УДК 539.375

Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 2. Методика определения инвариантного *J*-интеграла в дискретных моделях метода конечных элементов

В. А. Баженов, А. И. Гуляр, С. О. Пискунов, А. С. Сахаров, А. А. Шкрыль, Ю. В. Максимюк

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

Реализована новая методика вычисления J-интеграла для дискретных моделей метода конечных элементов, основанная на использовании величин узловых реакций и перемещений. Приведены теоретические обоснования и практические результаты, подтверждающие инвариантность получаемых с использованием этой методики значений J-интеграла для случая трещин нормального отрыва и смешанного разрушения. Решена задача об упругопластическом деформировании компактного образца в пространственной постановке.

Ключевые слова: механика разрушения, инвариантный *J*-интеграл, контур интегрирования, метод конечных элементов, линейная и нелинейная задачи.

Ранее [1] было проведено исследование достоверности результатов вычисления J-интеграла для дискретных моделей метода конечных элементов (МКЭ) на основе традиционного подхода к величинам напряжений и градиентам перемещений. Полученные данные свидетельствуют, что такая методика обеспечивает более высокую эффективность вычисления J-интеграла, в частности, по сравнению с методом эквивалентного объемного интегрирования [2]. Однако при вычислении J-интеграла в призматическом теле с боковым надрезом как при упругом, так и при упругопластическом деформировании обнаружена существенная зависимость результатов от размеров контура интегрирования. При использовании одинаковых конечноэлементных моделей погрешности вычисления J-интеграла при упругопластическом деформировании оказались вдвое большими, чем при упругом, а для достижения достоверности результатов в обоих случаях требуется значительное сгущение конечноэлементной сетки. Кроме того, предлагаемые в работах других авторов реализации традиционного подхода в задачах смешанного разрушения приводят к дополнительным вычислительным затратам. Поэтому вопрос создания новой эффективной методики вычисления J-интеграла для дискретных моделей МКЭ, обеспечивающей его инвариантность, является актуальным.

Рассмотрим замкнутый контур в общем случае произвольной формы, построенный на дискретной модели полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ) для тела с продольной трещиной. Контур представляет собой поперечное сечение объема, выбранного в окрестности точки фронта трещины для вычисления J-интеграла [1], проходит через середины конечных элементов (КЭ) в направлении оси x^1 и по границам КЭ параллельно оси x^2 (рис. 1). Такой замкнутый контур может быть расположен в произвольном месте дискретной модели, в предельном случае одна из его сторон, параллельных оси x^2, может совпадать с одним из берегов (поверхностей) трещины.

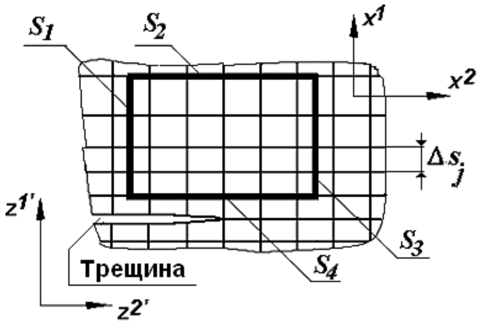


Рис. 1. Контур интегрирования в поперечном сечении дискретной модели ПМКЭ для тела с продольной трещиной.

J-интеграл по указанному контуру может быть представлен в виде

$$J = \int_S (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'l'} t^{l'}) dS. \tag{1}$$

После развертывания произведения во втором слагаемом по индексу l' $(t^{1'} = 0,\ t^{2'} = 1,\ t^{3'} = 0)$ с учетом значений проекций нормали n_t на ось $z^{2'}$ на характерных участках контура $S_1 - S_4$ $(n_t|_{S_1} = -1,\ n_t|_{S_3} = 1,\ n_t|_{S_2} = n_t|_{S_4} = 0)$ покомпонентное представление *J*-интеграла таково:

$$J = \int_{S_3} WdS_3 - \int_{S_1} WdS_1 - \int_{S_1} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} dS_1 - \int_{S_2} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} dS_2 -$$

$$- \int_{S_3} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} dS_3 - \int_{S_4} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} dS_4. \tag{2}$$

С учетом конечноэлементной дискретизации контура получим

$$J = \sum_{j=1}^{N_3} (W\Delta s)_j - \sum_{j=1}^{N_1} (W\Delta s)_j - \sum_{j=1}^{N_1} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} \Delta s)_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{N_2} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} \Delta s)_j - \sum_{j=1}^{N_3} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} \Delta s)_j - \sum_{j=1}^{N_4} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} \Delta s)_j, \tag{3}$$

где N_1, N_2, N_3, N_4 – количество КЭ, Δs_j – длина отрезка контура в пределах *j*-го КЭ на участках контура S_1, S_2, S_3, S_4 (рис. 1).

Величина энергии деформирования КЭ W, вычисленная вдоль обозначенного на рис. 1 отрезка контура Δs_j, будет

$$(W\Delta s)_j = -\frac{1}{2(\Delta z^{2'})}\{u\}_j^T\{R\}_j, \tag{4}$$

где $\{u\}_j = \{\{u_{k'}\}_i\}$, $\{R\}_j = \{\{R_{k'}\}_i\}$ – векторы перемещений и узловых реакций j-го КЭ, компоненты которых показаны на рис. 2; i – номера узлов в пределах КЭ, $i = 1, 2, 3, 4$; k' – направления осей базисной системы координат $z^{k'}$.

