

Динамическая задача теории упругости для транслопной многослойной сферы

В. А. Ромащенко, С. А. Тарасовская

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Построено аналитическое решение в квадратурах одного класса динамических центрально симметричных краевых задач теории упругости для многослойных транслопных сфер, скорость звука в которых в радиальном направлении стремится к бесконечности. Исследованы сходимость и точность полученных решений. Показано, что полученные аналитические решения можно использовать как первое приближение для случаев, когда скорость звука в материалах конечна.

Ключевые слова: многослойная транслопная сфера, динамика, центральная симметрия, аналитическое решение, метод конечных разностей, напряженно-деформированное состояние.

Введение. Многослойные сферические тонко- и толстостенные оболочки широко применяются в различных отраслях современной техники. В качестве материалов слоев зачастую используются упругие армированные композитные материалы (КМ). Применительно к сферическим сосудам это приводит к тому, что все либо часть слоев такой оболочки следует рассматривать как сферически транслопные тела [1] с характеристиками упругости E и ν в радиальном направлении r , которое является осью симметрии вращения, и E_0 и ν_0 в ортогональной плоскости (точнее – сфере) изотропии. Для изотропных слоев выполняются условия $E \equiv E_0$ и $\nu \equiv \nu_0$.

Во многих случаях конструктивные элементы в виде замкнутых многослойных сфер могут испытывать импульсное центрально симметричное нагружение давлением внутри и (или) снаружи оболочки, например, при взрыве внутри ее заряда взрывчатого вещества (ВВ). Экспериментально динамическое поведение таких оболочек изучалось в [2]. Практический интерес вызывает аналитический расчет нестационарного центрально симметричного напряженно-деформированного состояния (НДС) подобных конструктивных элементов, на базе которого можно было бы говорить о прочности оболочки при заданной взрывной нагрузке. Особую важность представляет получение этих решений на основе уравнений теории упругости, поскольку из-за таких факторов, как толстостенность оболочки, кратковременность нагрузки, крутые фронты ударных волн, основанные на всевозможных оболочечных теориях результаты зачастую вызывают сомнение. Даже для изотропных слоев точные аналитические решения подобных задач весьма громоздки и известны только в некоторых частных случаях, в частности для однослойных сфер или сферических полостей [3, 4]. Цель данной работы заключается в разработке методов решения динамических центрально симметричных краевых задач теории упругости для многослойных сферически транслопных сфер.

Математическая формулировка задачи. Используем сферическую систему координат r, ψ , где r – радиальная координата; ψ – ортогональная к r дуговая координата. Из-за центральной симметрии задачи третьей координаты не требуется – все направления вдоль ψ будут тождественно эквивалентны.

Уравнения движения в такой системе координат примут вид [3, 4]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\psi)}{r} = \rho_i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где t – время; i – номер слоя (слои будем нумеровать от внутреннего к наружному); ρ_i – плотность материала рассматриваемого слоя; u – радиальное перемещение; σ_r, σ_ψ – радиальное и окружное напряжения соответственно.

Геометрические соотношения Коши запишем так:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\psi = \frac{u}{r}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_r, \varepsilon_\psi$ – радиальная и окружная деформации соответственно.

Закон Гука для сферически трансформированного слоя с учетом (2) и центральной симметрии примет следующий вид [1]:

$$E \frac{\partial u}{\partial r} = \sigma_r - 2\nu\sigma_\psi; \quad E \frac{u}{r} = \sigma_\psi(1 - \tilde{\nu}) - \nu\sigma_r, \quad (3)$$

где $\tilde{\nu}$ – приведенный коэффициент Пуассона,

$$\tilde{\nu} = \frac{E}{E_0}(\nu_0 - 1) + 1, \quad (4)$$

для изотропного материала имеем $\tilde{\nu} \equiv \nu_0 \equiv \nu$. Индекс i , характеризующий номер слоя, в (3) и (4) для упрощения записи опущен.

Контакт между слоями в случае многослойной оболочки считается идеальным:

$$\sigma_r^- = \sigma_r^+; \quad u^- = u^+ \quad \text{при} \quad r = R_{i,i+1}, \quad (5)$$

где $R_{i,i+1}$ – радиус контактной поверхности i -го слоя с $(i+1)$ -м; индексы “минус” и “плюс” относятся к контактирующим слоям снизу и сверху соответственно.

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_r|_{r=R_j} = -P_j(t), \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

где R_1, R_2 – внутренний и наружный радиусы оболочки; $P_1(t), P_2(t)$ – внутреннее и наружное импульсное давление на оболочку.

Начальные условия полагались нулевыми:

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (7)$$

Способ решения краевой задачи (1)–(7) существенно зависит от величины главного определителя системы (3):

$$D = 1 - \tilde{\nu} - 2\nu^2 \geq 0. \quad (8)$$

Для большей части материалов имеем $D > 0$, тем не менее есть определенный класс материалов, например несжимаемые, для которых $D = 0$.

