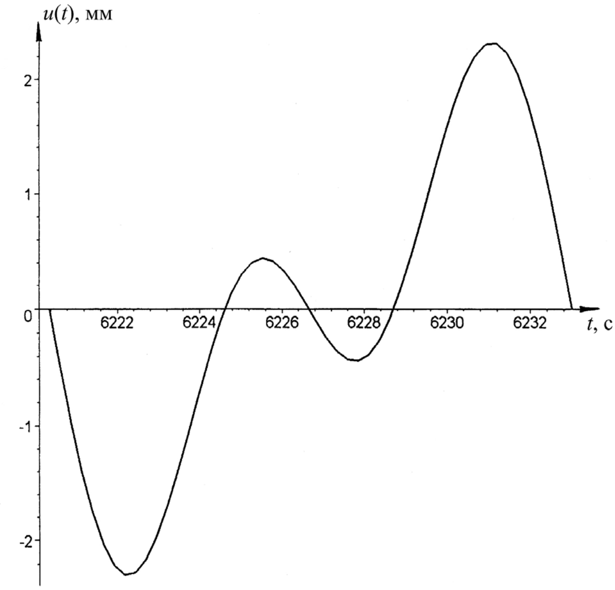


Рис. 2. Форма цикла установившихся колебаний при супергармоническом резонансе ($\overline{A}_2 = 0{,}953$).

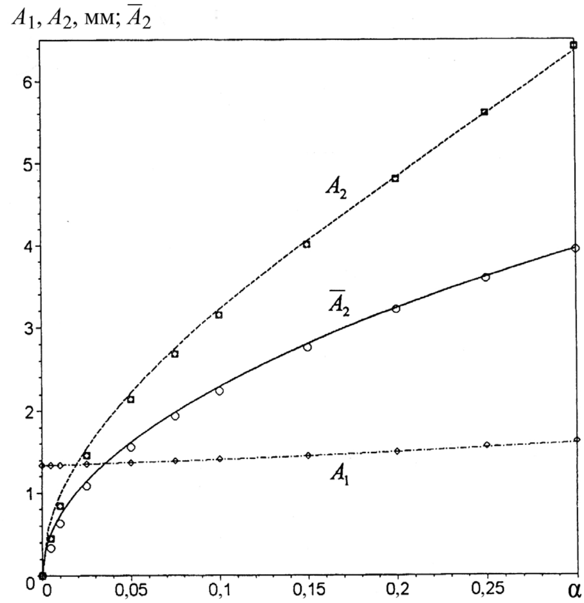


Рис. 3. Зависимость амплитуды первой гармоники A_1, абсолютной A_2 и относительной $\overline{A}_2$ амплитуды резонирующей гармоники от параметра α, рассчитанная при $\omega = 1\ \text{с}^{-1}$, $q = 1\ \text{мм/с}^2$, $\delta = 0{,}01$.

того, по формуле (13) получено лучшее согласование с численным решением и в области слабого резонанса для $0{,}9 < \overline{A}_2 \le 1$, т.е. при $\alpha/\delta \ge 1{,}6$ (на рис. 1 расчетная зависимость по формуле (13) показана штриховой линией). Численные решения практически подтвердили также независимость диагностического параметра $\overline{A}_2$ от уровня возбуждающей нагрузки и абсолютных значений α и δ при сохранении их отношения.

Влияние вида неупругого сопротивления. Полученные расчетные зависимости (13) и (15) для системы с линейным вязким трением, т.е. при функции неупругого сопротивления $f\left(u, \frac{du}{dt}\right)$ вида (2), можно применить также в случае других ее видов при использовании энергетического подхода к определению декремента δ через коэффициент поглощения $\psi = 2\delta$.

Коэффициент ψ, или относительное рассеяние энергии за цикл резонирующей гармоники $u(t) = A_2 \sin\varphi$, где $\varphi = \omega_0 t - \gamma_2$, является функцией частоты ω_0 и амплитуды A_2,

$$\psi(\omega_0, A_2) = \frac{\int_0^{2\pi} f(A_2 \sin\varphi, \omega_0 A_2 \cos\varphi)\cos\varphi d\varphi}{0{,}5\omega_0^2 A_2}. \qquad (16)$$

Рассмотрим наиболее характерные виды неупругого сопротивления, для которых функции $f\left(u, \frac{du}{dt}\right)$ и соответствующие им значения коэффициента поглощения приведены в таблице.