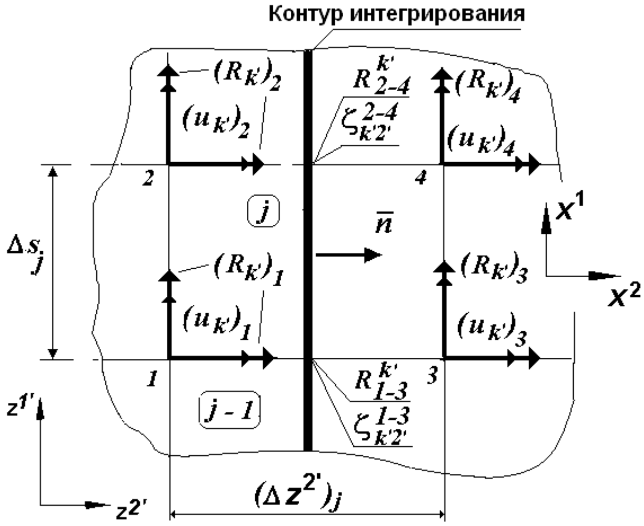


Рис. 2. Отрезок контура интегрирования в пределах j-го КЭ.

Усредненные величины узловых реакций, действующих вдоль сторон *2–4* и *1–3* КЭ, с использованием напряжений могут быть представлены так:

$$R^{k'}_{2-4} = n_i\sigma^{ik'}\frac{\Delta s}{2}, \qquad R^{k'}_{1-3} = n_i\sigma^{ik'}\frac{\Delta s}{2},$$

а с использованием узловых реакций КЭ:

$$R^{k'}_{2-4} = \frac{(R^{k'})_2 + (R^{k'})_4}{2}, \qquad R^{k'}_{1-3} = \frac{(R^{k'})_1 + (R^{k'})_3}{2}.$$

Аналогично могут быть записаны величины градиентов перемещений КЭ:

$$\zeta^{2-4}_{k'2'} = \frac{(u_{k'})_4 - (u_{k'})_2}{\Delta z^{2'}}, \qquad \zeta^{1-3}_{k'2'} = \frac{(u_{k'})_3 - (u_{k'})_1}{\Delta z^{2'}}.$$

С учетом этого и формулы (3) выражения для контурного интеграла (2) приобретут вид

$$J=\sum_{j=1}^{N_3}\frac{\{u\}_j^T(R\}_j}{2(\Delta z^{2'})_j}-\sum_{j=1}^{N_1}\frac{\{u\}_j^T\{R\}_j}{2(\Delta z^{2'})_j}-$$

$$-\sum_{j=1}^{N_1}\left(R^{k'}\frac{(\{u_{k'}\}_3+\{u_{k'}\}_4)-(\{u_{k'}\}_1+\{u_{k'}\}_2)}{2\Delta z^{2'}}\right)_j-\sum_{j=1}^{N_2}\left(R^{k'}\frac{\{u_{k'}\}_4-\{u_{k'}\}_2}{2\Delta z^{2'}}\right)_j-$$

$$-\sum_{j=1}^{N_3}\left(R^{k'}\frac{(\{u_{k'}\}_3+\{u_{k'}\}_4)-(\{u_{k'}\}_1+\{u_{k'}\}_2)}{2\Delta z^{2'}}\right)_j-\sum_{j=1}^{N_4}\left(R^{k'}\frac{\{u_{k'}\}_4-\{u_{k'}\}_2}{2\Delta z^{2'}}\right)_j. \quad (5)$$

Таким образом, контурный интеграл (1) может быть представлен с использованием величин узловых реакций и перемещений.

Для частного случая регулярной в направлении $z^{2'}$ конечноэлементной сетки в предположении линейно-упругого деформирования тела может быть доказано равенство нулю величины J-интеграла при его вычислении по контуру, который охватывает вершину трещины. С этой целью рассмотрим подобласти I и II (рис. 3), которые смещены относительно контура на $\pm\Delta z^{2'}/2$, где $\Delta z^{2'}$ – шаг конечноэлементной сетки в направлении $z^{2'}$. Каждая область содержит N узлов ($1, 2, 3, \ldots, N-1, N$, рис. 3).

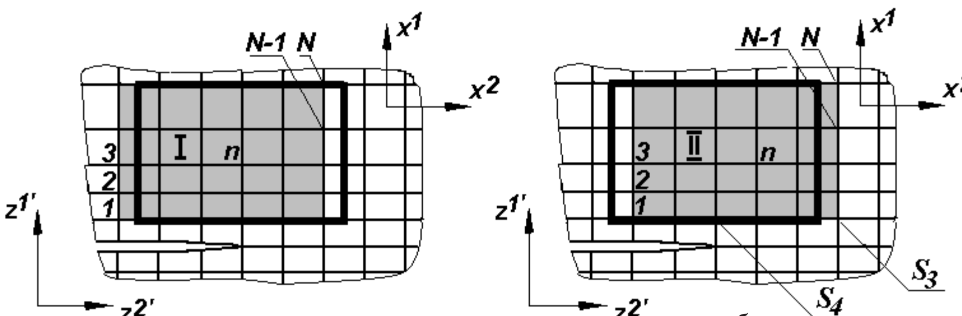


Рис. 3. Подобласти для вычисления J-интеграла в дискретной модели ПМКЭ тела с продольной трещиной.

Векторы перемещений и узловых реакций подобластей I и II обозначим $\{u\}_{\mathrm{I}}$, $\{R\}_{\mathrm{I}}$ и $\{u\}_{\mathrm{II}}$, $\{R\}_{\mathrm{II}}$ соответственно. Каждый из этих векторов содержит $3N$ компонент, представляющих собой значения перемещений или узловых реакций по трем направлениям соответственно. Например,

$$\{u\}_{\mathrm{I}}^T=$$

$$=\{(u_{1'})_1\quad(u_{2'})_1\quad(u_{3'})_1\quad\ldots\quad(u_{k'})_n\quad\ldots\quad(u_{3'})_{N-1}\quad(u_{1'})_N\quad(u_{2'})_N\quad(u_{3'})_N\},$$

где $k'=1, 2, 3$, как и в предыдущем случае, обозначают направление перемещения, $n=1, 2, \ldots, N$ – номера узлов в пределах каждой из подобластей.

Векторы $\{u\}_{\mathrm{II}}$, $\{R\}_{\mathrm{I}}$, $\{R\}_{\mathrm{II}}$ имеют аналогичную структуру.