Если для всех рассматриваемых слоев выполняется строгое равенство $D_i > 0$, задачу удобно решать в перемещениях. Решая систему (3) относительно напряжений и подставляя найденные решения в (1), получаем волновое уравнение:

$$\frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 2\beta_i \frac{u}{r^2}, \quad (9)$$

где

$$\beta_i = \frac{1 - \nu_i}{1 - \tilde{\nu}_i}; \quad c_i = \sqrt{\frac{E_i(1 - \tilde{\nu}_i)}{\rho_i(1 - \tilde{\nu}_i - 2\nu_i^2)}}. \quad (10)$$

Граничные условия (6) запишем так:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{D_1} \left[(1 - \tilde{\nu}_1) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu_1 \frac{u}{r} \right] &= -P_1(t), \quad r = R_1; \\ \frac{E_N}{D_N} \left[(1 - \tilde{\nu}_N) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu_N \frac{u}{r} \right] &= -P_2(t), \quad r = R_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где N – номер последнего (верхнего) слоя.

Начальные условия (7) остаются без изменений, а контактные (5) принимают вид

$$E_i D_{i+1} \left[(1 - \tilde{\nu}_i) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu_i \frac{u}{r} \right] = E_{i+1} D_i \left[(1 - \tilde{\nu}_{i+1}) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu_{i+1} \frac{u}{r} \right]. \quad (12)$$

Аналитическое интегрирование системы (7), (9)–(12) достаточно затруднительно, хотя в некоторых случаях и возможно. Если для всех слоев выполняется условие

$$\beta_i = 1, \quad \text{т.е.} \quad \nu_i = \tilde{\nu}_i, \quad (13)$$

то существует аналитическое решение в виде достаточно сложных линейных суперпозиций сферических бегущих и отраженных волн (типа Даламбера) [3, 4]. Получить такие решения для достаточно больших времен, особенно в

случае многослойной оболочки, крайне сложно, хотя и принципиально возможно. Заметим, что требованию (13) могут удовлетворять не только изотропные, но и определенный класс сферически транслопных материалов, т.е. в случае центральной симметрии поведение некоторых сферических транслопных оболочек будет таким же, как и изотропных.

Если условие (13) не выполняется, то решения в виде суперпозиций бегущих и отраженных волн, скорее всего, не существует, и аналитическое рассмотрение задачи усложняется еще на порядок.

Поэтому для получения достаточно точных решений задачи (9)–(12) и на достаточно длительных временах в случае $D_i > 0$ целесообразно рекомендовать численные методы конечных разностей (МКР). Как показали расчеты, хорошо себя зарекомендовала явная схема МКР типа “крест” второго порядка точности [5].

Если для всех слоев оболочки выполняются требования $D_i = 0$, то краевая задача (1)–(7) точно интегрируется аналитически в квадратурах, а для некоторых типов нагружения – в элементарных функциях.

Покажем, что эти решения также можно использовать как первое приближение для оценки динамического НДС многослойных сфер, для которых $D_i > 0$.

Решение задачи при $D_i = 0$. Главный определитель системы (3) равен нулю и выразить однозначно из нее напряжения через деформации невозможно. Подробно опишем методы получения аналитических решений для одно- и двухслойной сферы. Решения для случая, когда слоев больше двух, можно получить по аналогии, следуя методике, изложенной для двухслойной оболочки.

Однослойная сфера. Учитывая, что $D = 0$, имеем

$$1 - \tilde{\nu} = 2\nu^2. \quad (14)$$

Подставив (14) в (3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно прогиба:

$$\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0, \quad (15)$$

решая которое находим

$$u = y(t)/r^M; \quad M = 1/\nu, \quad (16)$$

где $y(t)$ – функция одной переменной, подлежащая дальнейшей конкретизации.

Подставляя (16) в любое из двух уравнений системы (3), получаем

$$2(\sigma_r - \sigma_\psi) = (2 - M)\sigma_r - \frac{EM^2}{r^{1+M}} y(t). \quad (17)$$

Учитывая, что

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\rho}{r^M} y''(t), \quad (18)$$

и, подставляя (17) и (18) в уравнение движения (1), имеем

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^{2-M}\sigma_r) = \rho r^{2-2M}y'' + EM^2r^{-2M}y. \quad (19)$$

Введем следующее обозначение:

$$\Phi(a, b, c) = \int_a^b \frac{dx}{x^c} = \begin{cases} \frac{1}{1-c}(b^{1-c} - a^{1-c}), & c \neq 1; \\ \ln \frac{b}{a}, & c = 1. \end{cases} \quad (20)$$

Интегрируя (19) по r от внутреннего радиуса оболочки R_1 до наружного R_2 и учитывая граничные условия (6), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $y(t)$:

$$y'' + \omega^2 y = F(t), \quad (21)$$

где

$$F(t) = \frac{R_1^{2-M}P_1(t) - R_2^{2-M}P_2(t)}{\rho\Phi(R_1; R_2; 2M - 2)}; \quad (22)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{EM^2\Phi(R_1; R_2; 2M)}{\rho\Phi(R_1; R_2; 2M - 2)}}.$$

Интегрируя (21) с учетом нулевых начальных условий ($y(0) = y'(0) = 0$), которые следуют из (7), получаем [6] искомую функцию $y(t)$:

$$y(t) = \omega^{-1} \int_0^t F(\xi) \sin \omega(t - \xi) d\xi. \quad (23)$$

Определив $y(t)$ и проинтегрировав уравнение движения в форме (19) от R_1 до текущего радиуса r , находим

$$\sigma_r = r^{M-2} [EM^2y(t)\Phi(R_1; r; 2M) + \rho F(t)\Phi(R_1; r; 2M - 2) - R_1^{2-M}P_1(t) - \rho\omega^2y(t)\Phi(R_1; r; 2M - 2)]. \quad (24)$$

