УДК 539.3

О шестимерных гиперповерхностях прочности второго порядка ортотропных материалов

В. А. Ромащенко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Для общего случая напряженного состояния строго получены необходимые и достаточные условия устойчивости. Этим условиям должны удовлетворять неопределенные коэффициенты квадратичных критериев прочности ортотропных материалов, чтобы предельная гиперповерхность прочности второго порядка в шестимерном пространстве напряжений имела физический смысл.

Ключевые слова: ортотропия, критерии прочности, предельная гиперповерхность прочности второго порядка, квадратичная форма, шестимерное пространство напряжений, условия устойчивости.

Композитные материалы (КМ) широко применяются в различных отраслях современной техники. Как правило, такие материалы характеризуются неоднородностью структуры (гетерогенностью) и во многих случаях существенной анизотропией физико-механических свойств. Для оценки прочности КМ, находящихся в сложном напряженном состоянии, необходимо знать критерии предельных состояний (критерии прочности), устанавливающие допустимые границы напряжений, в которых материал может работать без разрушения. Предельными являются состояния, при которых КМ переходит из упругого (либо упругопластического) состояния к разрушению. Для оценки прочности КМ чаще всего используется феноменологический макроструктурный подход, согласно которому неоднородный композит рассматривается как сплошная, в общем случае анизотропная, среда. Математическая модель последней строится на базе экспериментальных данных. Большинство современных КМ вполне адекватно описывается моделью гомогенного ортотропного тела либо теми или иными частными случаями этой модели.

Феноменологические критерии прочности не выводятся аналитически, они постулируются или предлагаются на основе обобщения экспериментальных данных. В последнее время широко используются квадратичные критерии прочности ортотропного тела [1–8], которые в ряде литературных источников названы критериями Цая–Ву [8]. Эти критерии учитывают различие между прочностью при растяжении и сжатии, обладают максимально возможной гибкостью, не содержат избыточных параметров, позволяют легко определять главные оси прочности и др.

Естественно полагать, что главные оси анизотропии x, y, z ортотропного материала являются одновременно главными осями как для упругих, так и прочностных характеристик. Кроме того, в большинстве случаев сдвиговая прочность композита не зависит от знака касательных напряжений. Тогда квадратичный критерий прочности в координатах x, y, z имеет вид [1–8]

$$\Phi = \sigma_x\left(\frac{1}{S_x^+}-\frac{1}{S_x^-}\right)+\sigma_y\left(\frac{1}{S_y^+}-\frac{1}{S_y^-}\right)+\sigma_z\left(\frac{1}{S_z^+}-\frac{1}{S_z^-}\right)+\frac{\sigma_x^2}{S_x^+S_x^-}+\frac{\sigma_y^2}{S_y^+S_y^-}+\frac{\sigma_z^2}{S_z^+S_z^-}+$$

$$+\frac{\tau_{xy}^2}{T_{xy}^2}+\frac{\tau_{yz}^2}{T_{yz}^2}+\frac{\tau_{zx}^2}{T_{zx}^2}+2a_{xy}\sigma_x\sigma_y+2a_{yz}\sigma_y\sigma_z+2a_{zx}\sigma_z\sigma_x \le 1, \qquad (1)$$

где σ_i, τ_{ij} – компоненты тензора напряжений; S_i^+, S_i^- – пределы прочности при растяжении (+) и сжатии (–) в i-м главном направлении анизотропии; T_{ij} – пределы прочности при чистом сдвиге в соответствующих главных плоскостях ij анизотропии; $i, j = x, y, z$; $i \neq j$.

Критерий (1) конкретизирован на основе девяти простейших экспериментов: три на одноосное растяжение, три на одноосное сжатие и три на чистый сдвиг. Он тождественно удовлетворяет (становится равным единице) этим девяти экспериментальным (реперным) точкам в шестимерном пространстве напряжений при любых значениях трех параметров a_{ij}. В свою очередь, эти параметры должны удовлетворять некоторым условиям, чтобы предельная гиперповерхность прочности $\Phi = 1$ имела физический смысл: была односвязной и замкнутой либо в крайнем случае допускала существование не более одного направления (луча или прямой) с бесконечной прочностью. Вопросы математически строгого обоснования этих необходимых и достаточных условий (так называемые условия устойчивости), а также условий выпуклости, односвязности, замкнутости либо открытости, возможных и допустимых геометрических форм шестимерной предельной гиперповерхности прочности ортотропного материала (1) в настоящее время недостаточно изучены. В частности, в известных работах [1–7] на основе анализа двухосных плоских напряженных состояний в главных плоскостях анизотропии выводятся только необходимые условия устойчивости, которые, как будет показано ниже, не всегда гарантируют существование физически допустимой гиперповерхности прочности в шестимерном пространстве напряжений для общего случая трехосного напряженного состояния.