Для доказательства равенства нулю дискретного аналога J-интеграла (5) определим изменение энергии деформирования объема материала, заключенного в пределах подобласти I при ее смещении на $\Delta z^{2'}$. Согласно теореме Клапейрона, эта величина может быть представлена как разность работ узловых реакций на соответствующих перемещениях:

$$\frac{\Delta W}{\Delta z^{2'}} = \frac{1}{\Delta z^{2'}}\left(\frac{1}{2}\{u\}_{\mathrm{II}}^{T}\{R\}_{\mathrm{II}} - \frac{1}{2}\{u\}_{\mathrm{I}}^{T}\{R\}_{\mathrm{I}}\right). \tag{6}$$

Покажем, что выражение (6) может быть записано в следующем виде:

$$\left(\frac{\{u\}_{\mathrm{II}}^{T} - \{u\}_{\mathrm{I}}^{T}}{\Delta z^{2'}}\right)\left(\frac{\{R\}_{\mathrm{II}} + \{R\}_{\mathrm{I}}}{2}\right). \tag{7}$$

После раскрытия скобок получим

$$\left(\frac{\{u\}_{\mathrm{II}}^{T} - \{u\}_{\mathrm{I}}^{T}}{\Delta z^{2'}}\right)\left(\frac{\{R\}_{\mathrm{II}} + \{R\}_{\mathrm{I}}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\{u\}_{\mathrm{II}}^{T}\{R\}_{\mathrm{II}} - \{u\}_{\mathrm{II}}^{T}\{R\}_{\mathrm{II}} - \{u\}_{\mathrm{I}}^{T}\{R\}_{\mathrm{I}} - \{u\}_{\mathrm{I}}^{T}\{R\}_{\mathrm{II}} + \{u\}_{\mathrm{II}}^{T}\{R\}_{\mathrm{I}}}{2\Delta z^{2'}}.$$

В соответствии с теоремой Бетти о взаимности работ имеем $\{u\}_{\mathrm{I}}^{T}\{R\}_{\mathrm{II}} = \{u\}_{\mathrm{II}}^{T}\{R\}_{\mathrm{I}}$. Таким образом справедливо тождество:

$$\frac{\{u\}_{\mathrm{II}}^{T}\{R\}_{\mathrm{II}} - \{u\}_{\mathrm{I}}^{T}\{R\}_{\mathrm{I}}}{2\Delta z^{2'}} \equiv \frac{(\{u\}_{\mathrm{II}}^{T} - \{u\}_{\mathrm{I}}^{T})(\{R\}_{\mathrm{I}} + \{R\}_{\mathrm{II}})}{2\Delta z^{2'}}.$$

Соответственно можем записать

$$J = \frac{\{u\}_{\mathrm{II}}^{T}\{R\}_{\mathrm{II}} - \{u\}_{\mathrm{I}}^{T} - \{R\}_{\mathrm{I}}}{2\Delta z^{2'}} - \frac{(\{u\}_{\mathrm{II}}^{T} - \{u\}_{\mathrm{I}}^{T})(\{R\}_{\mathrm{I}} + \{R\}_{\mathrm{II}})}{2\Delta z^{2'}} = 0. \tag{8}$$

Поскольку исследуемый объект, на дискретной модели которого были выделены области I и II, находится в состоянии равновесия, для каждого внутреннего узла этих областей реакции равны нулю. Соответственно величина J-интеграла, полученная с использованием выражений (5) и (8), для данного случая будет одинакова.

Аналогичные выкладки могут быть проведены для тела с поперечной трещиной. В этом случае необходимо рассмотреть контур интегрирования и соответствующие ему подобласти в плоскости $x^2 - x^3$. При этом расположение точек, в которых вычисляются значения компонент векторов $\{u\}_{\mathrm{I}}$, $\{R\}_{\mathrm{I}}$, $\{u\}_{\mathrm{II}}$, $\{R\}_{\mathrm{II}}$, в плоскости $z^{1'} - z^{2'}$ определяется координатами узлов конечноэлементной модели, в направлении $z^{3'}$ – координатами точек интегрирования (на рис. 4 показаны крестиками).

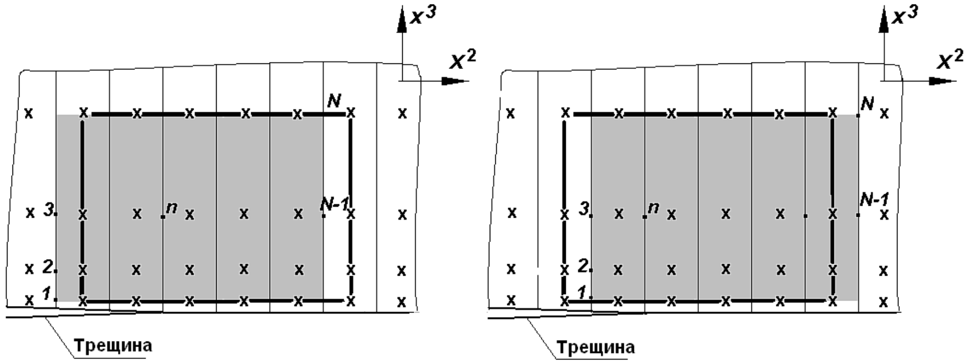


Рис. 4. Подобласти для вычисления J-интеграла в дискретной модели ПМКЭ тела с поперечной трещиной.

Применение разработанного подхода к определению J-интеграла в рассмотренной ранее [1] задаче об изгибе призматического тела с боковой трещиной показало независимость получаемых результатов (на рис. 5 кривая *2*) от контура интегрирования и почти полную их тождественность эталонному решению (*1*, треугольники) при рассмотрении этого объекта в виде призматического тела как с продольной, так и поперечной трещиной. Аналогичные данные были получены при вычислении величин J-интеграла по предложенной методике на основании определения напряженно-деформированного состояния с использованием традиционного трехмерного МКЭ (на рис. 5 кривая *3*), в том числе программного комплекса NASTRAN [3, 4].