Затем из закона Гука определяется

$$\sigma_\psi = \frac{M}{2}\sigma_r + \frac{EM^2}{2} \frac{y(t)}{r^{1+M}}. \quad (25)$$

В частности, на внутренней поверхности ($r = R_1$) имеем

$$\sigma_\psi = -\frac{M}{2}P_1(t) + \frac{EM^2}{2} \frac{y(t)}{R_1^{1+M}}, \quad (26)$$

аналогично на внешней поверхности ($r = R_2$) –

$$\sigma_\psi = -\frac{M}{2}P_2(t) + \frac{EM^2}{2} \frac{y(t)}{R_2^{1+M}}. \quad (27)$$

Двухслойная сфера. $D_1 = D_2 = 0$.

Во внутренней сфере запишем

$$u = \frac{y_1(t)}{r^{M_1}}, \quad (28)$$

в наружной –

$$u = \frac{y_2(t)}{r^{M_2}}. \quad (29)$$

Обозначив $y_1(t) = y(t)$, из контактного условия (5) получим

$$y_1(t) = y(t); \quad y_2(t) = R_k^{M_2 - M_1} y(t), \quad (30)$$

где R_k – радиус контактной поверхности.

Таким образом, несмотря на двухслойность оболочки, в силу (30) задача сводится к отысканию только одной определяющей функции.

Из (3), (28) и (29), как и в случае однослойной сферы, получим два уравнения типа (17) для внутреннего и наружного слоя. Подставляя их в соответствующие уравнения движения, получаем два уравнения типа (19). Интегрируя первое от R_1 до R_k , второе от R_k до R_2 , получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & R_1^{2-M_1} P_1(t) + R_k^{2-M_1} \sigma_k(t) = \\ & = \rho_1 y'' \Phi(R_1; R_k; 2M_1 - 2) + E_1 M_1^2 y \Phi(R_1; R_k; 2M_1); \\ & - R_k^{2-M_2} \sigma_k(t) - R_2^{2-M_2} P_2(t) = \\ & = \rho_2 y'' R_k^{M_2 - M_1} \Phi(R_k; R_2; 2M_2 - 2) + E_2 M_2^2 R_k^{M_2 - M_1} y \Phi(R_k; R_2; 2M_2), \end{aligned} \quad (31)$$

где $\sigma_k(t)$ – радиальное напряжение на границе контакта $r = R_k$.

Исключая из системы (31) неизвестную $\sigma_k(t)$, приводим систему к уравнению (21), где в качестве ω и $F(t)$ будут использованы другие величины, а именно:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= [R_1^{2-M_1} R_k^{M_1-M_2} P_1(t) - R_2^{2-M_2} P_2(t)]/\Omega; \\
 \omega &= [E_1 M_1^2 R_k^{M_1-M_2} \Phi(R_1; R_k; 2M_1) + \\
 &+ E_2 M_2^2 R_k^{M_2-M_1} \Phi(R_k; R_2; 2M_2)]^{1/2} / \sqrt{\Omega}; \\
 \Omega &= \rho_1 R_k^{M_1-M_2} \Phi(R_1; R_k; 2M_1 - 2) + \rho_2 R_k^{M_2-M_1} \Phi(R_k; R_2; 2M_2 - 2).
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Зная $y(t)$, находим σ_r . Во внутреннем слое ($R_1 \leq r \leq R_k$) эта процедура такая же, как и в случае однослойной оболочки. В наружном слое ($R_k \leq r \leq R_2$) можно интегрировать по r сначала от R_1 до R_k и получить $\sigma_k(t)$, а затем, зная $\sigma_k(t)$, – по r от R_k до r . Однако в случае двухслойной оболочки удобнее сразу интегрировать по r от R_2 до r , не вычисляя $\sigma_k(t)$, с учетом (30). Тогда в наружном слое имеем

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= r^{M_2-2} [E_2 M_2^2 R_k^{M_2-M_1} y(t) \Phi(R_2; r; 2M_2) + \rho_2 F(t) \Phi(R_2; r; 2M_2 - 2) - \\
 &- R_2^{2-M_2} P_2(t) - \rho_2 \omega^2 R_k^{M_2-M_1} y(t) \Phi(R_2; r; 2M_2 - 2)].
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Располагая σ_r , значение σ_ψ вычисляется согласно закону Гука, как и в случае однослойной сферы:

$$\begin{aligned}
 \sigma_\psi &= \frac{M_1}{2} \sigma_r + \frac{E_1 M_1^2}{2} \frac{y(t)}{r^{1+M_1}}, \quad R_1 \leq r \leq R_k; \\
 \sigma_\psi &= \frac{M_2}{2} \sigma_r + \frac{E_2 M_2^2}{2} R_k^{M_2-M_1} \frac{y(t)}{r^{1+M_2}}, \quad R_k \leq r \leq R_2.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Если число N слоев оболочки больше двух, то вместо (30) будем иметь N соотношений:

$$\begin{cases}
 y_1(t) = y(t); \\
 y_2(t) = R_{k_1}^{M_2-M_1} y(t); \\
 y_3(t) = R_{k_2}^{M_3-M_2} R_{k_1}^{M_2-M_1} y(t); \\
 \dots\dots\dots \\
 y_N(t) = R_{k_{N-1}}^{M_N-M_{N-1}} \cdot \dots \cdot R_{k_1}^{M_2-M_1} y(t).
 \end{cases}
 \tag{35}$$

