

## Нелинейное изгибание бурильных колонн в вертикальных скважинах

В. И. Гуляев, Е. Н. Андрусенко

Национальный транспортный университет, Киев, Украина

*Рассмотрена задача об упругом нелинейном изгибном деформировании бурильных колонн в цилиндрических полостях вертикальных сверхглубоких нефтяных и газовых скважин. На основе теории гибких криволинейных стержней с использованием специально выбранной системы отсчета построены нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие контактное взаимодействие трубы бурильной колонны со стенкой скважины. Предложена методика численного решения построенных уравнений. Обсуждаются результаты компьютерного моделирования.*

**Ключевые слова:** бурильная колонна, полость скважины, закритическое деформирование.

**Введение.** По результатам геологоразведочных исследований ресурсы углеводородного топлива в украинском секторе морских акваторий составляют значительные объемы, однако проблема их извлечения сопряжена с большими технологическими трудностями проходки глубоких скважин. Одно из основных препятствий глубокого бурения связано с возможностью появления статических и динамических нештатных ситуаций [1–5], вызванных критическими состояниями квазистатического равновесия бурильной колонны (БК), ее изгибным выпучиванием, контактным взаимодействием со стенкой скважины и так называемым ее “прихватыванием”. При этом возникают две проблемы исследования механики упругого изгибания БК. Первая заключается в определении критического состояния колонны и формулируется как задача эйлеровой потери устойчивости длинного вращающегося трубчатого стержня, преднапряженного переменной по длине продольной силой, вызванной силами гравитации и крутящим моментом. Такая задача сформулирована и решена на основе теории прямолинейных балок в работах [1, 6, 7], в которых показано, что она является сингулярно возмущенной, поскольку коэффициент  $EI$  перед старшей (четвертой) производной в разрешающих уравнениях оказывается намного меньше коэффициентов перед другими слагаемыми. При этом форма бифуркационного выпучивания БК представляет собой трехмерную спираль с переменным шагом.

Однако не менее существенный интерес представляет вторая проблема, связанная с исследованием процесса последующего (закритического) деформирования колонны, когда в результате выпучивания она вступает в контакт со стенкой скважины и продолжает изменять свою форму под действием увеличивающихся продольной силы, распределенных контактных сил и крутящего момента. Некоторые частные результаты решения этого вопроса с применением упрощающих методик получены в работах [8–10]. При этом, однако, отмечается, что моделирование процесса может быть выполнено только с помощью нелинейной теории гибких криволинейных стержней. Такая

постановка задачи используется в данной работе. В этом случае, как будет показано ниже, весьма важным оказывается правильно выбрать систему отсчета, в которой моделируется изгибание колонны. Применение для этого сопутствующей системы координат, одна из осей которой ортогональна поверхности скважины, позволило уменьшить число искомым переменных и исключить из рассмотрения неизвестную реакцию давления БК на стенки скважины. На основе такого подхода выполнен анализ закритического формоизменения бурильных колонн, преднапряженных переменной по длине растягивающей силой тяжести и крутящим моментом, а также испытывающих действие возрастающей сжимающей силы давления долота на дно скважины. Показано, что траектория осевой линии БК приобретает форму нерегулярной спирали с шагом, уменьшающимся по мере приближения к нижнему концу.

**Разрешающие уравнения изгибания колонны в полости скважины.**

Примем, что при закритическом изгибании бурильной колонны постоянного радиуса  $r_1$  она по всей длине безотрывно контактирует со стенкой скважины. Осевая линия скважины – вертикальная, а стенка – круговая цилиндрическая поверхность радиуса  $r_2$ .

Будем рассматривать деформирование колонны как перемещение ее оси  $L$  общего вида по цилиндрической поверхности радиуса  $a = r_2 - r_1$ .

Введем неподвижную декартову систему координат  $OXYZ$  и систему координатных линий  $u, v$  на цилиндрической поверхности  $D$ , направленных вдоль образующих и в окружном направлении соответственно (рис. 1).