Виды неупругого сопротивления и соответствующие им значения коэффициента поглощения

Вид неупругого сопротивления	$f\left(u, \frac{du}{dt}\right)$	$\psi(\omega_0, A_2)$
Нелинейное вязкое трение	$2h_n\left\|\frac{du}{dt}\right\|^{n-1} \frac{du}{dt}$	$8h_n\omega_0^{n-2} A_2^{n-1}\phi(n)$ $\phi(n) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}\varphi d\varphi$
Эллиптическая петля гистерезиса	$\omega_0^2 \frac{k}{\pi} A_2^n \sqrt{1 - \frac{u^2}{A_2^2}} \operatorname{sign}\frac{du}{dt}$	$2kA_2^{n-1}$
Гипотеза Давиденкова ($n > 1$)	$\mp \omega_0^2 \frac{\eta}{n}[(A_2 \pm u)^n - 2^{n-1} A_2^n]$	$\frac{2^{n+2}(n-1)\eta_n}{n(n+1)} A_2^{n-1}.$

Как видно, для всех видов неупругого сопротивления характерна амплитудная зависимость коэффициента поглощения, которую удобно представить единой зависимостью, соответствующей эллиптической петле гистерезиса при условии

$$k = 4h_n\omega_0^{n-2}\phi(n) = \frac{2^{n+1}(n-1)\eta_n}{n(n+1)}. \qquad (17)$$

Используя выражения (13)–(15) при замене $\delta = \frac{1}{2}\psi(\omega_0, A_2)$, найдем следующие единые формулы для определения вибродиагностического параметра $\overline{A}_2$ и амплитуды резонирующей гармоники $A_2 = \overline{A}_2 A_1$:

$$\overline{A}_2 = \sqrt[n]{0{,}58\frac{\alpha}{k}\left(\frac{3\omega_0^2}{4q}\right)^{n-1}}; \qquad A_2 = \sqrt[n]{0{,}7733\frac{\alpha q}{k\omega_0^2}} \qquad (18)$$

в случае слабого и

$$\overline{A}_2 = \sqrt[n+1]{0{,}5256\frac{\alpha}{k}\left(\frac{3\omega_0^2}{4q}\right)^{n-1}}; \qquad A_2 = \sqrt[n+1]{0{,}9344\frac{\alpha}{k}\left(\frac{q}{\omega_0^2}\right)^2} \tag{19}$$

в случае сильного супергармонического резонанса.

Формулы для слабого резонанса следует использовать только при

$$\frac{\alpha}{k} < \frac{0{,}5256^n}{0{,}58^{n+1}}\left(\frac{4\omega_0^2}{3q}\right)^{n-1}. \tag{20}$$

При $n=1$ и соответственно $k \equiv \delta$ имеем ранее приведенное условие $\alpha/\delta < 1{,}56$.

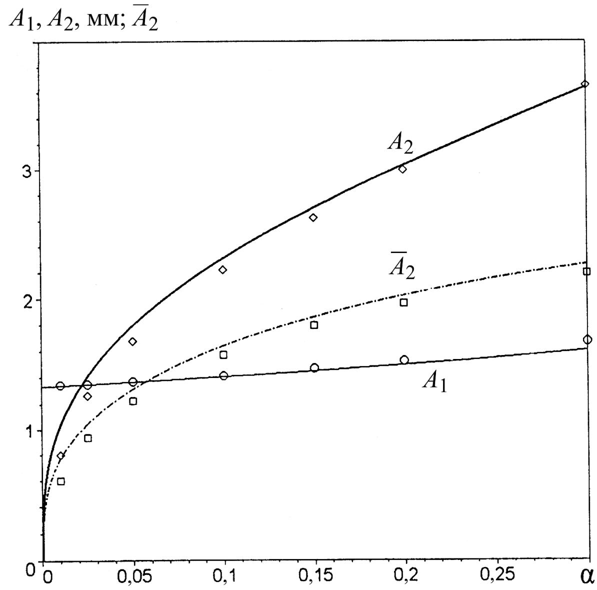


Рис. 4. Зависимость амплитуды первой гармоники A_1, абсолютной A_2 и относительной $\overline{A}_2$ амплитуды резонирующей гармоники от параметра α для случая нелинейного вязкого трения ($n = 2$).

