УДК 519.6

Е.В. Водолазский

Обобщенные задачи разметки с мажоритарным полиморфизмом для некоторого класса полуколец

Предложено обобщение известной задачи удовлетворения ограничений в терминах операций коммукативного полукольца. Показано, что известный полиномиально разрешимый подкласс задач с мажоритарным полиморфизмом разрешим и для обобщенной задачи.

Ключевые слова: задача удовлетворения ограничений, полиморфизмы, инварианты.

Запропоновано узагальнення відомої задачі задовільнення обмежень в термінах операцій комукативного напівкільця. Показано, що відомий поліноміально розв'язний підклас задач з мажоритарним поліморфізмом є розв'язним і для узагальненої задачі.

Ключові слова: задача задоволення обмежень, поліморфізми, інваріанти.

Введение. Задачи удовлетворения ограничений – мощный и достаточно хорошо изученный инструмент для решения многих прикладных задач в самых разных областях вычислительной техники. В своей общей формулировке задачи удовлетворения ограничений представляют *NP*-полный класс задач. Тем не менее, известны полиномиально разрешимые подклассы [1]. Ранее решение практических задач требовало некоторого ослабления задачи удовлетворения ограничений, что привело к формулировке задачи (max, min) разметки [2], для которой так же удалось сформулировать полиномиально разрешимый подкласс. Данная статья посвящена дальнейшему обобщению задачи удовлетворения ограничений и для этой обобщенной задачи показано существование полиномиально разрешимого подкласса.

Об используемых обозначениях

В статье идет речь о коммутативных полукольцах $(\oplus,\otimes,S)$. Для упрощения чтения формул символ $\otimes$ часто опускается, так что вместо записи $a\otimes b$ используется запись ab. Во многих местах, где происходит сложение или умножение по какому-либо множеству, само множество может быть не указано. Считается, что множество, по которому происходит сложение или умножение, должно быть ясно из контекста. Например, в статье можно встретить запись $\bigotimes\limits_{x}$ вместо $\bigotimes\limits_{x\in X}$.

Формулировка задачи

Многие задачи вычислительной математики могут быть сформулированы как задачи разметки на коммутативных полукольцах.

Определение 1. Обобщенная задача разметки на коммутативном полукольце $(\oplus,\otimes,S)$ – это четверка $\langle X,T,\tau\subset 2^T,(f_{T'}:X^{T'}\to S\,|\,T'\in\tau)\rangle$, где T – конечное множество переменных, X – конечное множество значений переменных, $f_{T'}$, $T'\in\tau$ – функции ограничения. Необходимо вычислить значение $\bigoplus\limits_{\bar{x}\in X^k}\bigotimes\limits_{T'\in\tau} f_{T'}(\bar{x}(T'))$ для заданной задачи.

У обобщенной задачи разметки есть два достаточно хорошо изученных частных случая: задача удовлетворения ограничений и задача min-max разметки.

Задача удовлетворения ограничений – это задача разметки на полукольце $(\vee, \&, \{0, 1\})$ [3, 4]. Функции $f_{T'}$ определяют ограничения на подмножествах переменных T'. Вычисление значения $\bigoplus\limits_{\bar{x}\in X^k}\bigotimes\limits_{T'\in\tau} f_{T'}(\bar{x}(T'))=\bigvee\limits_{\bar{x}\in X^k}\mathop{\&}\limits_{T'\in\tau} f_{T'}(\bar{x}(T'))$ эквивалентно определению, возможно ли приписать такие значения $\bar{x}^*$ переменным, чтобы не нарушить ни одно из ограничений $f_{T'}(\bar{x}^*(T'))=1$, $T'\in\tau$, т.е. необходимо решить систему логических уравнений. Значения $\bar{x}^*$ переменных называются решением системы ограничений. Отметим, что для обобщенной задачи разметки из определения 1 нет понятия решения задачи.

Задача* max-min *разметки – обобщение задачи удовлетворения ограничений. Во многих практических приложениях задача удовлетворения ограничений не имеет решения, но все же требуется получить какой-либо разумный ответ. В этом случае строгие ограничения можно релаксировать так, чтобы каждое ограничение указывало степень допустимости того или иного набора значений переменных. В задаче max-min разметки следует найти такой набор значений $\bar{x}^*$, который бы как можно меньше нарушал все ограничения [2]. Иными словами, следует найти такой $\bar{x}^*$, который максимизирует значение $\min_{T'\in\tau} f_{T'}\left(\bar{x}(T')\right)$. Это эквивалентно решению обобщенной задачи разметки на полукольце $(\max, \min, \mathsf{R})$.