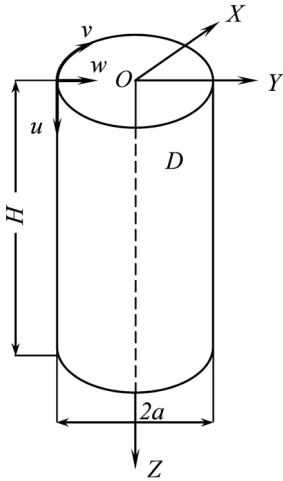


Рис. 1

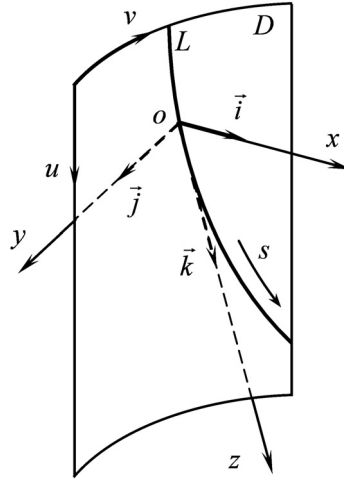


Рис. 2

Рис. 1. Схема поверхности  $D$ , ограничивающей перемещения оси бурильной колонны.

Рис. 2. Положение осевой линии  $L$  бурильной колонны на поверхности  $D$ .

Положение кривой  $L$  на  $D$  можно определить в трехмерном пространстве  $OXYZ$  зависимостями

$$X = X(s), \quad Y = Y(s), \quad Z = Z(s) \tag{1}$$

при ограничении  $X^2 + Y^2 = a^2$  либо задать равенствами (рис. 2)

$$u = u(s), \quad v = v(s) \quad (2)$$

в двухмерном пространстве на цилиндрической поверхности  $D$ , где  $s$  – натуральный параметр, измеряемый длиной линии  $L$  от некоторой начальной точки до текущей. В нашем случае используется представление (2), позволяющее уменьшить число искомых переменных и исключить ограничение  $X^2 + Y^2 = a^2$ .

На кривой  $L$  введем сопутствующую систему отсчета  $oxyz$  с ортами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  (рис. 2). Ось  $ox$  этой системы направлена вдоль внутренней нормали к поверхности  $D$ , ось  $oz$  – вдоль касательной к кривой  $L$ , ось  $oy$  дополняет эту систему до правой тройки. Подчеркнем, что в общем случае орты  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  не совпадают с ортами трехгранника Френе линии  $L$ .

При моделировании закритического деформирования БК считаем, что она уже не вращается, и центробежные силы инерции равны нулю, влияние потоков промывочной жидкости на изгибание колонны можно не учитывать, однако принято, что в результате их движения и легких потряхиваний колонны при ее малых движениях устраняются силы трения, которыми также можно пренебречь. Тогда деформирование БК происходит в упругой стадии, а напряженно-деформированное состояние определяется главными векторами внутренних сил  $\vec{F}(s)$ , внутренних моментов  $\vec{M}(s)$  и вектором  $\vec{f}(s)$  внешних распределенных сил, который складывается из вектора  $\vec{f}^{gr}(s)$  сил тяжести и вектора  $\vec{f}^{(c)}(s)$  контактных сил. В соответствии с теорией гибких криволинейных стержней [11–13] эти силы и моменты подчиняются уравнениям равновесия элемента БК

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\vec{f}, \quad \frac{d\vec{M}}{ds} = -\vec{k} \times \vec{F}. \quad (3)$$

При моделировании деформирования стержней, свободных от действия дополнительных связей, уравнения (3) обычно формулируются в подвижной системе осей, направления которых совпадают с главными центральными осями инерции поперечных сечений гибкого стержня. В анализируемом случае такая необходимость отпадает, поскольку сечение БК – кольцевое и все его центральные оси являются главными. В то же время в рассматриваемой задаче возникает другое осложнение, обусловленное наличием связи в виде жесткой поверхности скважины, ограничивающей перемещения БК, и появлением дополнительных неизвестных реакций этой связи – контактных сил  $\vec{f}^{(c)}(s)$ , увеличивающих число искомых функций. Поэтому формулировка разрешающих уравнений для исследуемой системы возможна с помощью двух подходов. Согласно первому деформирование стержня задается уравнениями (1) в декартовой системе координат  $OXYZ$  с введением в эти уравнения функции искомой реакции  $\vec{f}^{(c)}(s)$  и использованием ограничения  $X^2 + Y^2 = a^2$ . Такая постановка задачи соответствует методу уравнений Лагранжа 1-го рода, используемому в теории дифференциальных уравнений и в теорети-

ческой механике, в котором реакция связи  $\vec{f}^c(s)$ , называемая неопределенным множителем, или множителем Лагранжа, играет роль дополнительной искомой переменной.