Оценим достоверность полученных зависимостей на примере сильного резонанса системы с нелинейным вязким трением при $n = 2$, т.е. при $k = 4h_2\phi(2)$ и

$$\overline{A}_2 = 0{,}42\sqrt[3]{\frac{\alpha\omega_0^2}{h_2 q}}; \qquad A_2 = 0{,}56\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{h_2\omega_0^4}}. \tag{21}$$

На рис. 4 для случая $\omega = 1$ с$^{-1}$, $q = 1$ мм/с^2 и $h_2 = 0{,}0016$ мм$^{-1}$ представлены расчетные зависимости A_1, A_2 и $\overline{A}_2$ от параметра α и данные численного решения уравнения (1). Как видно, имеет место хорошее согласование результатов. При этом численные решения подтверждают следующую из формул (21) независимость амплитуд $\overline{A}_2$ и A_2 от абсолютных значений α и h_2, а также q и ω при сохранении постоянным их отношения.

Для наглядного представления влияния амплитудной зависимости коэффициента поглощения (16) на вибродиагностический параметр наличия закрывающейся трещины $\overline{A}_2$ рассмотрим результаты расчета при выборе параметра k (17) из условия равенства максимальной амплитуды колебаний при основном резонансе ($\nu = \omega_0$) таковой при линейном вязком трении:

$$k = 2^n \pi h^n \frac{\omega_0^{n-2}}{q^{n-1}}. \tag{22}$$

В этом случае при какой-либо амплитуде возбуждающей силы q с использованием (18) и (19) находим

$$\overline{A}_2 = \frac{3\omega_0}{8h} \sqrt[n]{0{,}2462\alpha} \tag{23}$$

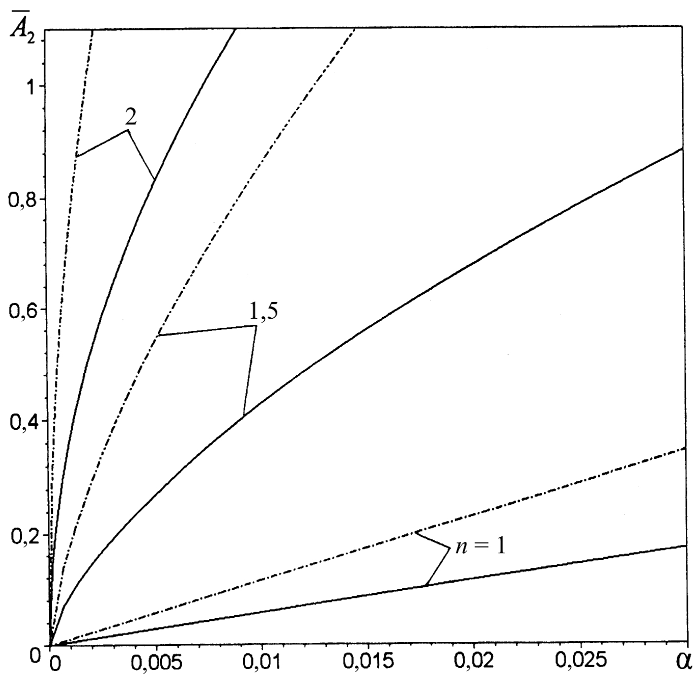
для слабого и

$$\overline{A}_2 = \frac{3\omega_0}{8h} \sqrt[n+1]{0{,}5949\alpha \frac{h}{\omega_0}} \tag{24}$$

