

Влияние конструктивных параметров виброударной системы на ее динамику

В. А. Баженов, О. С. Погорелова, Т. Г. Постникова

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

Анализируется зависимость характеристик динамического поведения нелинейной виброударной системы от изменения некоторых ее параметров: коэффициентов демпфирования; модуля упругости и вида поверхности одного из соударяющихся тел. Установлено существование двухударного субгармонического режима колебаний системы.

Ключевые слова: виброударное движение, виброударная площадка, моделирование удара, сила контактного взаимодействия, полуразмах колебаний, силы сопротивления.

Постановка задачи. Поскольку виброударные системы достаточно широко применяются в технике, исследование динамических процессов в них представляет интерес [1]. Для специалистов, занимающихся созданием оборудования для современного строительного производства, такие исследования также актуальны [2].

В настоящей работе для исследования выбрана двухмассовая система с двумя степенями свободы, соответствующая виброударной площадке, применяемой в строительном производстве для уплотнения бетонных смесей и формования бетонных изделий [2–4].

Простейший вариант математической модели двухмассовой виброударной площадки без закрепления формы показан на рис. 1.

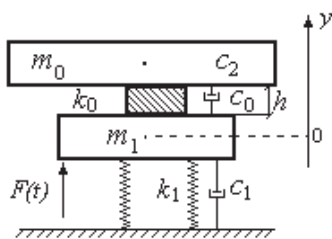


Рис. 1. Расчетная схема виброударной площадки.

Стол площадки массой m_1 крепится к фундаменту двумя линейными виброизолирующими пружинами с суммарной жесткостью k_1 . Двигатели, установленные под столом, генерируют возмущающую силу $F(t)$. К столу крепится упругая прокладка (ограничитель колебаний) толщиной h с линейной жесткостью k_0 , на которой лежит форма с бетонной смесью массой m_0 . Форма к прокладке не крепится и может от нее отрываться.

Из состояния равновесия форма и площадка начинают совместное вертикальное движение вдоль оси y до тех пор, пока форма не оторвется от площадки. В состоянии отрыва форма и площадка движутся раздельно до

момента пока форма не упадет на площадку. Происходит удар, во время которого тела опять движутся совместно до момента отрыва формы от площадки, и т.д. [5, 6].

Эта модель обладает некоторыми особенностями, а именно: большая масса падающего тела (формы с бетоном); мягкость и податливость одной из контактирующих поверхностей (прокладка); отрыв одного тела (формы) от другого (прокладки) и их раздельное движение.

Совместное движение стола с формой описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \omega_0^2[h - (y_0 - y_1)] - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \omega_0^2 \chi[h - (y_0 - y_1)] - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_0 + 2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 + \frac{1}{m_1}F(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{k_0}{m_0} &= \omega_0^2; & \frac{k_1}{m_1} &= \omega_1^2; & \frac{c_0}{m_0} &= 2\xi_0\omega_0; & \frac{c_1}{m_1} &= 2\xi_1\omega_1; \\ & & \frac{c_2}{m_0} &= 2\xi_2\omega_0; & \frac{m_0}{m_1} &= \chi; \end{aligned} \quad (2)$$

y_0, y_1 – текущие координаты формы и стола соответственно.

Начальные условия при $t=0$ таковы:

$$\varphi = 0; \quad y_1 = 0; \quad \dot{y}_1 = 0; \quad y_0 = h - \lambda_{ст}; \quad \dot{y}_0 = 0. \quad (3)$$

Внешняя нагрузка от вибраторов $F(t)$ считается гармонической, $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Силы упругости в прокладке имеют вид $F_{k0} = k_0 \Delta l_0 = k_0[h - (y_0 - y_1)]$, в виброизолирующих пружинах – $F_{k1} = k_1 \Delta l_1 = k_1(y_1 - \lambda_{ст})$, где $\lambda_{ст}$ – статическая деформация пружин, $\lambda_{ст} = (P_0 + P_1)/k_1$. Силы сопротивления приняты пропорциональными первой степени скорости: в бетонной смеси имеем $F_{демп2} = c_2 \dot{y}_0$, в прокладке – $F_{демп0} = c_0 \dot{y}_0$, в виброизолирующих пружинах – $F_{демп1} = c_1 \dot{y}_1$.