И задача удовлетворения ограничений, и задача max-min разметки – *NP*-полные. Тем не менее, известны некоторые разрешимые подклассы этих задач [2–4]. Автор же укажет один из полиномиально разрешимых подклассов обобщенной задачи разметки для коммутативных полуколец $(\oplus,\otimes,S)$, у которых обе операции $\oplus$ и $\otimes$ идемпотентны ($a\oplus a=a$ и $aa=a$). Естественно, и полукольцо $(\vee, \&, \{0, 1\})$, и полукольцо $(\max, \min, \mathsf{R})$ обладают этим свойством.

Ключевым понятием для определения описываемого подкласса задач есть понятие полиморфизма, обобщенное определение которого дается в следующем разделе.

Полиморфизмы и инварианты

Статья оперирует функциями вида $f_{T'}: X^{T'}\to S$, которые также иногда будут называться ограничениями. Для того чтобы определить понятие полиморфизма, удобно ввести функции вида $p: X\times X\times X\to X$, которые будут называться операторами. Для удобства последующего изложения, операторы $p: X\times X\times X\to \to X$ на тройках расширяются до операторов на тройках кортежей $p: X^k\times X^k\times X^k\to X^k$ применением оператора p поэлементно

$$p(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (p(x_1,y_1,z_1), p(x_2,y_2,z_2),\ldots,p(x_k,y_k,z_k)).$$

Определение 2. Оператор $p: X\times X\times X\to X$ – полиморфизм функции $f: X^k\to S$ (или f – инвариант p) тогда и только тогда, когда равенство

$$f(\bar{x})f(\bar{y})f(\bar{z})\oplus f(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z})) = f(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z})) \quad (1)$$

выполняется для всех $\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in X^k$.

Множество всех полиморфизмов функции f обозначается $Pol\{f\}$, а множество всех инвариантов оператора p – $Inv\{f\}$.

Если оператор p – полиморфизм всех функций–ограничений задачи, то тогда говорится, что p – полиморфизм задачи разметки.

Определение 2 – прямое обобщение классического определения полиморфизма [1, 3, 5, 6] для полукольца $(\vee, \&, \{0, 1\})$. Действительно, выражение (1) превращается в $f(\bar{x})\,\&\, f(\bar{y})\,\&\, \&\, f(\bar{z})\vee f(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z})) = f(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))$ и эквивалентно выражению $f(\bar{x})\,\&\, f(\bar{y})\,\&\, f(\bar{z})\to f(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))$.

У полиморфизмов на полукольцах с идемпотентными операциями есть два важных свойства, которые сформулированы в леммах 1 и 2.

Лемма 1. Пусть $f: X^k\to S$ и $g: X^k\to S$ – функции, инвариантные относительно оператора p. Тогда функция $(f\otimes g)(\bar{x}) = f(\bar{x})\otimes g(\bar{x})$ также инвариантна относительно p.

Доказательство. $f(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))g(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z})) =$

$$= [f(\bar{x})f(\bar{y})f(\bar{z})\oplus f(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))]\otimes$$
$$\otimes[g(\bar{x})g(\bar{y})g(\bar{z})\oplus g(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))] = \quad (2)$$
$$= [f(\bar{x})f(\bar{y})f(\bar{z})\oplus f(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))]\otimes$$
$$\otimes[g(\bar{x})g(\bar{y})g(\bar{z})\oplus g(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))]\oplus \quad (3)$$
$$\oplus f(\bar{x})g(\bar{x})f(\bar{y})g(\bar{y})f(\bar{z})g(\bar{z}) =$$
$$= [f(\bar{x})g(\bar{x})][f(\bar{y})g(\bar{y})][f(\bar{z})g(\bar{z})]\oplus$$
$$\oplus f(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z}))g(p(\bar{x},\bar{y},\bar{z})). \quad (4)$$

Равенство (2) получено из (1). Если раскрыть скобки в (2), то одно из слагаемых будет $f(\bar{x})g(\bar{x})f(\bar{y})g(\bar{y})f(\bar{z})g(\bar{z})$. Следовательно, ввиду идемпотентности $\oplus$, это слагаемое можно добавить еще раз, не изменив значения суммы. И наконец, (4) получается применением равенства (1) еще раз.