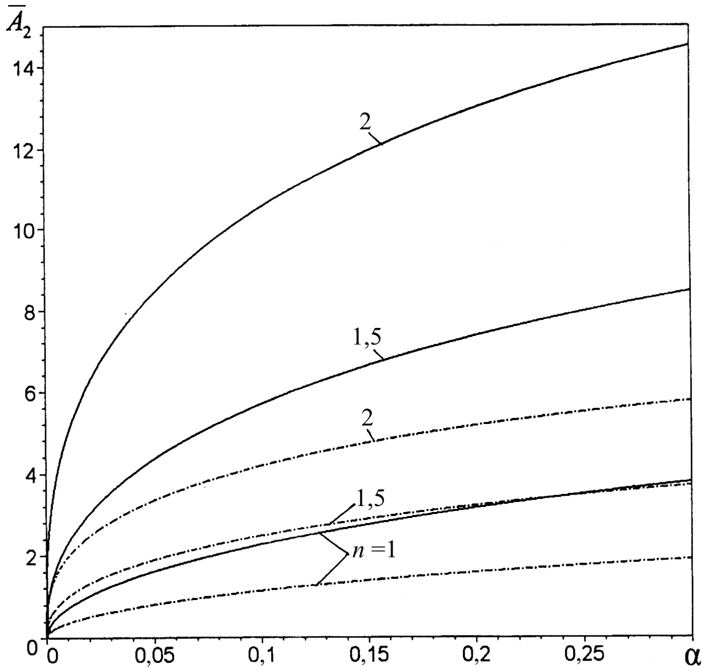
для сильного суперрезонанса.

При $n = 1$ и соответственно $h/\omega_0 = \delta/(2\pi)$ получим одну из формул (13) или (15) при условии использования последней при $\alpha/\delta < 1{,}56$.

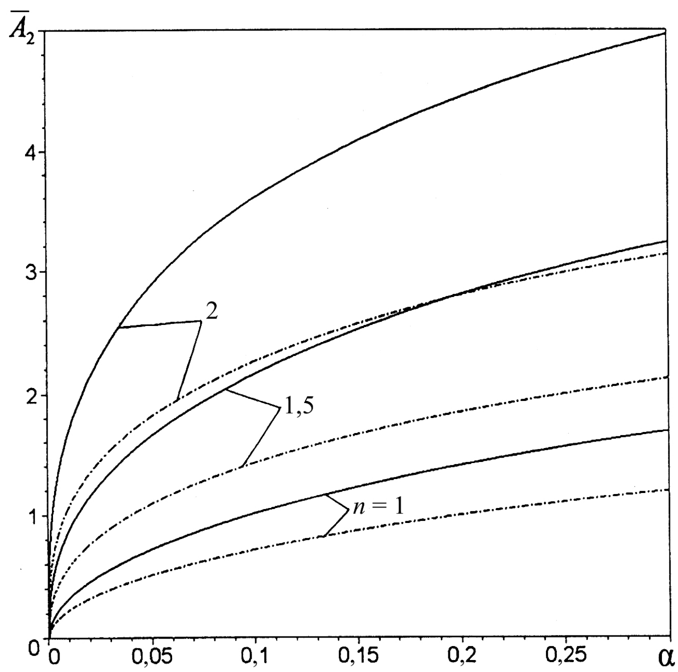
В качестве примера на рис. 5 показаны расчетные зависимости $\overline{A}_2(\alpha)$ по формулам (23) и (24) при разных значениях n и h/ω_0. Как видно, при наличии амплитудной зависимости декремента колебаний, характерной для элементов конструкций из металлических материалов ($n > 1$), чувствительность параметра $\overline{A}_2$ существенно возрастает с увеличением показателя степени n.



а



б



в

Рис. 5. Зависимость относительной амплитуды резонирующей гармоники $\overline{A}_2(\alpha)$, рассчитанная по формулам (23) – (*а*) и (24) – (*б*, *в*) при разных значениях n и h/ω_0: *а* – $h/\omega_0 = 0{,}008$ (штрихпунктирные линии), 0,016 (сплошные линии); *б* – $h/\omega_0 = 0{,}0016$ (сплошные линии), 0,0064 (штрихпунктирные линии); *в* – $h/\omega_0 = 0{,}008$ (сплошные линии), 0,016 (штрихпунктирные линии).