Раздельное движение тел описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g - 2\xi_2\omega_0\dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

При падении формы на стол площадки (на прокладку) происходит удар, во время которого форма и стол движутся совместно. Ранее [5] показано, что в рассматриваемой модели удар лучше всего моделировать силой контактного взаимодействия $F_{уд} = F_{кон}$, которая описывается законом Герца [7–9]:

$$F_{уд} = F_{кон} = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (5)$$

где $\alpha(t)$ – относительное сближение тел, $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$;

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}};$$

q , A и B – константы, характеризующие местную геометрию зоны контакта;

$$\delta_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0 \pi}; \quad \delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi};$$

μ_i и E_i – коэффициенты Пуассона и модули Юнга для обоих тел.
Уравнения совместного движения тел во время удара имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \frac{K}{m_0} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0 \dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \frac{K}{m_1} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2\xi_1 \omega_1 \dot{y}_1 + 2\xi_0 \omega_0 \chi \dot{y}_0 + \\ &+ \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Числовые характеристики площадки использованы в соответствии с нормативной литературой [3, 4] и представлены ниже:

m_0 , кг	15000	h , м	0,0275
m_1 , кг	7400	F_0 , Н	$2,44 \cdot 10^5$
k_0 , Н/м	$3,0 \cdot 10^8$	ω , Гц	25
k_1 , Н/м	$1,278 \cdot 10^6$	φ , рад	0

В уравнения движения тел виброударной площадки (6) кроме параметров, заданных таблицей, входят коэффициенты демпфирования ξ_0, ξ_1, ξ_2 , которые определяют силы сопротивления; модули упругости E_0, E_1 и коэффициенты Пуассона μ_0, μ_1 формы и прокладки соответственно, а также константы A, B и q , характеризующие местную геометрию контактирующих поверхностей. Последние две группы параметров входят в описание силы Герца (5) и таким образом связаны со способом моделирования удара.

Проследим, какое влияние оказывают эти параметры на динамику виброударной системы.

1. Влияние сил сопротивления на динамику системы. Чтобы выявить влияние на динамику виброударной системы сил сопротивления, которые описываются с помощью коэффициентов демпфирования ξ_0, ξ_1, ξ_2 , фиксируем остальные параметры системы:

$E_0, 10^8$ Н/м ²	2000	μ_1	0,4
$E_1, 10^8$ Н/м ²	3	$A, B, \text{м}^{-2}$	$A = B = 0,1$
μ_0	0,3	q	0,318

1.1. **Влияние силы сопротивления в бетонной смеси.** Сила сопротивления в бетонной смеси, которая уплотняется в форме, характеризуется коэффициентом демпфирования ξ_2 . Изменяя ξ_2 и фиксируя $\xi_0 = 0,02$, $\xi_1 = 0,02$, не изменяя остальные параметры, найдем зависимость характеристик движения от коэффициента демпфирования ξ_2 . В качестве примера на рис. 2 представлен одноударный гармонический режим колебаний, полученный при $\xi_2 = 0,03$.