Определение 3. Функция $f_{X^n}: X^n \to S$ называется проекцией функции $f: X^n \times X^m \to S$ на n переменных, если $f_{X^n}(\bar{x}) = \bigoplus_{\bar{y} \in X^m} f(\bar{x}, \bar{y})$.

Лемма 2. Если функция $f: X^n \times X^m \to S$ инвариантна относительно некоторого оператора p, то ее проекция $g: X^n \to S$ на n переменных также инвариантна относительно p.

Доказательство.

$$[\bigoplus_{\bar{t}_1} f(\bar{x}, \bar{t}_1)][\bigoplus_{\bar{t}_2} f(\bar{y}, \bar{t}_2)][\bigoplus_{\bar{t}_3} f(\bar{z}, \bar{t}_3)] \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{\bar{t}} f(p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \bar{t}) =$$
$$= \bigoplus_{\bar{t}_1} \bigoplus_{\bar{t}_2} \bigoplus_{\bar{t}_3} f(\bar{x}, \bar{t}_1) f(\bar{y}, \bar{t}_2) f(\bar{z}, \bar{t}_3) \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{\bar{t}} f(p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \bar{t}) = \qquad (5)$$
$$= \bigoplus_{\bar{t}_1} \bigoplus_{\bar{t}_2} \bigoplus_{\bar{t}_3} [f(\bar{x}, \bar{t}_1) f(\bar{y}, \bar{t}_2) f(\bar{z}, \bar{t}_3) \oplus$$
$$\oplus f(p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), p(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3))] \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{\bar{t}} f(p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \bar{t}) = \qquad (6)$$
$$= \bigoplus_{\bar{t}_1} \bigoplus_{\bar{t}_2} \bigoplus_{\bar{t}_3} f(p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), p(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3)) \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{\bar{t}} f(p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \bar{t}) = \qquad (7)$$
$$= \bigoplus_{\bar{t}} f(p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \bar{t}). \qquad (8)$$

Равенство (5) получено раскрытием скобок. Поскольку слагаемое $f(p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), p(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3))$ уже присутствует в сумме $\bigoplus_{\bar{t}} f(p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \bar{t})$ для любых $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3 \in X$, то это слагаемое можно добавить еще раз, не изменив значение суммы. Следовательно, равенство (6) справедливо. Поскольку p – полиморфизм f, то выполняется равенство (7). Равенство (8) справедливо в силу тех же причин, что и равенство (6).

Мажоритарный полиморфизм

Определяемый в статье класс полиномиально разрешимых задач опирается на понятие мажоритарных полиморфизмов.

Определение 4. Оператор $p: X \times X \times X \to X$ называется мажоритарным оператором, если для любых $x, y \in X$

$$p(x, x, y) = p(x, y, x) = p(y, x, x) = x. \qquad (9)$$

У мажоритарных полиморфизмов на полукольцах с идемпотентными операторами есть одно очень полезное свойство.

Лемма 3. Любую функцию f трех или более переменных инвариантную относительно мажоритарного оператора p можно представить в виде произведения трех функций меньшего числа переменных. Более того, эти три функции также инвариантны относительно p.

Доказательство. Докажем, что любую функцию $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ от трех наборов переменных $\bar{x} \in X^k, \bar{y} \in X^m, \bar{z} \in X^n$ можно представить как произведение трех проекций.