Из множества шестимерных поверхностей второго порядка вышеперечисленным требованиям удовлетворяют только три: эллипсоиды (замкнутые и выпуклые); эллиптические параболоиды (односторонне открытые и выпуклые) либо эллиптические цилиндры (двухсторонне открытые и почти выпуклые). Данная работа посвящена строгому определению необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять неопределенные коэффициенты a_{ij} в (1), чтобы предельная гиперповерхность $\Phi = 1$ принадлежала одному из трех вышеуказанных физически обоснованных типов.

Введем безразмерные переменные

$$\Sigma_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{S_i^+ S_i^-}}, \qquad \Theta_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{T_{ij}}, \qquad i, j = x, y, z; \; i \neq j \tag{2}$$

и запишем предельную гиперповерхность $\Phi = 1$ в виде

$$\Phi = \Sigma_x^2 + \Sigma_y^2 + \Sigma_z^2 + 2A_{xy}\Sigma_x\Sigma_y + 2A_{yz}\Sigma_y\Sigma_z + 2A_{zx}\Sigma_z\Sigma_x +$$

$$+ \Theta_{xy}^2 + \Theta_{yz}^2 + \Theta_{zx}^2 + 2B_x\Sigma_x + 2B_y\Sigma_y + 2B_z\Sigma_z = 1, \tag{3}$$

где

$$A_{ij} = a_{ij}\sqrt{S_i^+ S_i^- S_j^+ S_j^-}; \qquad B_i = \frac{1}{2}\left(\sqrt{S_i^- / S_i^+} - \sqrt{S_i^+ / S_i^-}\right). \tag{4}$$

1. Рассмотрим случай отсутствия касательных напряжений:

$$\Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{zx} = 0. \tag{5}$$

С учетом (5) предельная гиперповерхность (3) приобретает вид классической квадратичной формы – поверхности второго порядка в трехмерном пространстве нормальных напряжений в декартовых координатах Σ_x, Σ_y, Σ_z:

$$\Sigma_x^2+\Sigma_y^2+\Sigma_z^2+2A_{xy}\Sigma_x\Sigma_y+2A_{yz}\Sigma_y\Sigma_z+2A_{zx}\Sigma_z\Sigma_x+$$

$$+2B_x\Sigma_x+2B_y\Sigma_y+2B_z\Sigma_z=1, \tag{6}$$

и исследовать ее можно с использованием хорошо разработанной теории поверхностей второго порядка [9, 10].

Рассматривая плоскость $\Sigma_x=0$, нетрудно получить необходимое условие: $|A_{yz}|\le 1$, при нарушении которого поверхность (6) заведомо не будет принадлежать ни одному из трех вышеперечисленных физически допустимых типов [1–8]. Аналогично поступая в двух оставшихся плоскостях $\Sigma_y=0$ и $\Sigma_z=0$, получаем необходимые условия для трех коэффициентов:

$$|A_{ij}|\le 1. \tag{7}$$

Коэффициенты B_i в силу (4) из физических соображений ничем не ограничены и могут принимать любые значения. Далее это утверждение будет доказано путем строгих математических рассуждений.

В известных работах [1–7], в которых рассматриваются квадратичные критерии прочности ортотропных материалов, ограничиваются условиями (7) (их называют условиями устойчивости), хотя, как будет показано ниже, их недостаточно для того, чтобы предельная поверхность разрушения принадлежала трем вышеуказанным допустимым типам.