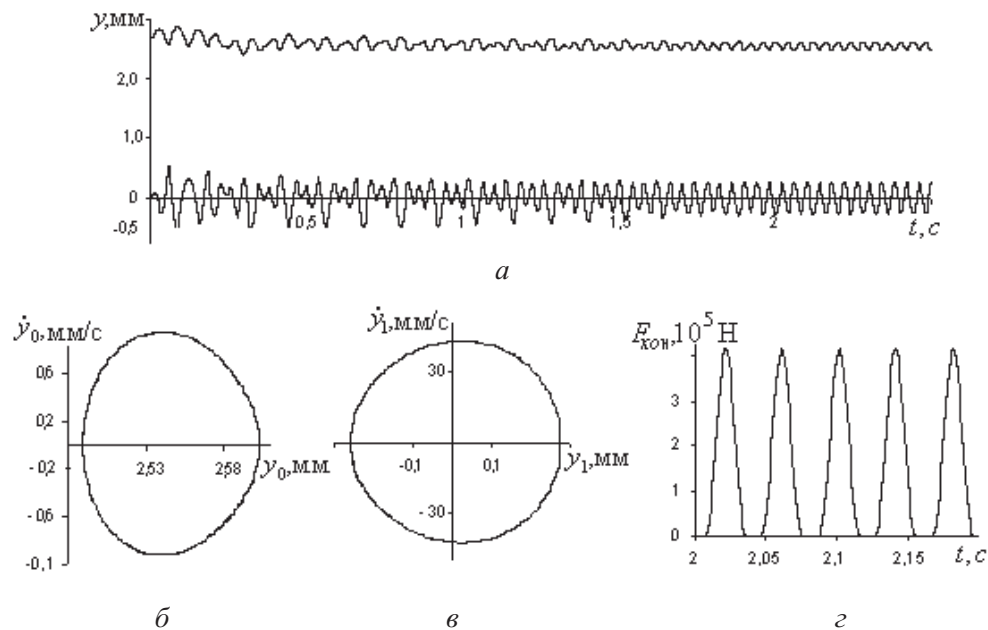


Рис. 2. Одноударный режим колебаний: а – закон перемещений формы и стола площадки; б, в – фазовые траектории обоих тел виброударной системы; з – изменение контактной силы во времени.

Максимальные значения контактной силы и полуразмахов колебаний стола площадки в установившемся режиме приведены в табл. 1. Полуразмахи вычисляются по стандартной формуле

$$A_1 = \frac{|y_{1,\max}| + |y_{1,\min}|}{2}; \quad A_0 = \frac{|y_{0,\max}| + |y_{0,\min}|}{2}, \quad (7)$$

где $y_{0,\max}$, $y_{0,\min}$, $y_{1,\max}$, $y_{1,\min}$ взяты относительно своих математических ожиданий.

Зависимости максимума контактной силы и полуразмахов колебаний стола от коэффициента демпфирования в бетонной смеси ξ_2 представлены также на рис. 3.

Как видно из данных табл. 1 и рис. 3, изменение коэффициента демпфирования в бетонной смеси в общепринятых пределах [10] практически не изменяет полуразмахов колебаний стола площадки и мало изменяет величину силы контактного взаимодействия.

Максимальные значения контактной силы и полуразмахов колебаний стола площадки в зависимости от ξ_2

ξ_2	Максимум контактной силы, 10^5 Н	Полуразмах стола
0,005	4,15888	2,670
0,010	4,15542	2,6675
0,020	4,15489	2,669
0,030	4,15392	2,6675
0,050	4,15102	2,664
0,100	4,13607	2,656
0,500	3,90490	2,579

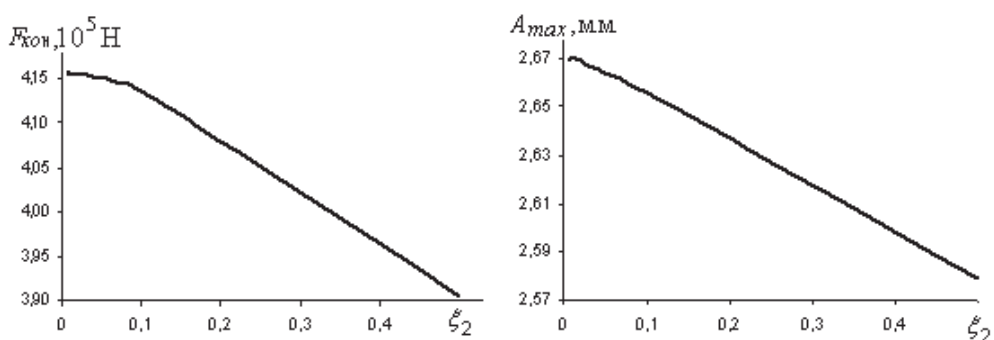


Рис. 3. Зависимость максимума контактной силы и полуразмахов колебаний стола от силы сопротивления в бетоне.

1.2. **Влияние силы сопротивления в прокладке.** Сила сопротивления в прокладке характеризуется коэффициентом демпфирования ξ_0 . Изменяя ξ_0 и фиксируя $\xi_1 = 0,02$, $\xi_2 = 0,03$, не изменяя остальные параметры, получаем зависимость характеристик движения от коэффициента демпфирования ξ_0 . На рис. 2 представлен одноударный гармонический режим колебаний при $\xi_0 = 0,02$.