При использовании второго подхода учитывается, что каждая наложенная на систему связь ограничивает ее перемещения и уменьшает число степеней свободы на число наложенных связей. Поэтому если вместо декартовых координат точек системы использовать ее обобщенные координаты, можно сократить число искомых переменных задачи и число разрешающих уравнений и исключить из рассмотрения реакцию  $\vec{f}^c(s)$ , которую, однако, можно легко подсчитать после решения задачи. В данном случае принят второй подход. Для его реализации используются переменные  $u(s)$ ,  $v(s)$  в представлении (2), а сами уравнения формулируются в специальной системе отсчета  $oxyz$ , в которой неизвестная реакция  $\vec{f}^c$  имеет нулевые проекции на направления осей  $oy$  и  $oz$  и поэтому исключается из разрешающих уравнений.

С учетом изложенного придадим абсолютным производным  $d\vec{F}/ds$ ,  $d\vec{M}/ds$  в уравнениях (3) форму [11]

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \frac{\tilde{d}\vec{F}}{ds} + \vec{\omega} \times \vec{F}, \quad \frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{\tilde{d}\vec{M}}{ds} + \vec{\omega} \times \vec{M}. \quad (4)$$

Здесь  $\tilde{d}(\dots)/ds$  – локальная производная;  $\vec{\omega}$  – обобщенный вектор Дарбу, представляющий собой вектор угловой скорости системы  $oxyz$  при движении ее начала вдоль кривой  $L$  с единичной скоростью,

$$\vec{\omega} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}, \quad (5)$$

где  $k_x$ ,  $k_y$  – кривизны кривой  $L$  в плоскостях  $yoz$ ,  $xoz$  соответственно;  $k_z$  – кручение кривой.

Учитывая, что кривая  $L$  лежит на поверхности  $D$ , ее геометрические параметры можно выразить через параметры поверхности методами дифференциальной геометрии [14]. Поскольку плоскость  $yoz$  касается поверхности  $D$ , величина  $k_x$  для кривой  $L$  является ее геодезической кривизной. Аналитическое представление этой кривизны зависит от формы проекции кривой  $L$  на плоскость  $yoz$  в данной точке и от метрики поверхности  $D$ , определяемой в рассматриваемом случае равенством

$$(ds)^2 = (du)^2 + a^2 (dv)^2. \quad (6)$$

Через искомые функции  $u(s)$ ,  $v(s)$  кривизна  $k_x$  для кривой  $L$  рассчитывается так [14]:

$$k_x = -a(u''v' - v''u'). \quad (7)$$

Здесь штрихом обозначена процедура дифференцирования по  $s$ .

Поскольку плоскость  $xoz$  проходит через нормаль  $\vec{i}$  к поверхности  $D$ , кривизна  $k_y$  равна нормальной кривизне поверхности  $D$  в направлении кривой  $L$  и вычисляется по формуле Эйлера [14]:

$$k_y = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta, \quad (8)$$

где  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1/a$  – главные кривизны поверхности  $D$ ;  $\theta$  – угол между касательной к кривой  $L$  и главным направлением, соответствующим кривизне  $k_1$ .

В соответствии с формулой (8) имеем

$$k_y = a(v')^2. \quad (9)$$

Функция  $k_z$  определяется как угловая скорость поворота нормали  $\vec{i}$  вокруг орта  $\vec{k}$  при движении системы  $oxyz$  по поверхности  $D$  вдоль линии  $L$  с единичной линейной скоростью и подсчитывается по формуле

$$k_z = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s},$$

где  $\varphi$  – угол поворота оси  $ox$  относительно оси  $oz$  при переходе системы  $oxyz$  из точки  $s$  в точку  $s + \Delta s$ .