По-видимому, определенный интерес может представить сравнение чувствительности вибродиагностических параметров наличия трещины при исследуемом супергармоническом резонансе ($\overline{A}_2$) и рассмотренном ранее субгармоническом резонансе порядка 1/2, т.е. при $\nu = 2\omega_0$ ($\overline{A}_{1/2}$) [2]. Параметр $\overline{A}_{1/2}$, равный отношению амплитуд первой резонирующей гармоники и основной гармоники вынужденных колебаний, определяется при принятом условии (22) по формуле

$$\overline{A}_{1/2} = \frac{2\alpha(1+0{,}6\alpha)\omega_0 \left(\dfrac{9\pi}{4\alpha(1+0{,}6\alpha)}\right)^{(n-1)/n}}{3\pi h \sqrt{1+\left[\dfrac{3\omega_0}{4h}\left(\dfrac{4\alpha(1+0{,}6\alpha)}{9\pi}\right)^{(n+1)/n}\right]^2}}. \qquad (25)$$

На рис. 6,*а* в качестве примера приведены зависимости $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_{1/2}$ от параметра α при разных показателях степени n и $h/\omega_0 = 0{,}0064$. Как видно, при всех значениях n более чувствительным является параметр $\overline{A}_{1/2}$. Однако картина существенно меняется, если рассматривать не амплитуды перемещения A, а ускорения A^a, так как в этом случае $\overline{A}_2^a = 4\overline{A}_2$, а $\overline{A}_{1/2}^a = \dfrac{1}{4}\overline{A}_{1/2}$ (рис. 6,*б*). При этом отношение абсолютных значений амплитуд резонирующих гармоник при супер- (A_2) и субгармоническом (A_1) резонансах не изменяется:

$$\frac{A_2^a}{A_1^a} = \frac{A_2}{A_1} = 4\frac{\overline{A}_2}{\overline{A}_{1/2}} = \frac{1}{4}\frac{\overline{A}_2^a}{\overline{A}_{1/2}^a}.$$

О связи интегральной характеристики повреждения α с параметрами трещины в упругом теле. В качестве примера рассмотрим изгибные колебания консольной балки прямоугольного поперечного сечения с краевой поперечной трещиной при возбуждении супергармонического резонанса 2-го порядка первой формы колебаний сосредоточенной гармонической силой, приложенной к ее свободному концу (рис. 7). Параметр α определим через энергетическую характеристику повреждения балки κ:

$$\alpha = \frac{\kappa}{1+\kappa}, \qquad (26)$$

зависимость которой от относительной глубины трещины $\gamma = a/h$ при данном ее местоположении $x_т$ согласно [3] можно записать в виде

$$\kappa = 6\pi H \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)_{x=x_т} \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\dfrac{d^2 y_i}{dx^2}\right)_{x=x_т}}{\int\limits_0^l \left(\dfrac{d^2 y_1}{dx^2}\right)_{x=x_т}} B_1(\gamma), \qquad (27)$$

где

$$B_1(\gamma) = 0{,}078[(1-\gamma)^{-2} + 0{,}5(1-\gamma)^4 - 1{,}5]; \qquad (28)$$

y_i – амплитудная функция прогиба цельной балки по *i*-й форме вынужденных колебаний при частоте возбуждения ν, равной половине первой собственной частоты балки ω_1 ($\nu = (1/2)\omega_1$),