Однако в диапазоне значений $0,006 \leq \xi_0 \leq 0,012$ одноударный гармонический режим теряет устойчивость, и в системе реализуется двухударный субгармонический режим колебаний тел виброударной системы. На рис. 4 приведены результаты исследований при $\xi_0 = 0,01$.

Рис. 5 иллюстрирует силу контактного взаимодействия $F_{кон}(t)$ в крупном масштабе времени и возмущающую силу $F(t)$. Видно, что период контактной силы вдвое больше периода внешней нагрузки (возмущающей силы), что соответствует субгармоническим колебаниям.

Значения максимума контактной силы и полуразмахов колебаний стола площадки в установившемся одноударном и двухударном режимах колебаний приведены в табл. 2 и 3 соответственно.

Зависимость максимума контактной силы и полуразмахов колебаний стола от коэффициента демпфирования в прокладке ξ_0 представлена на рис. 6.

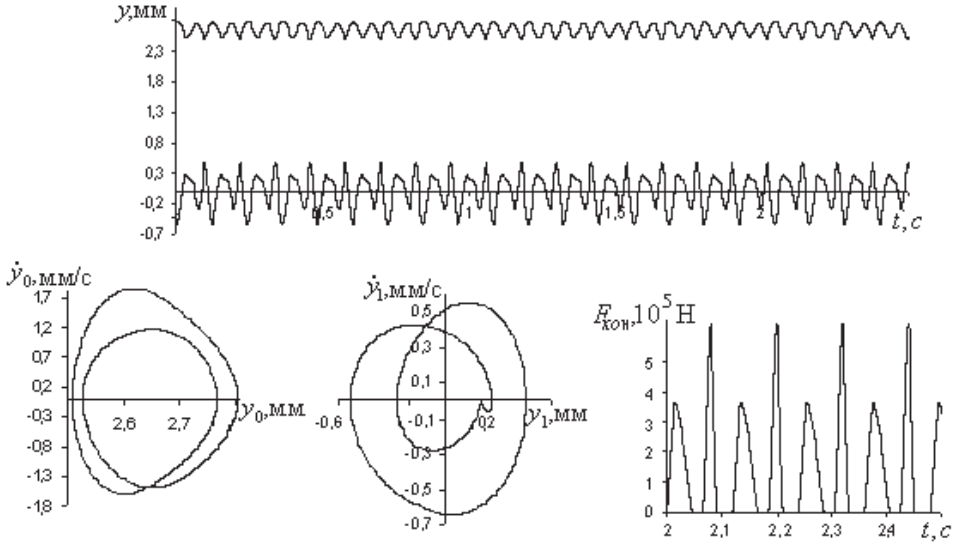


Рис. 4. Двухударный субгармонический режим колебаний.

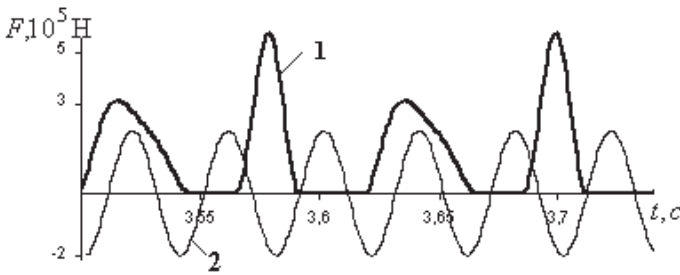


Рис. 5. Контактная (1) и возмущающая (2) силы в двухударном режиме колебаний.

Как видно из данных табл. 2 и 3 и рис. 6, с изменением коэффициента демпфирования в прокладке согласно общепринятым пределам [10] практически не изменяются значения полуразмахов стола площадки и мало изменяется величина силы контактного взаимодействия для всех ξ_0 , которые соответствуют одноударному режиму колебаний. При возникновении двухударного режима в указанном выше ($0,006 \leq \xi_0 \leq 0,012$) диапазоне значений ξ_0 (табл. 3) как контактная сила, так и полуразмахи колебаний стола имеют другие значения, хотя в пределах этого режима они изменяются также незначительно. Отметим, что при моделировании удара упругой силой [5] не удалось зафиксировать явление потери устойчивости одноударного гармонического режима в этом диапазоне значений ξ_0 и переход виброударной системы в двухударный субгармонический режим колебаний.