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bigoplus_{\bar{x}_1 \in X^k} f(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{z}) \bigoplus_{\bar{y}_1 \in X^m} f(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{z}) \times$$
$$\times \bigoplus_{\bar{z}_1 \in X^n} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1). \qquad (10)$$

Действительно,

$$\bigoplus_{\bar{x}_1} f(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{z}) \bigoplus_{\bar{y}_1} f(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{z}) \bigoplus_{\bar{z}_1} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1) =$$
$$= \bigoplus_{\bar{x}_1} \bigoplus_{\bar{y}_1} \bigoplus_{\bar{z}_1} f(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{z}) f(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{z}) f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1) =$$
$$= \bigoplus_{\bar{x}_1} \bigoplus_{\bar{y}_1} \bigoplus_{\bar{z}_1} [f(\bar{x}_1, \bar{y}, \bar{z}) f(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{z}) f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1) \oplus \qquad (11)$$
$$\oplus f(p(\bar{x}_1, \bar{x}, \bar{x}), p(\bar{y}, \bar{y}_1, \bar{y}), p(\bar{z}, \bar{z}, \bar{z}_1))] =$$
$$= \bigoplus_{\bar{x}_1} \bigoplus_{\bar{y}_1} \bigoplus_{\bar{z}_1} f(p(\bar{x}_1, \bar{x}, \bar{x}), p(\bar{y}, \bar{y}_1, \bar{y}), p(\bar{z}, \bar{z}, \bar{z}_1)) = (12)$$
$$= \bigoplus_{\bar{x}_1} \bigoplus_{\bar{y}_1} \bigoplus_{\bar{z}_1} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \qquad (13)$$

Поскольку p – мажоритарный оператор, то тройка $(p(\bar{x}_1, \bar{x}, \bar{x}), p(\bar{y}, \bar{y}_1, \bar{y}), p(\bar{z}, \bar{z}, \bar{z}_1))$ в точности равна $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Слагаемое $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ уже присутствует в сумме. Следовательно, это слагаемое можно добавить еще раз в виде $f(p(\bar{x}_1, \bar{x}, \bar{x}), p(\bar{y}, \bar{y}_1, \bar{y}), p(\bar{z}, \bar{z}, \bar{z}_1))$ и значение суммы не изменится. Таким образом, равенство (11) справедливо. Равенство (12) получается применением свойства (1). Наконец, (13) справедливо в силу идемпотентности сложения. Следует также заметить, что вследствие леммы 2 каждая из трех функций инвариантна p.

Из леммы 3 следует теорема.

Теорема. Любую функцию $f: X^k \to S$, инвариантную относительно мажоритарного оператора p, можно выразить как произведение функций двух переменных:

$$f(\bar{x}) = \bigotimes_{i,j\in\overline{1,k}} f_{ij}(x_i, x_j), \quad f_{ij}(x_i, x_j) = \bigoplus_{\substack{\bar{y}: y_i = x_i \\ y_j = x_j}} f(\bar{y}),$$

причем, каждая из этих функций есть проекция f и инвариантна относительно p.

Доказательство. Согласно лемме 2 функцию f можно разбить на три функции меньшего числа переменных. Поскольку f инвариантна относительно p, каждая из этих функций также инвариантна относительно p и в свою очередь также может быть разбита на функции меньшего числа переменных. Повторяя этот процесс разбиения функций, будут получены функции двух переменных, инвариантные относительно p. Если для некоторой пары переменных получится более одной функции, зависимой от этой пары, то такие несколько функций можно заменить их произведением в соответствии с леммой 1.

В теореме показан способ преобразования любой задачи с мажоритарным полиморфизмом в другую задачу с тем же полиморфизмом, но функциями–ограничениями лишь на две переменные.

Преобразование звезды в симплекс

Подобно тому, как это делается для max-min задачи разметки [2], основной процедурой для решения обобщенной задачи разметки с мажоритарным полиморфизмом есть преобразование звезды в симплекс. Приведенный рисунок показывает пример такого преобразования, где переменные изображены как окружности, а функции–ограничения как линии, соединяющие эти окружности. Звезда – это набор переменных с одной центральной переменной и набор таких ограничений, каждое из которых зависит только от центральной переменной и еще какой-то одной переменной из набора. Те переменные, которые не являются центром, называются лучами. Преобразование звезды в симплекс заменяет функции–ограничения эквивалентным набором таких ограничений, которые не зависят от центральной переменной.

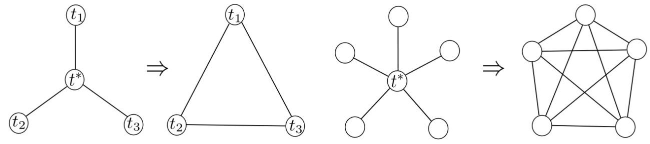

Рис.