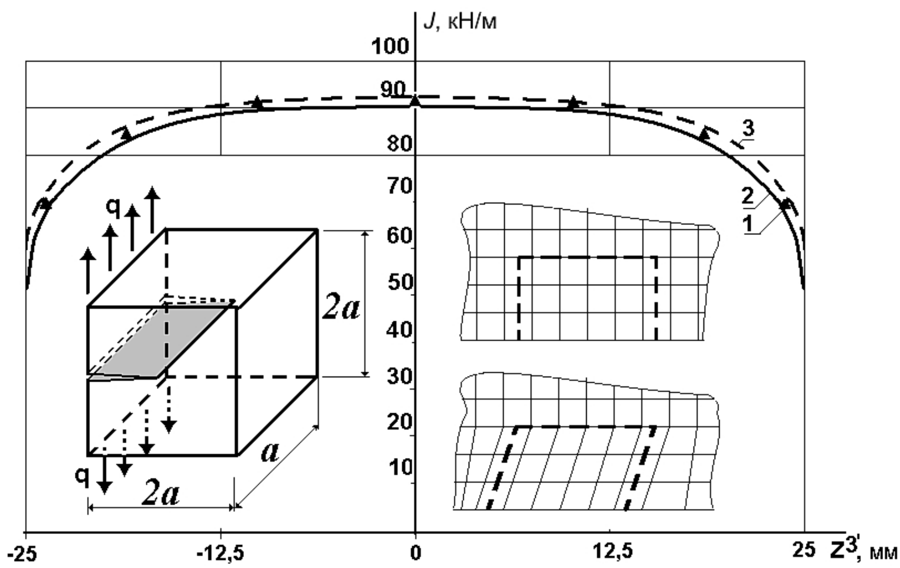


Рис. 5. Результаты определения J-интеграла по величинам узловых реакций и перемещений.

Для получения J-интеграла с точностью порядка 2,5% с помощью величин узловых реакций и перемещений достаточно воспользоваться конечноэлементной сеткой размерностью 5×10 КЭ. Таким образом, необходимая точность достигается при размерах КЭ в вершине трещины почти в 25 раз меньших, чем при вычислении J-интеграла по величинам напряжений и градиентов перемещений. Следует также отметить, что сходимость достигается при использовании в окрестности вершины трещины как ортогональных, так и косоугольных дискретных моделей, фрагменты которых показаны на рис. 5.

Таким образом, разработанный подход, основанный на вычислении J-интеграла по величинам узловых реакций и перемещений, свободен от недостатков, присущих методике, базирующейся на использовании величин напряжений и градиентов перемещений. Рассматриваемая методика позволяет получать достоверные результаты на ортогональных и косоугольных сетках при существенно меньшей размерности конечноэлементных моделей, чем при вычислении J-интеграла по величинам напряжений и градиентов перемещений.

Рассмотрим такое расположение контура, когда участок S_4 совпадает с одним из берегов трещины (рис. 1). Тогда часть $S_1 - S_3$ этого контура может рассматриваться как его половина, охватывающая вершину трещины и используемая для вычисления J-интеграла в телах с трещинами.

Поскольку формула (5) записана для величины интеграла по замкнутому контуру $S_1 - S_4$, из нее можно выделить слагаемые, соответствующие величине интеграла по П-образной части контура (на рис. 1 участки $S_1 - S_3$):

$$J_{\Pi} = \sum_{j=1}^{N_3} \frac{\{u\}_j^T \{R\}_j}{2(\Delta z^{2'})_j} - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{\{u\}_j^T \{R\}_j}{2(\Delta z^{2'})_j} -$$

$$-\sum_{j=1}^{N_1} \left(R^{k'} \frac{(\{u_{k'}\}_3 + \{u_{k'}\}_4) - (\{u_{k'})_1 + \{u_{k'}\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j -$$

$$-\sum_{j=1}^{N_2} \left(R^{k'} \frac{\{u_{k'}\}_4 - \{u_{k'}\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_3} \left(R^{k'} \frac{(\{u_{k'}\}_3 + \{u_{k'})_4) - (\{u_{k'}\}_1 + \{u_{k'}\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right),$$

и слагаемое, соответствующее интегралу по линии, которая проходит через вершину трещины и замыкает этот контур (на рис. 1 участок S_4):

$$J_{\text{л}} = \sum_{j=1}^{N_4} \left(R^{k'} \frac{\{u_{k'}\}_4 - \{u_{k'}\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j .$$

Как было доказано выше, J-интеграл, вычисленный по замкнутому контуру $J_{\text{к}}$, равен нулю:

$$J_{\text{к}} = J_{\Pi} + J_{\text{л}} = 0.$$

Таким образом, J-интеграл по П-образной части контура можно выразить через величину J-интеграла по линии вдоль поверхности трещины:

$$J_{\text{П}} = -J_{\text{л}}.$$

Поскольку узловые реакции подобластей I и II (рис. 3) в узлах, расположенных на поверхности трещины, и перемещения в закрепленных узлах, относящихся к линии контура, равны нулю, формула вычисления J-интеграла для части контура $S_1 - S_3$ (рис. 1) примет следующий вид:

$$J = J_{\text{П}} = -\frac{R^{k'} u_{k'}}{2\Delta z^{2'}}, \tag{9}$$

где $R^{k'}$ – узловая реакция в вершине трещины; $u_{k'}$ – перемещение ближайшего от вершины трещины узла, расположенного на линии вдоль берега трещины.

Как отмечалось выше, формула (9) была получена для половины контура, охватывающего вершину трещины, и соответственно содержит компоненты узловых реакций и перемещений узлов, расположенных на одном из берегов трещины. Поэтому в случае симметричной относительно трещины расчетной схемы (в частности, для трещин нормального отрыва) для получения действительного значения J-интеграла результат вычисления по формуле (9) необходимо умножить на 2.