1.3. Влияние силы сопротивления в виброизолирующих пружинах. Сила сопротивления в виброизолирующих пружинах характеризуется коэффициентом демпфирования ξ_1 . Изменяя ξ_1 и фиксируя $\xi_0 = 0,02$, $\xi_2 = 0,03$, не изменяя остальные параметры, получаем зависимость характеристик движения от коэффициента демпфирования ξ_1 . На рис. 2 представлен одноударный гармонический режим колебаний при $\xi_1 = 0,02$.

Т а б л и ц а 2

Максимальные значения контактной силы и полуразмахов колебаний стола площадки в одноударном режиме в зависимости от ξ_0

ξ_0	Максимум контактной силы, 10^5 Н	Полуразмах стола, мм
0,005	4,15534	2,6730
0,013	4,15412	2,6685
0,014	4,15415	2,6670
0,015	4,15408	2,6700
0,020	4,15392	2,6675
0,030	4,15363	2,6610
0,040	4,14929	2,6560
0,050	4,14956	2,6500
0,060	4,14357	2,6425
0,070	4,13989	2,6350
0,080	4,13565	2,6255
0,100	4,12706	2,6035
0,200	4,01209	2,4315
0,300	3,71938	2,1615
0,400	3,38388	1,9270
0,500	Совместные колебания	

Т а б л и ц а 3

Максимальные значения контактной силы и полуразмахов колебаний стола площадки в двухударном режиме в зависимости от ξ_0

ξ_0	Максимум контактной силы, 10^5 Н	Полуразмах стола, мм
0,006	6,38451	4,868
0,007	6,27327	4,866
0,008	6,26875	4,8885
0,009	6,26875	4,9020
0,011	5,05787	4,2750
0,012	4,98269	4,1040

Значения максимума силы контактного взаимодействия и полуразмахов колебаний стола площадки в установившемся режиме приведены в табл. 4.

Зависимость максимума контактной силы и полуразмахов стола от коэффициента демпфирования в виброизолирующих пружинах ξ_1 представлена также на рис. 7.

Как видно из данных табл. 4 и рис. 7, с изменением коэффициента демпфирования в виброизолирующих пружинах согласно общепринятым пределам [10] также практически не изменяются полуразмахи стола площадки и мало изменяется величина силы контактного взаимодействия.

Т а б л и ц а 4

Максимальные значения контактной силы и полуразмахов колебаний стола площадки в зависимости от ξ_1

ξ_1	Максимум контактной силы, 10^5 Н	Полуразмах стола, мм
0,005	4,15516	2,6680
0,010	4,15510	2,6670
0,015	4,15454	2,6670
0,020	4,15392	2,6675
0,030	4,15367	2,6660
0,050	4,15166	2,6630
0,100	4,14485	2,6520
0,500	3,97710	2,4210