Пусть множество переменных T с центральной переменной t^* образуют звезду. Преобразование звезды в симплекс заменяет ограничения f_{t^*t}, $t \in T$ на эквивалентный набор ограничений $f_{t_1t_2}$, $t_1, t_2 \in T$. Иными словами,

$$\bigoplus_{x^*} \bigotimes_{t\in T} f_{t^*t}(x^*, x(t)) = \bigotimes_{\substack{t_1\in T \\ t_2\in T}} f_{t_1t_2}(x(t_1), x(t_2)). \quad (14)$$

Это прямое обобщение преобразования звезды в симплекс для полукольца (max, min, R) [2].

Поскольку функция $\bigoplus_{x^*} \bigotimes_{t\in T} f_{t^*t}(x^*, x(t))$ есть проекцией $\bigotimes_{t\in T} f_{t^*t}(x^*, x(t))$, то согласно леммам 1 и 2 она инвариантна относительно мажоритарного оператора. Следовательно, функции–ограничения можно заменить на функции $f_{t_1t_2}$, выбрав $f_{t_1t_2}$ равными проекциям $\bigoplus_{x^*} \bigotimes_{t\in T} f_{t^*t}(x^*, x(t))$ на пары переменных t_1, t_2 согласно теореме.

$$f_{t_1t_2}(x(t_1), x(t_2)) = \bigoplus_{\bar{x}\in X^{T\setminus\{t_1,t_2\}}} \bigoplus_{x^*} \bigotimes_{t\in T} f_{t^*t}(x^*, x(t)). \quad (15)$$

Обозначим $\varphi_t(x^*) = \bigoplus_{x\in X} f_{t^*t}(x^*, x)$. Тогда выражение (15) превращается в $f_{t_1t_2}(x(t_1), x(t_2)) =$

$$\bigoplus_{x^*} \bigotimes_{\substack{t\neq t_1 \\ t\neq t_2}} \varphi_t(x^*) f_{t^*t_1}(x^*, x(t_1)) f_{t^*t_2}(x^*, x(t_2)) =$$

$$= \bigoplus_{x^*} [f_{t^*t_1}(x^*, x(t_1)) f_{t^*t_2}(x^*, x(t_2)) \otimes \bigotimes_{\substack{t\neq t_1 \\ t\neq t_2}} \varphi_t(x^*)].$$

Все значения $\varphi_t(x^*)$ могут быть вычислены за время $O(|T||X|^2)$. Прямой подход к вычислению каждого значения $f_{t_1t_2}(x(t_1), x(t_2))$ требует $O(|T||X|)$ времени, что в сумме дает $O(|T|^3|X|^3)$ для всех значений. Однако это время можно уменьшить до $O(|T|^2|X|^3)$, применив достаточно стандартный программистский трюк. Пусть множество T будет упорядочено $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ (порядок не играет решающей роли). Тогда

$$\bigotimes_{\substack{t \neq t_a \\ t \neq t_b}} \varphi_t(x^*) = \bigotimes_{i=1}^{a-1} \varphi_{t_i}(x^*) \otimes \bigotimes_{i=a+1}^{b-1} \varphi_{t_i}(x^*) \otimes \bigotimes_{i=b+1}^{n} \varphi_{t_i}(x^*) =$$

$$= q(1, a-1, x^*) \otimes q(a+1, b-1, x^*) \otimes q(b+1, n, x^*),$$

где $q(a,b,x^*) = \bigotimes_{i=a}^{b} \varphi_{t_i}(x^*)$, а все q могут быть вычислены по $O(|T|^2|X|)$ с использованием динамического программирования. Теперь необходимо лишь $O(|X|)$ для вычисления каждого f, а все преобразование звезды в симплекс требует $O(|T|^2|X|^3)$ времени.

Процедура исключения переменной из задачи выполняется следующим образом:

1. Выбрать переменную и все функции ограничения, в которые переменная входит. Эта переменная будет центром звезды. Все другие переменные, на которые наложены выбранные ограничения, станут лучами звезды.
2. Применить преобразование звезды в симплекс, исключив тем самым одну переменную в задаче.
3. Если для какой-то пары переменных окажется больше одного ограничения, заменить эти ограничения их произведением.