Для цилиндрической поверхности  $D$  величина  $k_z$  определяется равенством [11]

$$k_z = u'v'. \quad (10)$$

В системе отсчета  $oxyz$  уравнения (3) приобретают вид

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\vec{\omega} \times \vec{F} - \vec{f}^{gr} - \vec{f}^c; \quad \frac{d\vec{M}}{ds} = -\vec{\omega} \times \vec{M} - \vec{k} \times \vec{F}. \quad (11)$$

Входящие в (11) векторы  $\vec{f}^{gr}$ ,  $\vec{f}^c$  раскладываются в координатной системе  $oxyz$ :

$$f_x^{gr} = 0; \quad f_y^{gr} = f^{gr} av'; \quad f_z^{gr} = f^{gr} \sqrt{1 - (av')^2};$$

$$f_x^c = f^c; \quad f_y^c = 0; \quad f_z^c = 0.$$

Здесь  $f^c$  – дополнительная искомая переменная; величина  $f^{gr}$  определяется по формуле

$$f^{gr} = g(\rho_t - \rho_l)F,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ;  $\rho_t$ ,  $\rho_l$  – плотности материала трубы и промывочной жидкости соответственно;  $F$  – площадь поперечного сечения трубы БК.

С учетом равенства (5) преобразуем уравнения (11) к скалярному виду отдельно для соотношений силовой группы:

$$\begin{cases} \frac{dF_x}{ds} = -k_y F_z + k_z F_y - f^c; \\ \frac{dF_y}{ds} = -k_z F_x + k_x F_z - f_y^{gr}; \\ \frac{dF_z}{ds} = -k_x F_y + k_y F_x - f_z^{gr} \end{cases} \quad (12)$$

и моментной группы:

$$\begin{cases} \frac{dM_x}{ds} = -k_y M_z + k_z M_y + F_y; \\ \frac{dM_y}{ds} = -k_z M_x + k_x M_z - F_x; \\ \frac{dM_z}{ds} = -k_x M_y + k_y M_x. \end{cases} \quad (13)$$

В уравнениях (13) моменты  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  вычисляются по формулам [11]

$$M_x = EIk_x; \quad M_y = EIk_y; \quad M_z = GI_0 k_z, \quad (14)$$

где  $E$ ,  $G$  – параметры упругости Ламе материала трубы БК;  $I$  – центральный осевой момент инерции площади поперечного сечения трубы;  $I_0$  – полярный момент инерции площади сечения.

С помощью равенств (7), (9), (10) и двух первых уравнений системы (12) получим

$$F_x = -2EIav'v'' - a(M_z - EIU'v')(u''v' - v''u'); \quad (15)$$

$$F_y = -EIa \frac{d}{ds} (u''v' - v''u') + a(M_z - EIU'v')(v')^2. \quad (16)$$

Из первых двух равенств системы (14) следует, что правая часть третьего уравнения системы (13) равна нулю, поэтому

$$M_z = \text{const} \quad (17)$$

и его значение задается в граничных условиях.

Соотношения (7), (9), (10), (12), (13) позволяют сформулировать систему шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести искомых функций  $u$ ,  $v$ ,  $v'$ ,  $k_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ . Для их записи удобно ввести обозначения:  $q_1 = F_y$ ;  $q_2 = F_z$ ;  $q_3 = k_x$ ;  $q_4 = v$ ;  $q_5 = v'$ ;  $q_6 = u$ . Тогда имеем