При смешанном разрушении вследствие отсутствия симметрии для определения J-интеграла необходимо рассматривать дискретную модель для тела в целом и использовать полный контур, охватывающий вершину трещины и имеющий разрыв на ее поверхности (рис. 6).

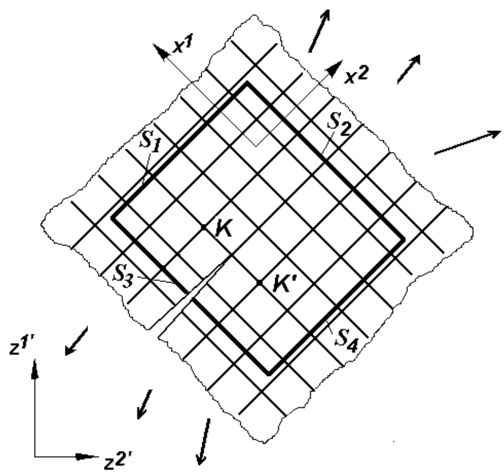


Рис. 6. Контур для вычисления J-интеграла при смешанном разрушении.

В частном случае упругого деформирования при смешанном разрушении двухмерных тел полная величина J-интеграла является суммой величин J_{I} и J_{II}, которые соответствуют нормальному отрыву и поперечному сдвигу:

$$J = J_{\mathrm{I}} + J_{\mathrm{II}}.$$

Связь величин J-интеграла (величины удельной энергии, необходимой для образования единицы поверхности трещины) с соответствующими значениями коэффициента интенсивности напряжений (КИН) при условии линейного деформирования определяется формулами, аналогичными (3) [1]:

$$J_{\mathrm{I}} = k\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E}; \qquad J_{\mathrm{II}} = k\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{E}.$$

Один из подходов, который предлагается для раздельного определения составляющих J-интеграла, заключается в проведении процедуры симметризации напряженно-деформированного состояния в соответствии с типом разрушения I (нормальный отрыв) и II (поперечный сдвиг) [2, 5].

Рассмотрим две точки K и K', которые расположены симметрично по отношению к берегам трещины (рис. 6). Согласно [2, 5], поля перемещений для каждой из них можно записать в виде

$$u = u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{Bmatrix}.$$

Аналогичное представление может быть использовано для полей напряжений и деформаций:

$$\sigma = \sigma^{\mathrm{I}} + \sigma^{\mathrm{II}}; \qquad \varepsilon = \varepsilon^{\mathrm{I}} + \varepsilon^{\mathrm{II}}.$$

Тогда для J-интеграла получим

$$J_{\mathrm{I}} = \int\limits_{\Omega^*}\left(\sigma_{ij}^{\mathrm{I}}\frac{\partial u_j^{\mathrm{I}}}{\partial x_1} - W^{\mathrm{I}}\delta_{1i}\right)\frac{\partial q_1}{\partial x_i}\,dA; \qquad J_{\mathrm{II}} = \int\limits_{\Omega^*}\left(\sigma_{ij}^{\mathrm{II}}\frac{\partial u_j^{\mathrm{II}}}{\partial x_1} - W^{\mathrm{II}}\delta_{1i}\right)\frac{\partial q_1}{\partial x_i}\,dA,$$

где Ω^* – часть области, которая полностью окружает вершину трещины; W^{I}, W^{II} – плотности энергии деформации, относящиеся к типам разрушения I и II, $W^{\mathrm{I}} = \int\limits_s \sigma_{ij}^{\mathrm{I}}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{I}}ds$, $W^{\mathrm{II}} = \int\limits_s \sigma_{ij}^{\mathrm{II}}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{II}}ds$; δ_{ij} – символ Кронекера.

Этот подход приводит к лишним вычислительным процедурам и усложняет определение J-интеграла.

Для нахождения величин J-интеграла при смешанном разрушении с использованием его представления через величины узловых реакций и перемещений рассмотрим контур $CABDD'B'A'C'$, который охватывает вершину трещины и имеет разрыв на ее поверхности (рис. 7). Контур может быть представлен как сумма двух П-образных частей замкнутых контуров, расположенных по обе стороны от трещины:

$$J_{CABDD'B'A'C'} = J_{CABD} + J_{C'A'B'D'}.$$

При этом величина J-интеграла по каждому из замкнутых контуров $CABDVSC$ и $C'A'B'D'V'S'C'$ может быть представлена как сумма J-интеграла по их П-образным частям $J_{\text{П}}$ и по линиям $J_{\text{л}}$, замыкающим соответствующие контуры. С учетом равенства J-интеграла нулю по каждому из указанных замкнутых контуров получим

$$\begin{cases} J_{\text{к}(CABDVSC)} = J_{\text{П}} + J_{\text{л}} = J_{CABD} + J_{CSVD} = 0; \\ J_{\text{к}(C'A'B'D'V'S'C')} = J_{\text{П}} + J_{\text{л}} = J_{C'A'B'D'} + J_{C'S'V'D'} = 0; \\ J_{CABDD'B'A'C'} = J_{CABD} + J_{C'A'B'D'} = -J_{CSVD} - J_{C'S'V'D'}. \end{cases} \tag{10}$$

С помощью формулы (9), учитывая выполнение условий равновесия узлов, получаем, что J-интеграл по линии равен произведению реакций узла V в вершине трещины на перемещения узла S перед вершиной:

$$J_{CSVD} = \frac{\{R\}_V \{u\}_S}{2\Delta l}; \qquad J_{C'S'V'D'} = \frac{\{R\}_{V'} \{u\}_{S'}}{2\Delta l}, \tag{11}$$

где $\{R\}_V = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}_V^T$ и $\{R\}_{V'} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}_{V'}^T$ – векторы суммарных узловых реакций КЭ, расположенных с каждой стороны от вершины трещины по направлениям местной системы координат КЭ; $\{u\}_S = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_S$, $\{u\}_{S'} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{S'}$ – векторы узловых перемещений; Δl – шаг конечноэлементной сетки в направлении распространения трещины (оси x^2, рис. 8).