Следуя [9, 10], запишем четыре инварианта уравнения (6):

$$\begin{cases} I_1=1+1+1=3;\\ I_2=\begin{vmatrix}1 & A_{xy}\\ A_{xy} & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & A_{yz}\\ A_{yz} & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & A_{zx}\\ A_{zx} & 1\end{vmatrix}=3-A_{xy}^2-A_{yz}^2-A_{zx}^2;\\ I_3=\begin{vmatrix}1 & A_{xy} & A_{zx}\\ A_{xy} & 1 & A_{yz}\\ A_{zx} & A_{yz} & 1\end{vmatrix}=1+2A_{xy}A_{yz}A_{zx}-A_{xy}^2-A_{yz}^2-A_{zx}^2;\\ I_4=\begin{vmatrix}1 & A_{xy} & A_{zx} & B_x\\ A_{xy} & 1 & A_{yz} & B_y\\ A_{zx} & A_{yz} & 1 & B_z\\ B_x & B_y & B_z & -1\end{vmatrix}.\end{cases} \tag{8}$$

Можно показать, что $I_1>0$, и в силу (7) – $I_2\ge 0$; инвариант I_3 должен удовлетворять требованию

$$I_3\ge 0, \tag{9}$$

иначе, как следует из [9, 10], поверхность $\Phi=1$ будет иметь вид гиперболоида либо конуса, что недопустимо.

1.1. Рассмотрим случай

$$I_3>0. \tag{10}$$

Легко показать, что для удовлетворения (10) и (7) одновременно необходимо, чтобы

$$|A_{ij}|<1. \tag{11}$$

Введем функцию

$$f(X,Y,Z)=X^2+Y^2+Z^2+2A_{xy}XY+2A_{yz}YZ+2A_{zx}ZX. \tag{12}$$

Докажем, что квадратичная форма (12) при условиях (10), (11) положительно определенная. Для нее первые три инварианта типа (8) будут строго положительными, четвертый инвариант для уравнения

$$f(X,Y,Z)=1 \tag{13}$$

имеет вид $I_4=-I_3<0.$

Согласно [9, 10] поверхность (13) имеет вид эллипсоида и, следовательно,

$$f(X,Y,Z)\geq 0. \tag{14}$$

Покажем, что поверхность

$$f(X,Y,Z)+2B_xX+2B_yY+2B_zZ=1 \tag{15}$$

также имеет вид эллипсоида при любых значениях B_i.

Поскольку выполняется условие (10), поверхность (15) будет центральной, и ее центр (X_0, Y_0, Z_0) однозначно определится из системы уравнений

$$\begin{cases} X_0+A_{xy}Y_0+A_{zx}Z_0=-B_x; \\ A_{xy}X_0+Y_0+A_{yz}Z_0=-B_y; \\ A_{zx}X_0+A_{yz}Y_0+Z_0=-B_z. \end{cases} \tag{16}$$

Перенесем начало координат в центр симметрии поверхности

$$X_N=X-X_0; \qquad Y_N=Y-Y_0; \qquad Z_N=Z-Z_0. \tag{17}$$

Нетрудно показать, что в новых координатах (17) поверхность (15) с учетом (16) преобразуется к виду

$$f(X_N, Y_N, Z_N)=1+f(X_0, Y_0, Z_0). \tag{18}$$

В силу (14) величина в правой части (18) не меньше единицы. Для поверхности (18), так же как и для (13), первые три инварианта типа (8) строго положительны, четвертый $I_4=-I_3[1+f(X_0, Y_0, Z_0)]<0,$ поэтому поверхность (18), а значит, и (15) представляют собой эллипсоид.

Таким образом, ситуация (10), (11) является допустимой, при этом поверхность прочности (6) имеет вид эллипсоида.

1.2. Рассмотрим случай

$$I_3=0 \tag{19}$$

при выполнении условия (7). Для первых трех инвариантов из (8) имеем

$$I_1 > 0; \qquad I_2 \geq 0; \qquad I_3 = 0, \tag{20}$$

для четвертого инварианта с учетом (19) несложно получить следующее выражение:

$$I_4 = -[B_x \sqrt{1 - A_{yz}^2} \pm B_y \sqrt{1 - A_{zx}^2} \pm (\pm B_z \sqrt{1 - A_{xy}^2})]^2 \leq 0. \tag{21}$$

1.2.1. Модуль одного из A_{ij} равен единице. Пусть для определенности

$$A_{xy} = \pm 1. \tag{22}$$

Тогда из (19) следует

$$A_{yz} = \pm A_{zx}. \tag{23}$$

При этом ситуация

$$|A_{xy}| = |A_{yz}| = |A_{zx}| = 1 \tag{24}$$

является недопустимой, поскольку будем иметь

$$I_1 > 0; \qquad I_2 = 0; \qquad I_3 = 0; \qquad I_4 = 0, \tag{25}$$

и, согласно [9, 10], поверхность будет представлять собой либо параболический цилиндр, либо пару параллельных плоскостей.