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dq_1}{ds} &= 2EIq_3(q_5^2 - a^2q_5^4) - (M_z - EIq_5\sqrt{1-a^2q_5^2})q_3q_5\sqrt{1-a^2q_5^2} + \\ &\quad + q_2q_3 - f^{gr}aq_5; \\ \frac{dq_2}{ds} &= -q_1q_3 - 2EIaq_5^3q_3\sqrt{1-a^2q_5^2} + a(M_z - EIq_5\sqrt{1-a^2q_5^2})q_3q_5^2 - \\ &\quad - f^{gr}\sqrt{1-a^2q_5^2}; \\ \frac{dq_3}{ds} &= -\frac{aM_z}{EI}q_5^2 + a\sqrt{1-a^2q_5^2}q_5^3 + \frac{1}{EI}q_1; \\ \frac{dq_4}{ds} &= q_5; \\ \frac{dq_5}{ds} &= \frac{1}{a}q_3\sqrt{1-a^2q_5^2}; \\ \frac{dq_6}{ds} &= \sqrt{1-a^2q_5^2}. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Решение этой системы при заданных граничных условиях и величине  $M_z$  дает возможность с помощью формул (14)–(16) найти остальные функции, определяющие напряженно-деформированное состояние колонны, и затем по формуле

$$f^c = -k_y F_z + u'v'F_y - dF_x/ds \quad (19)$$

вычислить силу контактного взаимодействия БК со стенкой скважины.

Подчеркнем еще раз, что благодаря применению сопутствующей системы отсчета  $oxyz$  общее число разрешающих уравнений системы (18), включающей уравнения равновесия и геометрические уравнения, уменьшено до шести, в то время как порядок разрешающих уравнений общей теории криволинейных стержней равен двенадцати [11]. К тому же, если в рассматриваемой задаче не применять систему  $oxyz$ , число уравнений увеличилось бы еще на единицу в связи с добавлением новой искомой функции  $\vec{f}^c(s)$ .

**Методика решения системы нелинейных уравнений.** Для решения сформулированной задачи используем метод продолжения решения по параметру совместно с методом Ньютона [11]. Представим систему (18) в векторной форме

$$\vec{q}' = \vec{f}(\vec{q}, s, \lambda), \quad (20)$$

где  $\vec{q}(s)$  – шестимерный вектор состояния,  $\vec{q}(s) = [q_1(s), q_2(s), \dots, q_6(s)]^T$ ;  $\vec{f}(\dots)$  – вектор-функция правых частей системы (18);  $\lambda$  – параметр интенсивности возмущения (нагрузки); штрихом обозначена производная по  $s$ . Отметим, что вводимый параметр  $\lambda$  может быть как действительным, так и формальным, отражающим какие-либо количественные характеристики.

На краях  $s = 0$  и  $s = S$  интервала  $0 \leq s \leq S$  изменения переменной  $s$  заданы по три независимых краевых условия, представленных в векторной форме:

$$\bar{\varphi}[\bar{q}(0), \lambda] = 0; \quad (21)$$

$$\bar{\psi}[\bar{q}(S), \lambda] = 0. \quad (22)$$

Уравнения (20), (21) составляют зависящую от параметра  $\lambda$  нелинейную двухточечную краевую задачу. Пусть при некотором исходном значении  $\lambda = \lambda^{(n)}$  известно решение  $\bar{q}^{(n)}(s)$  поставленной задачи. Выбирая это решение в качестве опорного, дадим малое приращение  $\delta\lambda^{(n)}$  параметру  $\lambda$ . Тогда соответствующую ему вариацию  $\delta\bar{q}^{(n)}(s)$  решения  $\bar{q}^{(n)}(s)$  можно найти из линейного уравнения

$$\frac{d\delta\bar{q}^{(n)}}{ds} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} \delta\bar{q}^{(n)} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \delta\lambda^{(n)}, \quad (23)$$

полученного линеаризацией уравнения (20) в состоянии  $\bar{q}^{(n)}, \lambda^{(n)}$ .

Краевые уравнения для функции  $\delta\bar{q}^{(n)}$  формируются линеаризацией уравнений (21), (22):

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{q}} \delta\bar{q}^{(n)}(0) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda} \delta\lambda^{(n)} = 0; \quad (24)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{q}} \delta\bar{q}^{(n)}(S) + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda} \delta\lambda^{(n)} = 0. \quad (25)$$

Здесь матрицы Якоби  $\partial \bar{\varphi} / \partial \bar{q}$ ,  $\partial \bar{\psi} / \partial \bar{q}$  и векторы  $\partial \bar{\varphi} / \partial \lambda$ ,  $\partial \bar{\psi} / \partial \lambda$  также вычисляются в состоянии  $\bar{q}^{(n)}, \lambda^{(n)}$ .