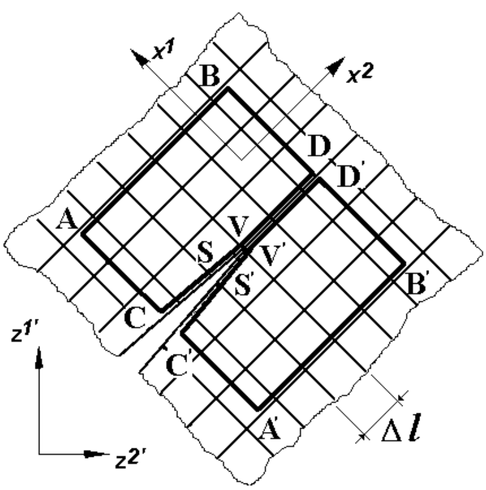


Рис. 7

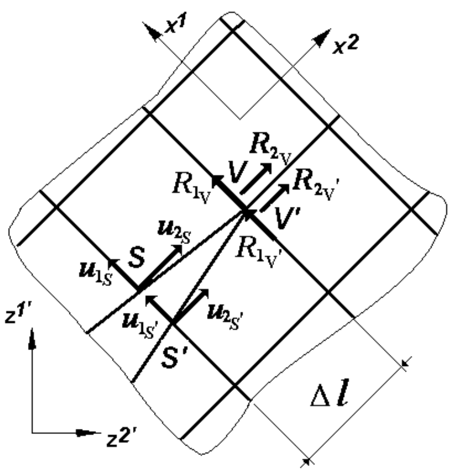


Рис. 8

Рис. 7. Представление контура для вычисления J-интеграла в виде суммы замкнутых контуров.

Рис. 8. Компоненты векторов узловых реакций и перемещений в окрестности вершины трещины.

Учитывая, что в соответствии с условиями равновесия узла в вершине трещины $\{R\}_V = -\{R\}_{V'}$, на основе (10) и (11) получаем

$$J_{CABDD'B'A'C'} = -\frac{\{R\}_V \{u\}_S}{2\Delta l} - \frac{\{R\}_{V'} \{u\}_{S'}}{2\Delta l} = \frac{\{R\}_{V'}}{2\Delta l} (\{u\}_S - \{u\}_{S'}) =$$

$$= \frac{1}{2\Delta l} \left(\{R_{V_1'} R_{V_2'}\} \begin{Bmatrix} u_{S_1} - u_{S_1'} \\ u_{S_2} - u_{S_2'} \end{Bmatrix} \right).$$

Таким образом, выражение J-интеграла имеет два слагаемых: произведения узловых реакций на перемещения по направлению x^1 и x^2, которые соответствуют J_{I} и J_{II}:

$$J = J_{\mathrm{I}} + J_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2\Delta l} (R_{V_1'} (u_{S_1} - u_{S_1'}) + R_{V_2'} (u_{S_2} - u_{S_2'})). \qquad (12)$$

С целью обоснования достоверности полученного выражения для вычисления J_{I} и J_{II} рассмотрим тестовый пример о деформировании бесконечной пластины с трещиной в условиях нормального отрыва и поперечного сдвига. Исходные данные: внешняя нагрузка $q = 0{,}1$ МН/м^2; модуль упругости $E = 0{,}1$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$.

При решении задачи использовали следующие варианты схем: в условиях нормального отрыва – 1/4 часть исследуемого фрагмента пластины под воздействием нормальной нагрузки $q = 0{,}1$ МН/м^2 (рис. 7,*б* [1]); в условиях поперечного сдвига – 1/4 часть исследуемого фрагмента пластины под воздействием касательной нагрузки $q = 0{,}1$ МН/м^2 (рис. 9,*а*) для раздельного рассмотрения случая нормального отрыва и поперечного сдвига; вся пластина при загружении нагрузками $q_n = 0{,}1$ МН/м^2 и $q_s = 0{,}1$ МН/м^2 (рис. 9,*б*). Для 1/4 части пластины трещина задана с использованием граничных условий, в случае целой пластины – с помощью разных номеров узлов на противоположных берегах трещины.

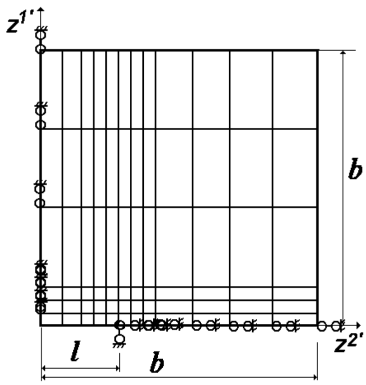
Значения J-интеграла J_{I} и J_{II}, полученные для 1/4 части пластины с использованием формулы (12), при раздельном рассмотрении нагрузок, соответствующих нормальному отрыву и поперечному сдвигу, совпадают с приведенными в работе [4] эталонными значениями: для трещины нормального отрыва $J_{\mathrm{I}} = 2{,}859 \cdot 10^{-2}$ Н/м, для трещины поперечного сдвига

$$J_{\mathrm{II}} = \frac{K_{\mathrm{II}}^2}{E} (1 - \nu^2) = 2{,}859 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м},$$

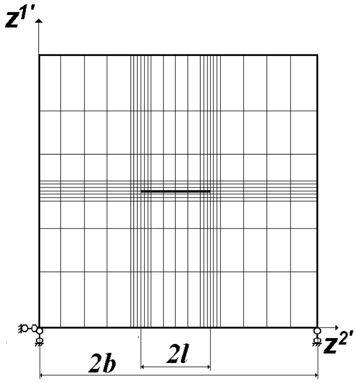
где $K_{\mathrm{II}} = \tau \sqrt{\pi l}$.

Величины J-интеграла, определенные для 1/4 части пластины по формуле контурного интеграла (5), отличаются от вычисленных с помощью формулы (12) на величину порядка 10^{-17}. Следовательно, J-интеграл по замкнутому контуру равняется нулю, что является одним из признаков выполнения фундаментального свойства его инвариантности.