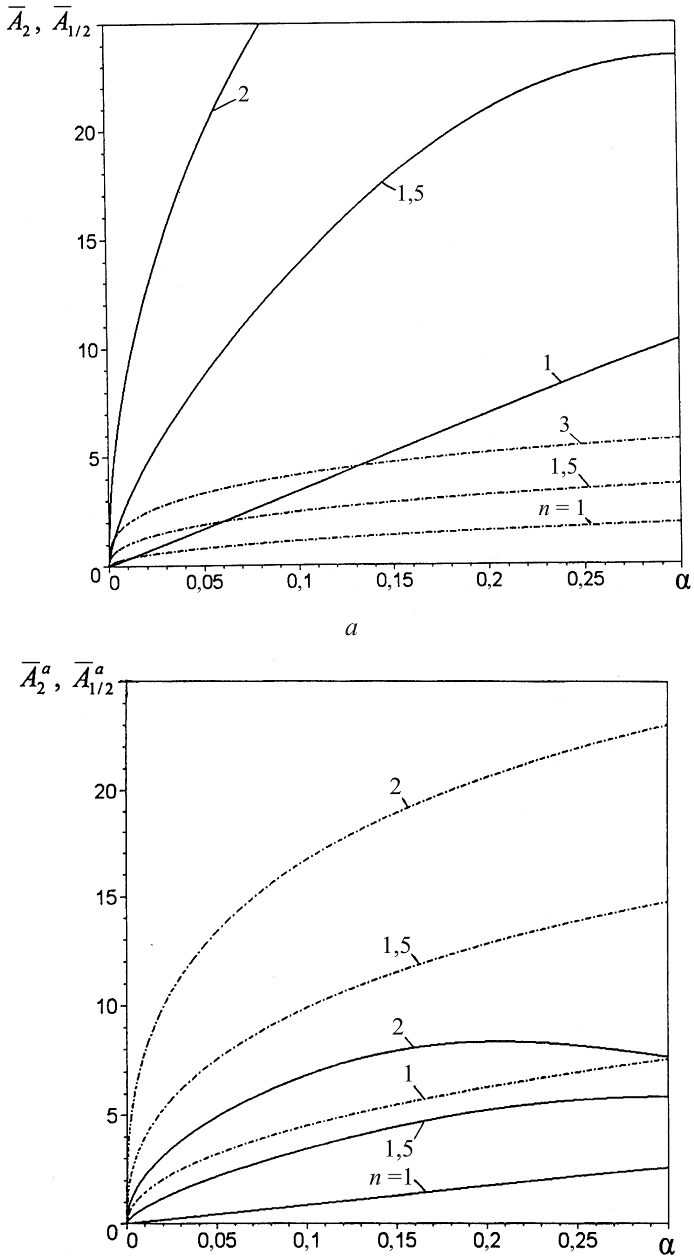


Рис. 6. Зависимость $\bar{A}_2$, $\bar{A}_{1/2}$ (*а*) и $\bar{A}_2^a$, $\bar{A}_{1/2}^a$ (*б*) от параметра α при $h = 0{,}0064$ и разных значениях показателя степени n ($\bar{A}_2$ и $\bar{A}_2^a$ показаны штрихпунктирными линиями).

$$y_i(x) = \frac{Pl^4}{EI(k_1 l)^4} X_i(l) X_i(x) \beta_i; \tag{29}$$

$$X_i(x) = \sqrt{l^{-1}}\left[(\mathrm{ch}\, k_i x - \cos k_i x) - \frac{(\mathrm{ch}\, k_i l + \cos k_i l)}{(\mathrm{sh}\, k_i l + \sin k_i l)}(\mathrm{sh}\, k_i x - \sin k_i x)\right];$$

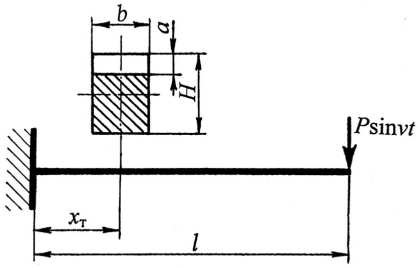


Рис. 7. Схема консольной балки с краевой поперечной трещиной.