Для построения  $\delta\bar{q}^{(n)}(s)$  выберем среди составляющих  $\delta q_i^{(n)}(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  такие три компоненты  $\delta q_j^{(n)}(s)$ , любые значения которых  $\delta q_j^{(n)}(0)$  не нарушат систему (24). Перенумеровав неизвестные  $\delta q_i^{(n)}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) так, чтобы индекс  $j$  принимал значения  $j = 1, 2, 3$ , решение задачи (23)–(25) представим в виде

$$\delta\bar{q}^{(n)}(s) = \bar{y}_\lambda \delta\lambda^{(n)} + Y(s) \delta c^{(n)}, \quad (26)$$

где  $\bar{y}_\lambda$  – решение задачи Коши для системы

$$\frac{d\bar{y}_\lambda}{ds} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} \bar{y}_\lambda + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \quad (27)$$

при нулевых начальных условиях;  $Y(s)$  – матрица размера  $6 \times 3$  решений системы

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} \bar{y} \quad (28)$$



с начальными условиями  $y_j = (0) = (\delta_1^j, \delta_2^j, \dots, \delta_6^j)$ ,  $j = 1, 2, 3$  для независимо варьируемых условий и начальными условиями, подбираемыми из уравнений (24) для остальных переменных  $y_i(0)$ ,  $i = 4, 5, 6$ . Здесь  $\delta_k^j$  – символ Кронекера. Вектор  $\delta \bar{c}^{(n)} = [\delta c_1^{(n)}, \delta c_2^{(n)}, \delta c_3^{(n)}]^T$  подбирается так, чтобы удовлетворялось уравнение (25):

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{q}} Y(S) \delta c^{(n)} = - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{q}} \bar{y}_\lambda(S) \delta \lambda^{(n)} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda} \delta \lambda^{(n)}. \tag{29}$$

Состояния, в которых

$$\left| \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{q}} Y(S) \right| = 0, \tag{30}$$

являются бифуркационными. В них система теряет устойчивость.

Поскольку вектор  $\delta \bar{q}^{(n)}(s)$  найден с использованием линеаризованных уравнений (23)–(25), решения  $\bar{q}^{(n+1)}(s) = \bar{q}^{(n)}(s) + \delta \bar{q}^{(n)}(s)$ ,  $\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \delta \lambda^{(n)}$  будут удовлетворять нелинейным краевым уравнениям (24), (25) приближенно с невязками

$$\bar{r}_\varphi^{(n+1)} = \bar{\varphi}[\bar{q}^{(n+1)}(0), \lambda^{(n+1)}]; \quad \bar{r}_\psi^{(n+1)} = \bar{\psi}[\bar{q}^{(n+1)}(S), \lambda^{(n+1)}]. \tag{31}$$

Поэтому на следующем шаге варьирования параметра  $\lambda$  невязки  $\bar{r}_\varphi^{(n+1)}$ ,  $\bar{r}_\psi^{(n+1)}$  добавляются в правые части соответствующих линеаризованных граничных условий (24), (25) с обратными знаками.