Вместо системы (31) получим систему N уравнений подобного типа. Исключая неизвестные $\sigma_{k_1}(t), \sigma_{k_2}(t), \dots, \sigma_{k_{N-1}}(t)$, система сводится к уравнению типа (21), где выражения для ω и $F(t)$ будут другими: чем больше N , тем они более громоздки. Определив $y(t)$, для вычисления $\sigma_r(t)$ во всех слоях следует использовать промежуточные процедуры вычисления контактных радиальных напряжений как минимум $N - 2$ раза. Величина σ_ψ опре-

деляется по известным σ_r достаточно просто из закона Гука, как в вышеописанных двух случаях.

Поскольку рассматриваются модельные задачи только для одно- и двухслойных сфер, вычислительные процедуры детально воспроизводить не будем.

Исследование точности и сходимости аналитического метода. Можно было бы исследовать сходимость волновых решений при $D_i \rightarrow +0$ к точным, полученным выше для $D_i = 0$, аналитическим методом. Например, подобно тому как это было сделано в [7] для несжимаемых цилиндров в условиях плоской деформации.

Однако такой подход является достаточно громоздким и недостаточно наглядным. В данной работе задачи решаются и аналитически ($D_i = 0$) и численно с помощью МКР ($D_i > 0$), поэтому более целесообразным представляется сопоставление численных результатов для оболочек, у которых D_i достаточно малы, но тем не менее положительны, с аналитическими результатами для тех же оболочек, у которых D_i тождественно равны нулю.

Ограничимся случаем внутреннего импульсного нагружения:

$$P_2(t) \equiv 0; \quad P_1(t) = P_0 e^{-t/t_0} H(t), \quad (36)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Решение уравнения (21) при нагрузке (36) имеет вид

$$y = \frac{A}{\omega^2 + t_0^{-2}} \left(e^{-t/t_0} - \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\omega t_0} \right), \quad (37)$$

причем для однослойной оболочки:

$$A = \frac{P_0 R_1^{2-M}}{\rho \Phi(R_1; R_2; 2M-2)}, \quad (38)$$

для двухслойной сферы:

$$A = \frac{P_0 R_1^{2-M_1} R_k^{M_1-M_2}}{\Omega}. \quad (39)$$

Естественно, что для одно- и двухслойных оболочек (22) и (32) величина ω также будет разная. Устремляя $t_0 \rightarrow \infty$, с помощью формул (37)–(39) получим решения в случае нагружения ступенчатой функцией Хевисайда по внутренней поверхности (для замкнутой сферической оболочки случай достаточно небезынтересный, так как из-за замкнутости объема спад экспоненты импульса давления в (36) может быть достаточно пологим).

При тестовых и дальнейших расчетах полагали $t_0 = 10^{-5}$ с и $t_0 = \infty$ (нагружение функцией Хевисайда). Исследовали двухслойную оболочку, внутренний радиус R_1 которой составляет 0,5 м, наружный $R_2 = 0,6$ м. Толщина слоев была одинаковой, поэтому радиус контактной поверхности $R_k = 0,55$ м $= (R_1 + R_2)/2$.

В качестве материала слоев рассматривали волокнистые стеклопластики с такими характеристиками [8]:

Материал № 1: $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$; $E = 5,7 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $E_0 = 1,4 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $\nu_0 = 0,4$; $\nu = 0,28$. Такой материал имеет достаточно большое D , равное около 2,3. Чтобы оно было пренебрежимо малым (для доказательства сходимости аналитического метода), все вышеперечисленные характеристики, кроме ν , не изменяли, а ν полагали в волновых численных расчетах МКР равным 1,1. При этом величина D уменьшалась в 100 раз. В аналитических расчетах принимали $\nu = 1,1052$, при этом D сводилось к тождественному нулю.

Материал № 2: $\rho = 1500 \text{ кг/м}^3$; $E = 7 \cdot 10^3 \text{ МПа}$; $E_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $\nu_0 = 0,15$; $\nu = 0,14$. Для этого материала величина D также достаточно большая ($\approx 0,26$). Полагая в численных расчетах $\nu = 0,38$, уменьшали D в 30 раз. В аналитических расчетах ($D = 0$) следовало принимать $\nu = 0,3857$.

Считали, что внутренний слой выполнен из материала № 1, наружный – из материала № 2. Характерно то, что материал № 1 значительно жестче (армированный) в радиальном направлении, в то время как материал № 2 – в окружном (сфере изотропии).