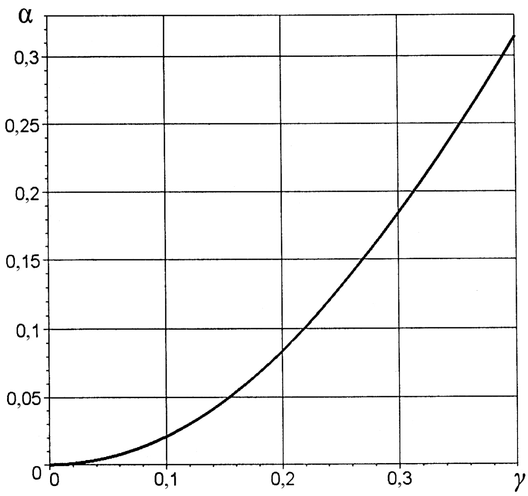


Рис. 8. Зависимость параметра нелинейности балки α от относительной глубины трещины γ при $x_т = 0{,}1l$.

$$\beta_i = \left[\left(\frac{k_i l}{k_1 l} \right)^4 - \frac{1}{4} \right]^{-1};$$

$k_i l$ – i-й корень частотного уравнения; $k_1 l = 1{,}875$.

На рис. 8 показана соответствующая формуле (27) зависимость $\alpha(\gamma)$ для балки при $H = 0{,}5$ м, $l = 6$ м и $x_т = 0{,}1l$.

В заключение определим зависимость вибродиагностического параметра наличия трещины в балке $\overline{A}_{2b}$ от α и γ. Найденное по (26), (27) значение α для конкретных γ и $x_т$ может быть использовано в любой из формул для $\overline{A}_2$, но при некотором их уточнении. Это обусловлено тем, что приведенные формулы получены из рассмотрения системы с одной степенью свободы, которая моделирует упругое тело при его колебаниях по одной интересующей j-й резонирующей собственной форме. В этом случае гармоника основных вынужденных колебаний, как и резонирующая гармоника, соответствует колебаниям тела только по этой форме. В результате этого в отношении $A_2/A_1 = \overline{A}_2$ амплитуда A_1 определяет значение амплитудной функции $y_j(x)$ в каком-либо выбранном сечении $x = x_0$. А гармоника основных вынужденных колебаний балки включает ее деформирование по всем возбуждаемым на этой частоте формам колебаний, т.е. амплитуда A_1 соответствует суммарному прогибу в данном сечении $\sum_{i=1}^{N} y_i(x_0)$.

Поэтому определяемые по приведенным ранее формулам для $\overline{A}_2$ значения $\overline{A}_{2b}$ следует скорректировать введением сомножителя $y_j(x_0) \Big/ \sum\limits_{i=1}^{N} y_i(x_0)$ и в рассматриваемом примере балки ($j=1$):

$$\overline{A}_{2b} = \overline{A}_2 \frac{y_1(x_0)}{\sum\limits_{i=1}^{N} y_i(x_0)}. \tag{30}$$

Заметим, что в формулах (18), (19), в отличие от (13), (15) для линейного вязкого трения или амплитудно-независимого рассеяния энергии ($n=1$, $k=\delta$) значение параметра $\overline{A}_2$ определяется не только величинами α и k, но и отношением q/ω_0^2, где $q = P/m$; m – масса единицы длины балки; ω_0 – круговая собственная частота в данном случае первой, резонирующей формы колебаний, вычисляемая по формуле (4) при $\omega \equiv \omega_1 = \frac{(k_1 l)^4}{l^4}\sqrt{\frac{EI}{m}}$.

На рис. 9 представлена полученная с использованием формул (21) и (30) зависимость вибродиагностического параметра $\overline{A}_{2b}$ от параметра α и относительной глубины трещины γ в балке, соответствующая показанной на рис. 8 связи между параметрами α и γ, в случае нелинейного вязкого трения ($n=2$) при $h_2 q/\omega_1^2 =$ $= 0{,}0016$ и $0{,}008$. Там же приведены зависимости для линейного вязкого трения при $h/\omega_0 = 0{,}0016$. Выделенные на рис. 9 для этого случая точки на уровне значений $\gamma = 0{,}1$ и $0{,}2$ соответствуют данным численного решения, полученного с использованием конечноэлементной модели стержня с закрывающейся трещиной [7].