Таким образом, если выполнено (22), то выполняется (23). Кроме того, имеем

$$|A_{yz}| = |A_{zx}| < 1, \tag{26}$$

и знаки инвариантов таковы:

$$I_1 > 0; \qquad I_2 > 0; \qquad I_3 = 0; \qquad I_4 \leq 0. \tag{27}$$

Если при этом выполняется условие

$$I_4 < 0, \tag{28}$$

то получим вполне допустимый тип поверхности – эллиптический параболоид. В случае

$$I_4 = 0 \tag{29}$$

также получим допустимый тип поверхностей прочности.

Докажем это, анализируя знак семиинварианта [9, 10]:

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & A_{yz} & B_y \\ A_{yz} & 1 & B_z \\ B_y & B_z & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & A_{zx} & B_x \\ A_{zx} & 1 & B_z \\ B_x & B_z & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & A_{xy} & B_x \\ A_{xy} & 1 & B_y \\ B_x & B_y & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -I_2 - 2(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 - A_{xy} B_x B_y - A_{yz} B_y B_z - A_{zx} B_z B_x). \tag{30}$$

Можно показать, что

$$K_3 \leq -I_2 - (|B_x| - |B_y|)^2 - (|B_y| - |B_z|)^2 - (|B_z| - |B_x|)^2 \leq -I_2 < 0, \tag{31}$$

и, таким образом, исследуемая поверхность будет иметь вид эллиптического цилиндра [9, 10].

Итак, ситуация (19), (22), (23), (26) является допустимой. Путем циклической перестановки индексов x, y, z получим еще две допустимые ситуации.

1.2.2. Все A_{ij} по модулю меньше единицы:

$$|A_{xy}| < 1; \qquad |A_{yz}| < 1; \qquad |A_{zx}| < 1. \tag{32}$$

При этом получим допустимые типы поверхностей: эллиптические параболоиды или цилиндры. Доказательство этого утверждения такое же, как и в подразделе 1.2.1, т.е. ситуация (19), (32) допустима.

После несложного обобщающего анализа приведенных в разд. 1 результатов отметим следующее. Искомые необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты квадратичной формы (6), чтобы предельная поверхность прочности ортотропного материала в трехмерном пространстве нормальных напряжений имела физический смысл, таковы:

$$A_{xy}^2 + A_{yz}^2 + A_{zx}^2 \le 1 + 2A_{xy}A_{yz}A_{zx} < 3, \tag{33}$$

причем если в (33) первое нестрогое неравенство заменить строгим, получим необходимые и достаточные условия, чтобы поверхность $\Phi = 1$ была эллипсоидом. Если в левой части (33) выполняется равенство, будем иметь эллиптические параболоиды либо цилиндры, в зависимости от коэффициентов при линейных членах в (6).

2. Общий случай напряженного состояния: все шесть компонентов тензора напряжений могут принимать ненулевые значения, уравнение предельной шестимерной гиперповерхности прочности имеет вид (3).

Видно, что уравнение (3) уже канонизировано по переменным Θ_{xy}, Θ_{yz} и Θ_{zx}. Проведем соответствующие преобразования координат в пространстве нормальных напряжений Σ_x, Σ_y, Σ_z, а именно: поворот координатной системы с последующим параллельным переносом начала координат и умножением на положительный нормирующий множитель, и запишем уравнение (3) в канонической форме. Если выполнены условия (33), то может получиться только три формы [9, 10]:

1) шестимерный эллипсоид:

$$\frac{X_e^2}{C_{xe}^2} + \frac{Y_e^2}{C_{ye}^2} + \frac{Z_e^2}{C_{ze}^2} + \frac{\Theta_{xy}^2 + \Theta_{yz}^2 + \Theta_{zx}^2}{D_e^2} = 1; \tag{34}$$

2) шестимерный эллиптический параболоид:

$$\frac{X_p^2}{C_{xp}^2} + \frac{Y_p^2}{C_{yp}^2} + \frac{\Theta_{xy}^2 + \Theta_{yz}^2 + \Theta_{zx}^2}{D_p^2} = 2Z_p; \tag{35}$$

3) шестимерный эллиптический цилиндр:

$$\frac{X_c^2}{C_{xc}^2} + \frac{Y_c^2}{C_{yc}^2} + \frac{\Theta_{xy}^2 + \Theta_{yz}^2 + \Theta_{zx}^2}{D_c^2} = 1. \tag{36}$$

Все три типа (34)–(36) гиперповерхности прочности являются физически допустимыми. Поэтому вывод, сделанный для случая отсутствия касательных напряжений, сохраняется и для общего случая напряженного состояния.