Результаты численных (волновых) и аналитических расчетов, представленные на рис. 1, иллюстрируют изменение безразмерных окружных напряжений σ_ψ / P_0 во времени на внутренней (кривые 1, 2) и наружной (кривые 3, 4) поверхностях двухслойной сферы. Видно, что кривые для экспоненциального нагружения и нагружения функцией Хевисайда расположены достаточно близко друг к другу, что свидетельствует о сходимости волновых решений при $D_i \rightarrow 0$ к аналитическим при $D_i = 0$. При экспоненциальном нагружении рассогласование между кривыми практически отсутствует, в то время как при нагружении функцией Хевисайда ($t_0 = \infty$) рассогласование не превышает 2,5%. Это можно объяснить тем, что мощность (энергия) хевисайдовского нагружения внутри замкнутого объема намного выше мощности экспоненциального нагружения. Оболочка получает гораздо больше энергии от нагрузки, поэтому и расхождение кривых визуальнее более заметно. Приведенные на рис. 1 результаты подтверждают точность полученных выше аналитических решений для материалов, у которых $D = 0$.

Таким образом, представленную выше аналитическую методику можно с успехом применять как для материалов при $D = 0$, так и при $D \approx 0$. Однако возникает вопрос, как быть в тех случаях, когда D существенно больше нуля. Естественно, можно применить численный МКР. Оказывается, что задачу с известной степенью точности можно решить и аналитически. Рассмотрим этот вопрос более подробно на конкретных примерах для однослойной и двухслойной сферы, нагруженной экспоненциально изнутри импульсом давления по закону (36).

Однослойная сфера. Пусть имеется КМ, для которого $D > 0$. Заменим его гипотетическим материалом с $D = 0$, используя при этом три способа:

1) значение $\tilde{\nu}$ остается истинным, а ν вычисляется из условия (14):

$$\nu = \sqrt{(1 - \tilde{\nu})/2}; \quad (40)$$

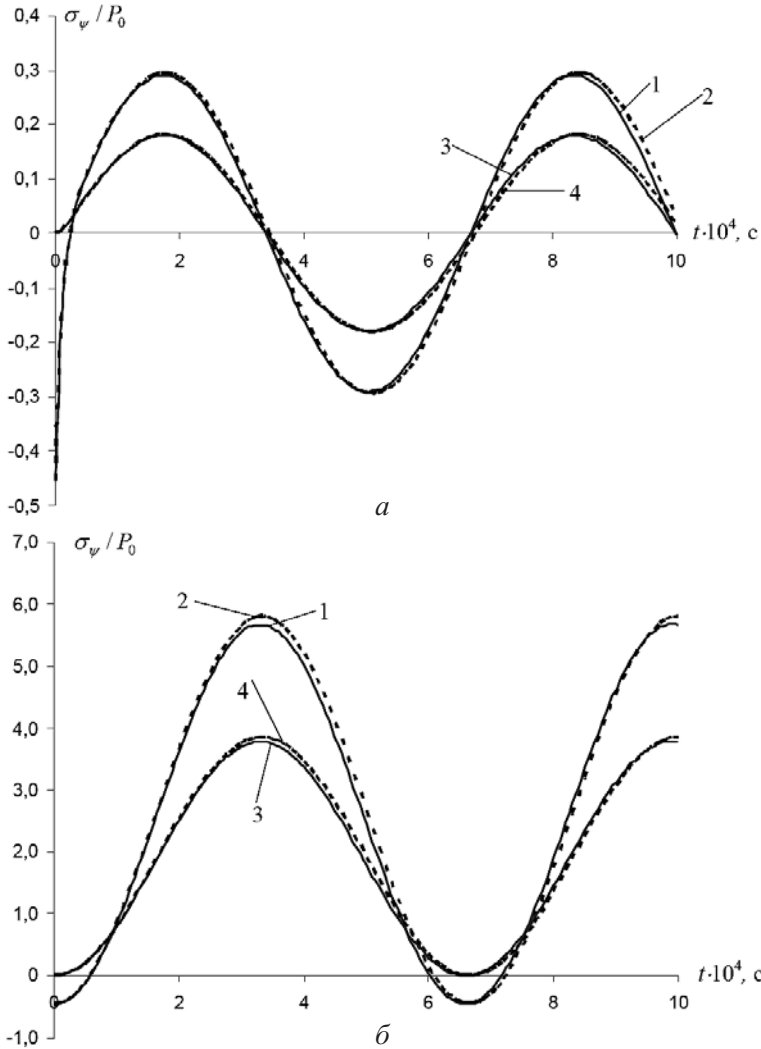


Рис. 1. Тестовые расчеты для экспоненциального нагружения (а) и нагружения функцией Хевисайда (б). (Здесь и на рис. 5: 1, 3 – численный расчет; 2, 4 – аналитический.)

2) материал полагаем несжимаемым: $\nu = \tilde{\nu} = 1/2$;

3) значение ν остается истинным, а $\tilde{\nu}$ вычисляется из (14):

$$\tilde{\nu} = 1 - 2\nu^2. \tag{41}$$

Рассматривали три вида КМ:

материал № 1 (описание приведено выше), $E/E_0 = 4,07$; $D = 2,286$;

материал № 2 (описание приведено выше), $E/E_0 = 0,35$; $D = 0,2583$;

материал № 3 – типа стали: $\rho = 8000 \text{ кг/м}^3$; $E = E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\nu = \nu_0 = \tilde{\nu} = 0,25$; $E/E_0 = 1$; $D = 0,625$.