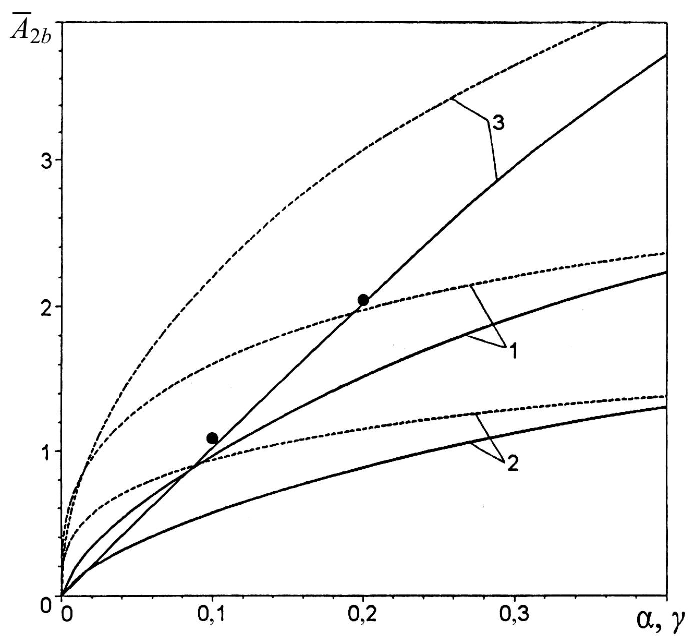


Рис. 9. Расчетная зависимость $\overline{A}_{2b}$ от параметра α (штриховые линии) и относительной глубины γ (сплошные линии) краевой поперечной трещины в балке при $h_2 q/\omega_1^2 = 0{,}0016$ (*1*), 0,008 (*2*) и $h/\omega_0 = 0{,}0016$ (*3*).

Заключение. Рассмотрены стационарные режимы колебаний при супергармоническом резонансе 2-го порядка нелинейной одномассовой модели упругого тела с закрывающейся трещиной. С использованием прямого способа удовлетворения дифференциального уравнения колебаний системы на полупериодах преобладающей гармоники установлены в явном виде простые зависимости вибродиагностических параметров наличия трещины от характеристик нелинейности и демпфирующей способности колебательной системы при различного вида неупругом сопротивлении. Результаты приближенного аналитического решения подтверждены данными численного решения дифференциального уравнения колебаний системы. На примере колебаний консольной балки с краевой поперечной трещиной показаны методы определения связи используемой интегральной характеристики нелинейности системы с размером и местоположением трещины и установления зависимости вибродиагностического параметра от относительной глубины трещины.

Р е з ю м е

Розглянуто методи наближеного визначення вібродіагностичних параметрів наявності тріщини втомленості нормального відриву, що закривається, у пружному тілі з урахуванням різного виду непружного опору за супергармонічного резонансу 2-го порядку.

1. *Матвеев В. В.*, *Богинич О. Е.* К вопросу приближенного определения вибродиагностического параметра нелинейности упругого тела, обусловленной наличием дышащей трещины, при субгармоническом резонансе // Пробл. прочности. – 2012. – № 3. – С. 37 – 49.
2. *Матвеев В. В.*, *Богинич О. Е.* Влияние неупругого сопротивления на колебания упругого тела с закрывающейся трещиной при основном и субгармоническом резонансах // Там же. – 2014. – № 1. – С. 5 – 24.
3. *Матвеев В. В.*, *Яковлев А. П.*, *Богинич О. Е.*, *Синенко Е. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины в стержневых элементах при субгармоническом резонансе // Там же. – 2014. – № 3. – С. 21 – 37.
4. *Матвеев В. В.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 1. Существующие и предлагаемый методы решения // Там же. – 2004. – № 4. – С. 5 – 20.
5. *Матвеев В. В.*, *Богинич О. Е.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия трещины в упругом теле при супергармоническом резонансе // Там же. – 2010. – № 4. – С. 5 – 19.
6. *Мудров А. Е.* Численные методы для ПЭВМ в языках Паскаль, Фортран и Бейсик. – Томск: МП “Раска”, 1991. – 271 с.
7. *Бовсуновский А. П.*, *Бовсуновский О. А.* Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах // Пробл. прочности. – 2010. – № 3. – С. 125 – 141.

Поступила 24. 03. 2014