В разд. 1 и 2 проанализированы все возможные случаи напряженного состояния композита. Сформулируем окончательный результат.

Неравенства (33) представляют собой необходимые и достаточные условия устойчивости, которым должны удовлетворять коэффициенты квадратичной формы (3) или (1), чтобы предельная шестимерная гиперповерхность прочности ортотропного материала имела физический смысл. Причем если в (33) первое нестрогое неравенство заменить строгим, получим необходимые и достаточные условия, чтобы поверхность $\Phi = 1$ была шестимерным эллипсоидом. Если в левой части (33) выполняется равенство, будем иметь шестимерные эллиптические параболоиды либо цилиндры, в зависимости от коэффициентов B_i или b_i при линейных членах в (3) или (1) соответственно. Требования (33) не зависят от B_i (а, значит, и от b_i), поэтому в случае их удовлетворения получим физически допустимые гиперповерхности прочности для любых значений коэффициентов при линейных членах в (3) или (1).

В заключение заметим, что условия (33) существенно сильнее традиционно используемых необходимых условий устойчивости (7) либо, в усиленной форме, (11). Например, случай

$$A_{xy} = A_{yz} = A_{zx} = -2/3 \tag{37}$$

удовлетворяет как (7), так и (11), но требования (33) при этом не выполняются. Рассматривая ситуацию (5) и анализируя знаки первых трех инвариантов из (8), легко показать [9, 10], что равенства (37) приведут к физически абсурдным поверхностям прочности: гиперболоидам либо конусам, которые допускают существование неограниченного множества (пучка) прямых с бесконечной прочностью в трехмерном пространстве нормальных напряжений. Это относится и к шестимерной предельной гиперповерхности, поскольку (5) представляет собой частный случай (подмножество нулевой меры) шестимерного пространства (множества) нормальных и касательных напряжений. Последнее утверждение также несложно доказать способом, аналогичным используемому в разд. 2.

Резюме

Для загального випадку напруженого стану строго отримано необхідні та достатні умови стійкості. Цим умовам повинні задовольняти невизначені коефіцієнти квадратичних критеріїв міцності ортотропних матеріалів, щоб гранична гіперповерхня міцності другого порядку в шестивимірному просторі напружень мала фізичний сенс.

1. *Tsai S. W. and Wu E. M.* A general theory of strength for anisotropic materials // J. Compos. Mater. – 1971. – **5**. – P. 58 – 80.
2. *Ву Э. М.* Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред // Композиционные материалы. В 8 т. / Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока: Пер. с англ. – Т. 2. Механика композиционных материалов / Под. ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – С. 401 – 491.
3. *Onkar A. K., Upadhyay C. S., and Yadav D.* Probabilistic failure of laminated composite plates using the stochastic finite element method // Compos. Struct. – 2007. – **77**. – P. 79 – 91.
4. *Zhao G. P. and Cho C. D.* Damage initiation and propagation in composite shells subjected to impact // Ibid. – **78**. – P. 91 – 100.

5. *Yu Mao-hong.* Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // Appl. Mech. Rev. – 2002. – **55**. – P. 169 – 218.

6. *Kollar L. P. and Springer G. S.* Mechanics of Composite Structures. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 480 p.

7. *Ромащенко В. А.* Оценка прочности композитных и металлокомпозитных цилиндров при импульсном нагружении. Сообщ. 1. Правила выбора и сравнительный анализ различных критериев прочности анизотропного материала // Пробл. прочности. – 2012. – № 4. – С. 42 – 57.

8. *Лепихин П. П.*, *Ромащенко В. А.* Методы и результаты анализа напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении (обзор). Сообщ. 3. Феноменологические критерии прочности // Там же. – 2013. – № 3. – С. 24 – 41.

9. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832 с.

10. *Акивис М. А.*, *Гольдберг В. В.* Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 352 с.

Поступила 18. 02. 2013