Результаты численных и аналитических расчетов представлены на рис. 2–4. Их анализ показывает, что определять гипотетический материал 2- и 3-м способами нельзя, можно 1-м. Видно, что кривые 1 и 2 (рис. 1–5) распо-

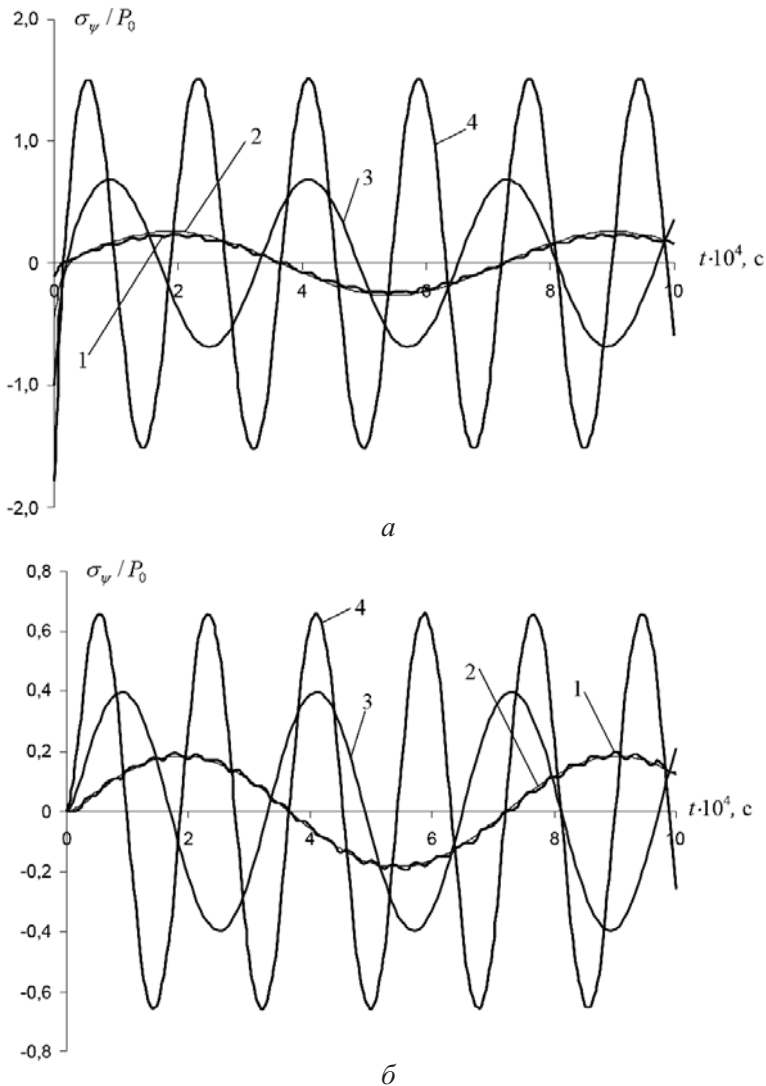


Рис. 2. Изменение σ_ψ/P_0 в зависимости от t для сферы из материала № 1 на внутренней (а) и наружной (б) поверхностях оболочки. (Здесь и на рис. 3, 4: 1 – точное волновое решение для реального КМ, полученное МКР; 2, 3, 4 – аналитические расчеты для гипотетических КМ, определенных по 1-, 2- и 3-му способу соответственно.)

жены близко друг к другу, причем в случаях $E/E_0 \geq 1$ соответствие между кривыми очень хорошее. Для материала № 2 это соответствие несколько хуже, тем не менее аналитический расчет вполне можно использовать как первое приближение. Основная частота колебаний оболочки не изменяется, при этом кривые 2 описывают точные кривые 1 “в среднем”: кривые 1 колеблются относительно кривых 2 с небольшой амплитудой. Далее, заменяя реальный КМ гипотетическим, будем использовать 1-й способ: сохранять реальное \tilde{v} , а приближенное (гипотетическое) v вычислять по формуле (40).

Полученные данные свидетельствуют, что, проводя аналитические расчеты в случае сферической симметрии, даже изотропный материал лучше заменять гипотетическим трансотропным. Оставаясь в рамках изотропии для