Значения J_{I} и J_{II}, полученные по формуле (12) для расчетной схемы целой пластины как при раздельной, так и совместной реализации каждого из типов разрушения, полностью совпадают с полученными для 1/4 части пластины. Таким образом, формула (12) позволяет получить достоверные величины J_{I} и J_{II} при смешанном разрушении без использования дополнительной обработки результатов конечноэлементного решения задачи*.



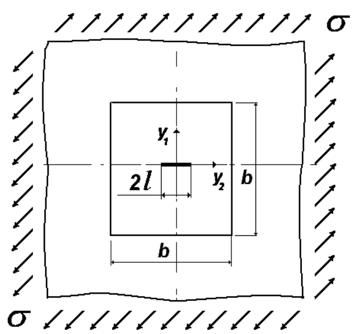
а



б

Рис. 9. Поперечные сечения дискретных моделей для вычисления J-интеграла в условиях продольного сдвига (*а*) и смешанного разрушения (*б*).

При исследовании достоверности предложенного подхода для смешанного разрушения при несимметричных относительно трещины расчетных схемах рассмотрен тестовый пример о растяжении бесконечной пластины с наклонной трещиной, расположенной под углом β к линии действия нагрузки (рис. 10).



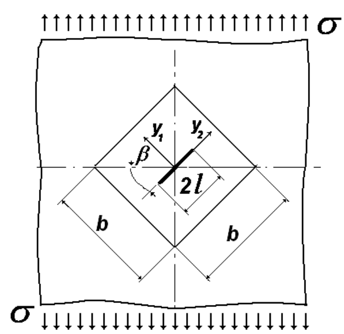


Рис. 10. Расчетные схемы для определения напряженно-деформированного состояния пластины с наклонной трещиной.

При $\beta = 45°$ приложенная различными способами нагрузка создает одинаковое напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины, которое соответствует смешанному разрушению. При расчете рас-

* Результаты получены при участии Д. В. Богдана.

сматривалась часть пластины размером $b \times b$. Фрагменты соответствующих дискретных моделей в окрестности вершины трещины показаны на рис. 11.

Полученные по обеим расчетным схемам значения J_{I} и J_{II} также совпадают с эталонными. При отсутствии симметрии напряженного состояния определение J-интеграла в пластине с наклонной трещиной также не потребовало никаких дополнительных вычислительных процедур.

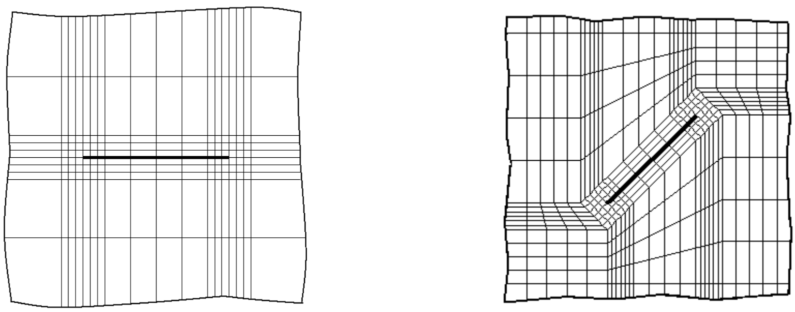


Рис. 11. Фрагменты конечноэлементных моделей пластины с наклонной трещиной.

Достоверность результатов, полученных на основе разработанного подхода к определению J-интеграла, для случая упругопластического деформирования проверялась на примере задачи об изгибе призматического тела с боковой трещиной (рис. 5). Как и в случае упругого деформирования, полученные распределения J-интеграла (на рис. 12 линия) не зависят от контура интегрирования и совпадают с эталонным решением (точки), которое получено путем последовательного сгущения конечноэлементной сетки до достижения погрешности вычисления J-интеграла между двумя решениями в пределах 2% [1].

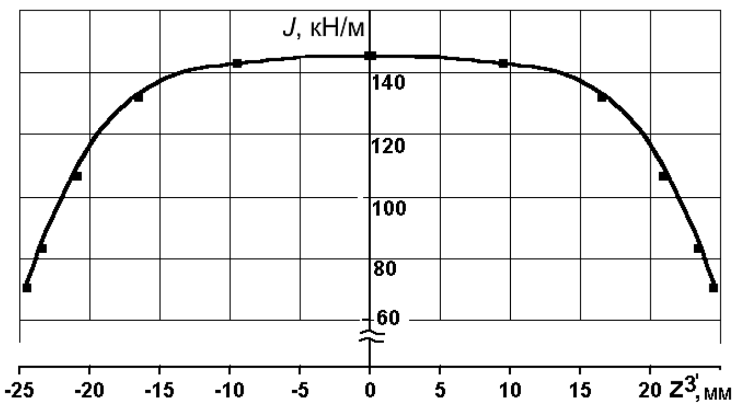


Рис. 12. Распределение J-интеграла при упругопластическом деформировании призматического тела с боковой трещиной.

На основе реализованного метода вычисления J-интеграла с использованием величин узловых реакций и перемещений была решена задача об упругопластическом деформировании компактного образца в пространственной постановке [7]. Дискретная модель ПМКЭ, построенная с использованием неоднородных призматических КЭ, показана на рис. 13.

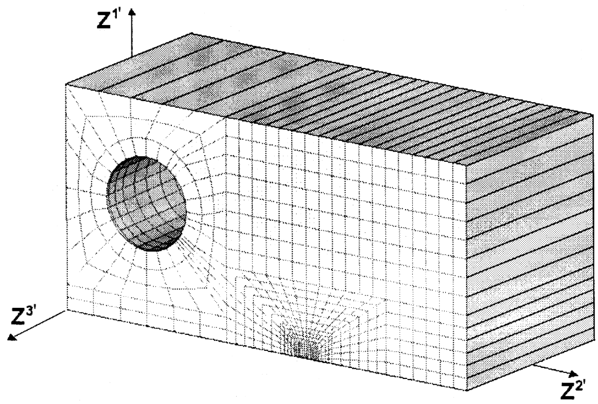


Рис. 13. Дискретная модель ПМКЭ для решения задачи об упругопластическом деформировании компактного образца.