Алгоритм решения обобщенной задачи разметки последовательно исключает переменные одну за одной, применяя преобразование звезды в симплекс до тех пор, пока в задаче не останется три переменные. Пусть эти переменные будут пронумерованы 1, 2, 3 и пусть f_{12}, f_{13}, f_{23}, будут ограничениями, полученными после исключения остальных переменных. Тогда ответ может быть получен прямым вычислением формулы $\bigoplus_{x_1 \in X} \bigoplus_{x_2 \in X} \bigoplus_{x_3 \in X} f_{12}(x_1,x_2) f_{13}(x_1,x_3) f_{23}(x_2,x_3)$. Поскольку операция исключения переменной применяется $O(|T|)$ раз, алгоритм вычисляет значение $\bigoplus_{\bar{x} \in X^T} \bigotimes_{T' \in \tau_2} f_{T'}(\bar{x}(T'))$ для любой задачи с мажоритарным полиморфизмом за время $O(|T|^3|X|^3)$.

Отметим, что проблема поиска мажоритарного полиморфизма для данной задачи может оказаться очень нетривиальной. Одно из преимуществ предложенного алгоритма – то, что для его применения нет необходимости знать собственно полиморфизм. Если такой полиморфизм существует, то алгоритм вычислит правильное значение $\bigoplus_{\bar{x} \in X^T} \bigotimes_{T' \in \tau_2} f_{T'}(\bar{x}(T'))$, не зная полиморфизма.

Заключение. До сих пор был известен разрешимый подкласс для задачи удовлетворения ограничений и для задачи max-min разметки. Данная статья объединяет и обобщает эти две задачи, показывая, что достаточным свойством для существования полиномиально разрешимого подкласса есть идемпотентность операций полукольца. Обобщенная задача разметки на полукольце с идемпотентными операциями с мажоритарным полиморфизмом может быть сведена к задаче с тем же полиморфизмом, но ограничениями, каждое из которых применяется только к паре переменных. Полученная задача может быть решена за время $O(|T|^3|X|^3)$ предложенным алгоритмом.

1. *Bulatov A*. *Jeavons P*. Tractable constraints closed under a binary operation. Techn. Rep. PGR-TR-12-00 Oxford University Comp. Lab., Oxford, 2000. – 27 p.
2. *Vodolazskii E.V*., *Flach B*., *Schlesinger M.I.*, Minimax problems of discrete optimization invariant under majority operators // Comp. Mathem. and Mathem. Physics. – 2014. – **54**, N 8. – P. 1327–1336.
3. *Rossi F*., *P. Van Beek*, *Walsh T*. Handbook of Constraint Programming, Elsevier Science, New York, 2006. – P. 13–28.
4. *Shcherbina O.A*. Constraint satisfaction and constraint programming // Intellekt. Sist. – 2011. – 15(1–4). – P. 53–170.
5. *Bulatov A*. Tractable conservative constraint satisfaction problems // Proc. of the 18th Annual IEEE Symp. Logic in Computer Science LICS'03, Washington, DC, USA, 2003. – P. 321–330.
6. *Bulatov A*. Complexity of conservative constraint satisfaction problems // ACM Trans. Comput. Logic 12(4), 24:1–24:66, July 2011

Тел. для справок: +38 044 502-6314 (Киев)

Окончание на стр. 42

UDC 519.6

Ye.V. Vodolazskiy

Generalized Labelling Problems with a Majority Polymorphism for a Certain Class of Semirings

Keywords: constraint satisfaction problems, polymorphism, invariant.

The article generalizes the known constraint satisfaction problems in terms of a commutative semiring. It is shown that a known tracktable subclass with a majority polymorphism is also tracktable in the generalized problem.

The constraint satisfaction problems can be defined as computing the disjunction over the set of all variable values of all constraints conjunction. This definition can be generalized to computing the sum of products in a commutative semiring. One of the tracktable subclasses of the classical constraint satisfaction problems semering are problems with a majority polymorphism. The article generalizes the definition of polymorphisms to commutative semirings with the idempotent sum and product and defines a tracktable subclass for the generalized problem. Many of the useful properties of the classical polymorphisms proved to be true with the generalized polymorphism definition. It is shown that any generalized constraint satisfaction problem with a majority polymorphism can be solved in polynomial time. An algorithm that solves the problem is given and is based on the equivalent star to simplex transformations of the problem by excluding variables one at a time.

●