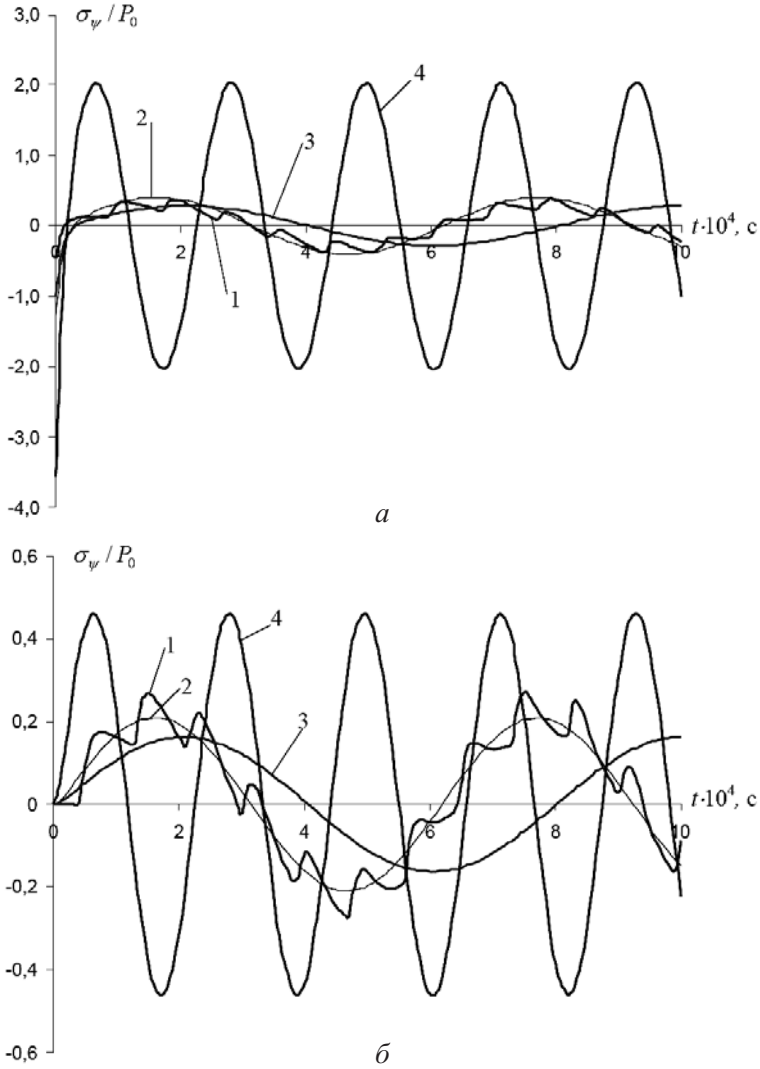


Рис. 3. Изменение σ_ψ / P_0 в зависимости от t для сферы из материала № 2 на внутренней (а) и наружной (б) поверхностях оболочки.

выполнения условия $D = 0$, необходимо считать материал несжимаемым ($\nu = 0,5$). А это, как показывают данные рис. 4, приводит к гораздо худшим результатам, чем замена изотропного материала гипотетическим трансропным по формуле (40).

Двухслойная сфера. Рассматриваются два варианта слоев одинаковой толщины:

- 1) внутренний слой выполнен из КМ № 1, наружный – из КМ № 2;
- 2) внутренний слой выполнен из КМ № 2, наружный – из КМ № 1.

Результаты расчетов представлены на рис. 5. Видно хорошее соответствие между аналитическими (приближенные, $D_i = 0$) результатами и полученными численным МКР для случаев точных постановок задач ($D_i > 0$). При использовании аналитического подхода основная частота радиальных колебаний оболочки не изменяется. При этом кривые, полученные численным

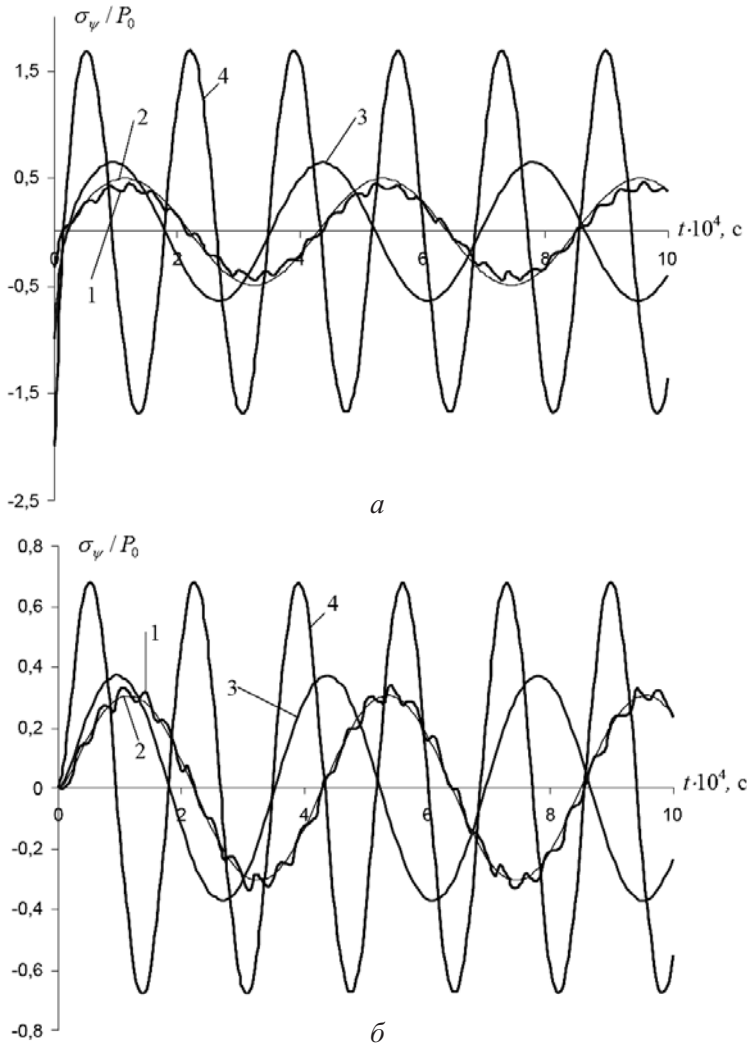


Рис. 4. Изменение σ_{ψ}/P_0 в зависимости от t для сферы из материала № 3 на внутренней (а) и наружной (б) поверхностях оболочки.

методом ($D_i > 0$), колеблются с небольшой амплитудой относительно гладких кривых, полученных аналитически ($D_i = 0$). В некоторых случаях аналитические кривые являются огибающими для соответствующих графиков, полученных МКР, при этом ошибка приближения идет в запас прочности.