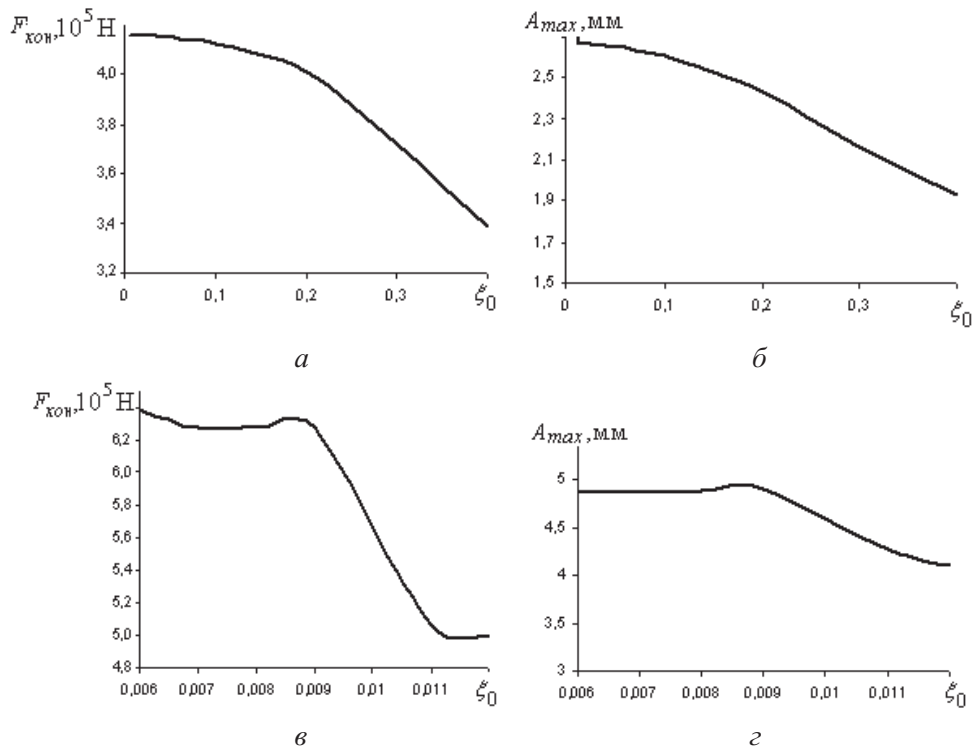


Рис. 6. Зависимость максимума контактной силы и полуразмахов стола от силы сопротивления в прокладке для одно- (а, б) и двухударного (в, г) режимов.

2. Влияние модуля упругости прокладки на динамику системы. Как отмечалось выше, в формулу силы контактного взаимодействия по Герцу (5), моделирующей удар, входят модули упругости и коэффициенты Пуассона обоих соударяющихся тел – формы с бетоном и резиновой прокладки. Форму во всех исследованиях считаем стальной с модулем упругости $E_0 = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м² и коэффициентом Пуассона $\mu_0 = 0,3$. Как показывают исследования, характер

движения тел виброударной площадки сильно зависит от величины модуля упругости резиновой прокладки E_1 . Чтобы обнаружить влияние модуля упругости прокладки на динамику виброударной системы, фиксируем параметры, приведенные ниже:

$E_0, 10^8 \text{ Н/м}^2$	2000	q	0,318
μ_0	0,3	ξ_2	0,03
μ_1	0,4	ξ_0	0,02
$A, B, \text{ м}^{-2}$	$A = B = 0,1$	ξ_1	0,02

Известно, что модуль упругости для различных видов резин на четыре порядка меньше модуля упругости стали. Однако при таких значениях модуля упругости силы удара, которая развивается в системе в соответствии с законом Герца (5), не хватает, чтобы оторвать форму от стола площадки, и оба тела все время движутся совместно [5]. С увеличением значения модуля упругости прокладки E_1 в системе достаточно быстро устанавливается гармонический одноударный режим колебаний с отрывом формы от прокладки. На рис. 2 приведены перемещения, фазовые траектории и сила контактного взаимодействия в таком режиме при значении модуля упругости прокладки $E_1 = 3,0 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$.

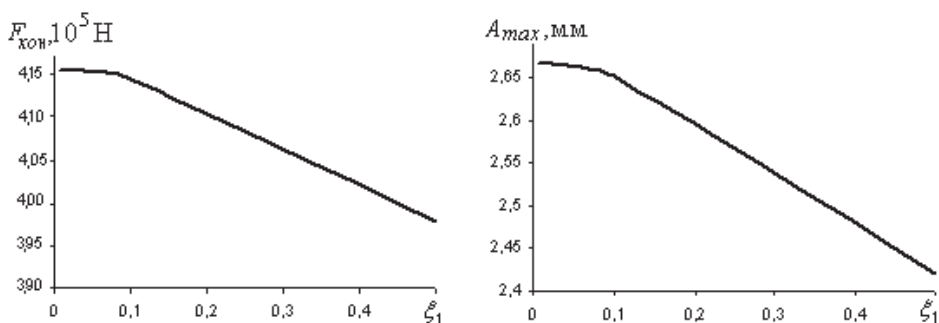


Рис. 7. Зависимость максимума контактной силы и полуразмахов стола от силы сопротивления в пружинах.