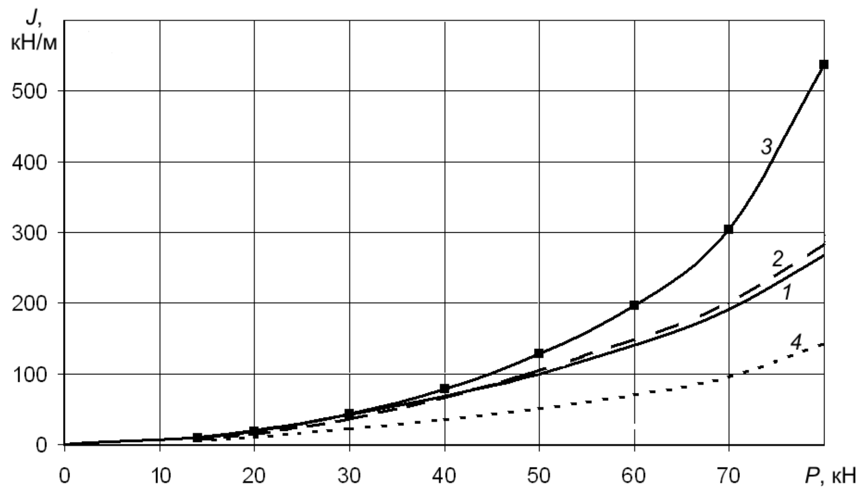


Рис. 14. Зависимость величин J-интеграла от нагрузки: *1* – данные Е. М. Морозова [7]; *2* – двухмерная постановка; *3* – $z^{3'} = 0$; *4* – $z^{3'} = 25$ мм.

Размерность конечноэлементной модели определяется на основании исследования сходимости величин параметров напряженно-деформированного состояния. Так, сходимость решения задачи об упругом деформировании с помощью ПМКЭ достигается при использовании 650 узлов в поперечном сечении и 12 гармоник разложения перемещений вдоль оси $z^{3'}$. Результаты решения задачи в пространственной постановке показывают, что напряженно-деформированное состояние вдоль оси $z^{3'}$ имеет существенно пространственный характер. Распределения напряжений вдоль оси $z^{3'}$, полученные на основе ПМКЭ, совпадают с таковыми, вычисленными с использованием программного комплекса [3] и комплекса NASTRAN. Распределение J-интеграла по толщине образца также является неоднородным. Анализ сходимости величин J-интеграла, полученных на основе метода реакций, свидетельствует, что они достигаются при использовании 12 гармоник в разложении перемещений [8].

Решение задачи при упругопластическом деформировании показывает, что с повышением уровня пластических деформаций разница между значениями J-интеграла, вычисленными на боковых поверхностях и в середине образца, увеличивается. Также возрастает разница в значениях J-интеграла, полученных в двухмерной и пространственной постановке (рис. 14).

Таким образом, разработана и реализована методика вычисления J-интеграла в дискретных моделях МКЭ, которая обеспечивает его инвариантность. Это позволяет использовать более простую формулу для его вычисления, в которой понятие контура отсутствует. С помощью данной методики можно достичь сходимость величин J-интеграла в упругих задачах на более редких сетках, чем это требуется при использовании других методик. Применение разработанной методики к задаче об упругопластическом деформировании компактного образца показывает, что определение параметров нелинейной механики разрушения в массивных телах с трещинами требует решения задач в трехмерной постановке.

Резюме

Реалізовано нову методику обчислення J-інтеграла для дискретних моделей методу скінченних елементів, що базується на використанні величин вузлових реакцій і переміщень. Наведено теоретичні обгрунтування і практичні результати, що підтверджують інваріантність отримуваних із використанням цієї методики значень J-інтеграла для випадку тріщин нормального відриву і змішаного руйнування. Розв’язано задачі про пружно-пластичне деформування компактного зразка в просторовій постановці.

1. *Баженов В. А.*, *Гуляр А. И.*, *Сахаров А. С. и др*. Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщ. 1. Теоретические основы и исследование эффективности конечноэлементной методики решения пространственных задач механики разрушения // Пробл. прочности. – 2010. – № 1. – С. 27 – 39.
2. *Giner E.*, *Fuenmayor F.*, *Baeza L.*, *and Tarancon J.* Error estimation for the finite element evaluation of G_{I} and G_{II} in mixed-mode linear elastic fracture mechanics // Finite Elements in Analysis and Design. – 2005. – **41**. – P. 1079 – 1104.
3. *Сахаров О. С.*, *Щербіна Ю. В.*, *Гондлях О. В.*, *Сівецький В. І.* Інтегрована система моделювання технологічних процесів і розрахунку обладнання хімічної промисловості. – Київ: Поліграфконсалтінг, 2006. – 156 с.
4. *Шимкович Д. Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. – М.: ДМК, 2001. – 448 с.
5. *Giner E.*, *Fuenmayor F. J.*, *and Besa A. J.* An implementation of the stiffness derivative method as a discrete analytical sensitivity analysis and its application to mixed mode in LEFM // Eng. Fract. Mech. – 2002. – **68** (18). – P. 2051 – 2071.

6. *Rice J. R.* A path independent integral and approximate analysis of strain concentration by notches and crack // J. Appl. Mech. – 1968. – No. 35. – P. 379 – 386.
7. *Морозов Е. М.*, *Никишков Г. П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
8. *Баженов В. А.*, *Гуляр О. І.*, *Пискунов С. О.*, *Сахаров О. С.* Метод реакцій для обчислення *J*-інтеграла в просторових нелінійних задачах механіки руйнування // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – № 79. – С. 3 – 17.

Поступила 18. 06. 2009