Выводы

1. Предложен эффективный аналитический метод интегрирования в квадратурах краевых нестационарных центрально симметричных задач теории упругости для многослойных транслопных сфер в случае $D_i = 0$.

2. Исследована точность метода и сходимость решений при $D_i \rightarrow 0$ к полученным аналитическим решениям при $D_i = 0$.

3. Показано, что для КМ при $D > 0$ полученные аналитические решения можно использовать как эффективное первое приближение.

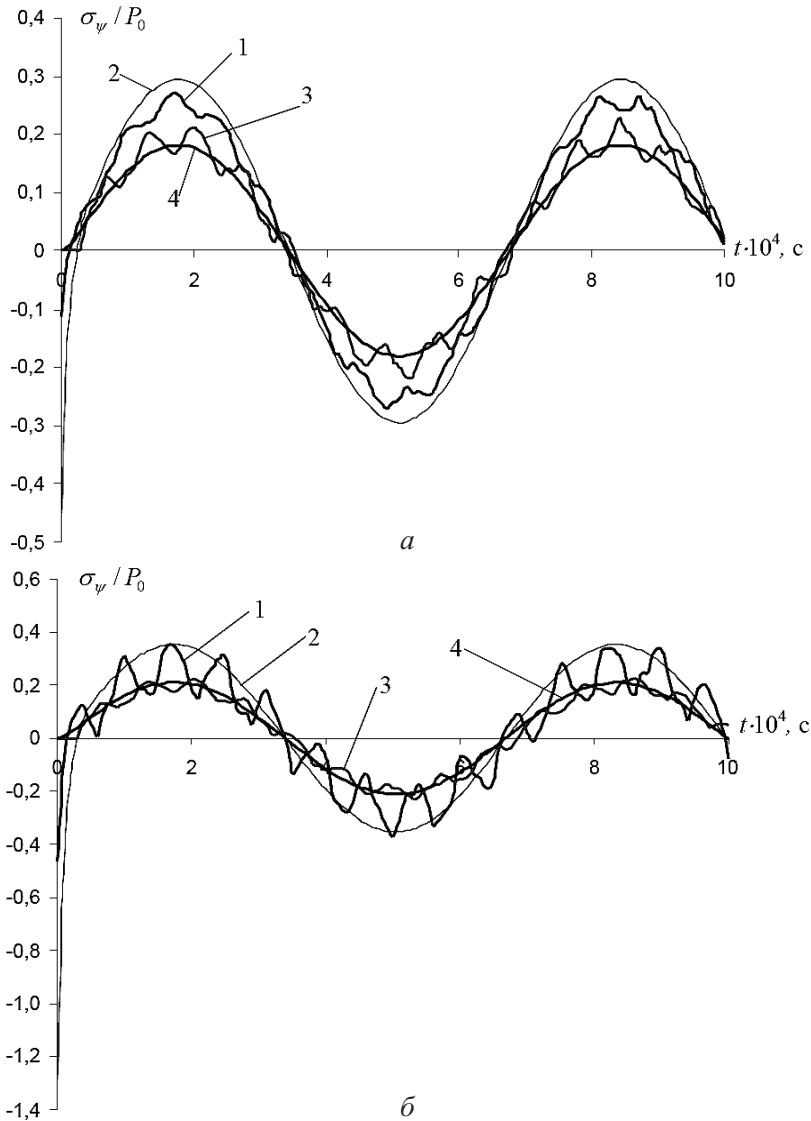


Рис. 5. Изменение σ_{ψ}/P_0 в зависимости от t для двухслойной сферы: *a* – внутренний слой – КМ № 1, наружный – КМ № 2; *б* – внутренний слой – КМ № 2, наружный – КМ № 1.

Резюме

Побудовано аналітичний розв'язок у квадратурах одного класу динамічних центрально симетричних крайових задач теорії пружності для багатослойних трансферних сфер, в яких швидкість звуку в радіальному напрямку прямує до нескінченності. Досліджено збіжність і точність отриманих розв'язків. Показано, що отримані аналітичні розв'язки можна використовувати як перше наближення для випадків, коли швидкість звуку в матеріалах скінченна.

1. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

2. *Иванов А. Г., Сырунин М. А., Федоренко А. Г.* Влияние структуры армирования на предельную деформируемость и прочность оболочек из ориентированного стеклопластика при взрывном нагружении внутри // Прикл. механика и теорет. физика. – 1992. – № 4. – С. 130 – 135.
3. *Новацкий В.* Теория упругости / Пер. с польск. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
4. *Фридман Л. И.* Решение динамической задачи теории упругости в криволинейных координатах // Пробл. прочности. – 1976. – № 5. – С. 56 – 61.
5. *Галиев Ш. У., Бабич Ю. Н., Жураховский С. В. и др.* Численное моделирование волновых процессов в ограниченных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 200 с.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 655 с.
7. *Ромащенко В. А.* Решения динамических задач для несжимаемых и слабо сжимаемых спирально ортотропных неоднородных толстостенных цилиндров // Прикл. математика и механика. – 2007. – 71, вып. 1. – С. 56 – 65.
8. *Ашкенази Е. К., Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.

Поступила 23. 04. 2009