В табл. 5 представлены значения максимума силы контактного взаимодействия и полуразмахов колебаний стола и формы виброударной площадки в установившемся одноударном гармоническом режиме при различных значениях модуля упругости прокладки. Как видно, с повышением модуля упругости прокладки контактная сила увеличивается, полуразмахи колебаний стола также незначительно возрастают, а полуразмахи колебаний формы изменяются очень мало.

Отметим, что в некотором диапазоне значений модуля упругости прокладки ($4,35 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2 < E_1 < 5,7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$) при шаге интегрирования уравнений движения (1), (4), (6), который был принят в исследованиях, получаем двухударный субгармонический режим колебаний [6], и, лишь существенно уменьшая шаг интегрирования, при этих значениях модуля упругости прокладки выходим на одноударный гармонический режим.

Т а б л и ц а 5

**Максимальные значения контактной силы и полуразмахов колебаний стола
и формы площадки в зависимости от E_1**

E_1 , 10^8 Н/м^2	Максимум контактной силы, 10^5 Н	Полуразмах стола, мм	Полуразмах формы, мм
3,0	4,15	2,67	0,563
4,0	4,71	2,78	0,616
4,2	4,82	2,80	0,624
4,3	4,86	2,81	0,693
5,0	5,12	2,85	0,650
5,5	5,32	2,88	0,663
5,7	5,47	2,90	0,707
6,0	5,59	2,91	0,686
7,0	5,95	2,95	0,693
8,0	6,28	2,98	0,709

3. Влияние вида поверхностей соударяющихся тел на динамику системы. Выше отмечалось, что сила контактного взаимодействия, которая моделирует удар и описывается законом Герца (5), зависит не только от материала соударяющихся тел, но и от местной геометрии зоны контакта, характеризуемой константами A , B , q [7, 8]. Примем, что одна поверхность (форма) является плоскостью, а другая (прокладка) – сферой с очень большим радиусом. Посмотрим, как от значения этого радиуса зависят величины силы контактного взаимодействия и полуразмахов колебаний стола виброударной площадки. Для этого зафиксируем остальные параметры:

E_0 , 10^8 Н/м^2	2000	ξ_2	0,03
E_1 , 10^8 Н/м^2	3	ξ_0	0,02
μ_0	0,3	ξ_1	0,02
μ_1	0,4		

При соударении поверхностей, одна из которых является плоскостью, а другая сферой радиуса R_1 , константы A и B находятся как $A = B = (2R_1)^{-1}$, константа q зависит от отношения A/B , $q(1) = 0,318$ [7, 8]. На рис. 2 представлен результат, полученный при значениях коэффициентов $A = B = 0,1$, соответствующих радиусу сферы $R_1 = 5 \text{ м}$. При значениях коэффициентов $A = B = 0,01$ ($R_1 = 50 \text{ м}$) получаем картину движения, показанную на рис. 8.

В табл. 6 приведены значения максимума силы контактного взаимодействия и полуразмахов колебаний стола площадки, соответствующие установившимся режимам, при различном радиусе сферической поверхности прокладки.

Видно, что уменьшение радиуса сферы одной из контактирующих поверхностей, в данном случае прокладки, приводит к снижению контактной

силы и полуразмахов колебаний стола площадки. Следовательно, изготавливая поверхность прокладки в виде сферы и подбирая радиус сферы, можно оказывать влияние на величины силы контактного взаимодействия и полуразмахов колебаний тел виброударной площадки.

Т а б л и ц а 6

Максимальные значения контактной силы и полуразмахов колебаний стола площадки в зависимости от размаха сферы

$R_1, \text{ м}$	$A = B$	Максимум контактной силы, 10^5 Н	Полуразмах стола, мм
3,3	0,150	3,773	2,566
5,0	0,100	4,154	2,668
50,0	0,010	6,730	3,021
500,0	0,001	10,618	3,220

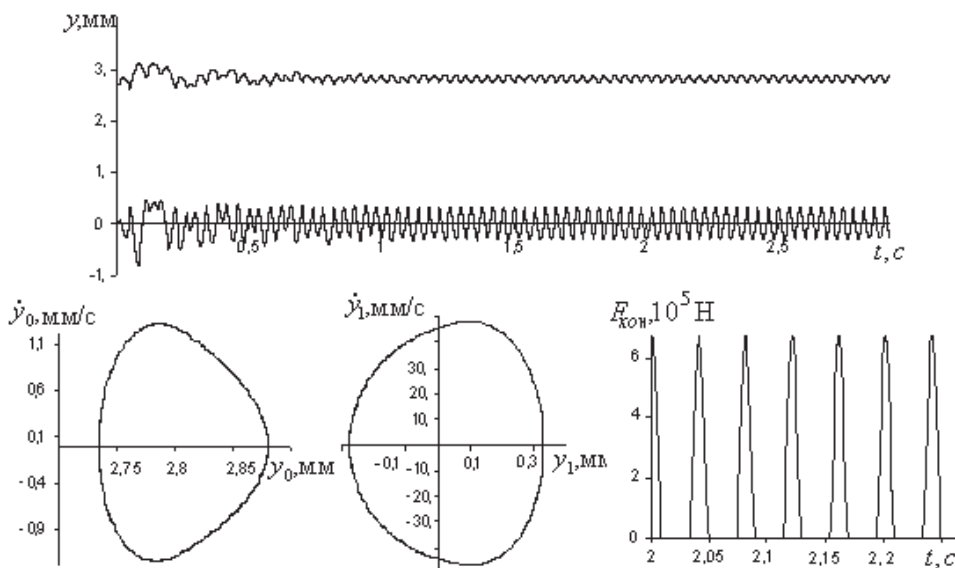


Рис. 8. Одноударный режим колебаний при большом радиусе сферической поверхности прокладки.

Выводы

1. Изменение в общепринятых пределах коэффициентов демпфирования, характеризующих силы сопротивления как в бетонной смеси, так и в прокладке, а также в виброизолирующих пружинах, незначительно изменяет величину силы контактного взаимодействия, моделирующей удар, и практически не изменяет величины полуразмахов колебаний стола виброплощадки и формы с бетоном. Однако в некотором узком диапазоне значений коэффициента демпфирования в прокладке имеют место потеря устойчивости одноударного гармонического режима колебаний площадки и возникновение двухударного субгармонического режима колебаний.

2. Значение модуля упругости прокладки заметно влияет на величину силы контактного взаимодействия. С ростом модуля упругости последняя повышается, несколько увеличиваются также полуразмахи колебаний стола площадки.

3. На величины силы контактного взаимодействия и полуразмахов колебаний стола площадки оказывает также влияние местная геометрия зоны контакта. В частности, если считать прокладку сферой, имеющей большой радиус, то его увеличение приводит к росту как контактной силы, так и полуразмахов колебаний стола.

Резюме

Аналізується залежність характеристик динамічної поведінки нелінійної віброударної системи від зміни деяких її параметрів: коефіцієнтів демпфірування; модуля пружності та виду поверхні одного з тіл, що співударяються. Встановлено існування двоударного субгармонічного режиму коливань системи.

1. *Бабицкий В. И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
2. *Назаренко І. І.* Машини для виробництва будівельних матеріалів: Підручник. – Київ: КНУБА, 1999. – 488 с.
3. *Гусев Б. В., Зазимко В. Г.* Вибрационная технология бетона. – Киев: Будівельник, 1991. – 160.
4. *Рекомендации по вибрационному формованию железобетонных изделий.* – М.: НИИЖБ, 1986. – 78 с.
5. *Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Гончаренко С. Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах // Пробл. прочности. – 2009. – № 4. – С. 69 – 77.
6. *Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Гончаренко С. Н.* Аналіз динаміки ударно-вібраційного майданчика при зміні його параметрів // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. зб. – 2008. – Вип. 82. – С. 71 – 82.
7. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Стройиздат, 1965. – 448 с.
8. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
9. *Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Лукьянченко О. А.* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия // Пробл. прочности. – 2008. – № 6. – С. 82 – 90.
10. *Справочник по динамике сооружений / Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича.* – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.

Поступила 19. 03. 2009