Для поставленной задачи уравнения (23), соответствующие системе (18), имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} \delta q'_1 &= q_3 \delta q_2 + [3EIq_5^2(1 - a^2 q_5^2) - M_z q_5 \sqrt{1 - a^2 q_5^2} + q_2] \delta q_3 + \\ &+ \left[ 6EIq_3 q_5 (1 - 2a^2 q_5^2) - M_z \frac{q_3(1 - 2a^2 q_5^2)}{\sqrt{1 - a^2 q_5^2}} - af^{gr} \right] \delta q_5 + \\ &+ (-q_3 q_5 \sqrt{1 - a^2 q_5^2}) \delta M_z; \\ \delta q'_2 &= -q_3 \delta q_1 + (-3EIa q_5^3 \sqrt{1 - a^2 q_5^2} + M_z a q_5^2 - q_1) \delta q_3 + \\ &+ \left[ \frac{EIa q_3 q_5^2}{\sqrt{1 - a^2 q_5^2}} (-9 + 12a^2 q_5^2) + 2M_z a q_3 q_5 + \frac{f^{gr} a^2 q_5^2}{\sqrt{1 - a^2 q_5^2}} \right] \delta q_5 + \\ &+ a q_3 q_5^2 \delta M_z; \end{aligned} \right. \tag{32a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta q'_3 &= \frac{1}{EI} \delta q_1 + \left[ -\frac{2a}{EI} M_z q_5 + a q_5^2 \frac{(3 - 4a^2 q_5^2)}{\sqrt{1 - a^2 q_5^2}} \right] \delta q_5 - \frac{q}{EI} q_5^2 \delta M_z; \\ \delta q'_4 &= \delta q_5; \\ \delta q'_5 &= \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 q_5^2} \delta q_3 - \frac{a q_3 q_5}{\sqrt{1 - a^2 q_5^2}} \delta q_5; \\ \delta q'_6 &= -\frac{a^2 q_5}{\sqrt{1 - a^2 q_5^2}} \delta q_5. \end{aligned} \right. \quad (326)$$

Конкретные зависимости для краевых уравнений (11), (24), (25) выбираются с учетом условий опирания БК на краях  $s=0$  и  $s=S$ . Они выражаются через вертикальную силу давления  $R$  долота на дно скважины, крутящий  $M_z$  и изгибающий  $M_x$  моменты, а также перемещения  $u$  и  $v$ . Каждая из этих величин может быть задана в качестве ведущего параметра  $\lambda$ . Интегрирование уравнений (32) при построении матрицы  $Y(s)$  и системы (18), а также при вычислении невязок (31) осуществляется методом Рунге-Кутты совместно с методом ортогонализации по Годунову.

**Результаты численных исследований.** С помощью предложенной методики выполнено компьютерное моделирование упругого закритического деформирования БК внутри цилиндрической вертикальной скважины глубиной  $H$ . Принято, что нижним концом БК длиной  $S$  упирается в дно скважины, поэтому на нее действует сжимающая сила реакции  $F_z(S) = -R$ . Величина  $R$  изменяется и по мере ее увеличения происходит закритическое деформирование БК. К верхнему концу БК приложена сила  $F_z(0) = G - R$ , где  $G$  – сила тяжести БК, рассчитанная с учетом действия гидростатической выталкивающей силы от промысловочной жидкости.

В работах [1, 6] показано, что критическое состояние бурильных колонн и формы потери их устойчивости значительно зависят от характера изменения осевой силы  $F_z$  по высоте, что проявляется в основном в выпучивании колонны в нижней части, где эти силы в результате действия сжимающей реакции  $R$  приобретают отрицательные значения. Поэтому при моделировании закритического формоизменения БК можно ограничиться рассмотрением некоторого нижнего ее участка и анализировать равновесные состояния БК при различных значениях  $R$ . Поскольку быстрота изменения функции  $F_z(s)$  зависит от плотности  $\rho_t$  материала трубы БК, интересно проследить за характером деформирования БК при разных  $\rho_t$ . В практике бурения обычно применяют трубы, изготовленные из стали, титана, алюминия или композитных материалов, поэтому величина  $\rho_t$  изменяется в широких пределах. В данных расчетах полагали  $\rho_t = 1300 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_t = 2500, 4000, 5000 \text{ кг/м}^3$ .

Расчеты выполнены при следующих исходных данных:  $H = 500 \text{ м}$ ;  $EI = 2,01 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ;  $M_z = 1 \cdot 10^3, 1 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $F = 9,11 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ,  $a = 0,05 \text{ м}$ .

Было принято, что в верхней точке  $u(0) = 0$ ,  $v(0) = 0$  и  $k_x(0) = 0$ , в нижней точке действует сжимающая сила  $R$ , и колонна может свободно поворачиваться. Моделирование осуществлялось путем пошагового увеличе-

ния  $R$  до тех пор, пока величина  $v'(0)$  достигала значения 0,01. Результаты расчетов приведены в таблице, где для четырех вариантов исходных данных  $\rho_t$  и  $M_z$  приведены значения углового перемещения  $v(S)$  нижнего конца БК, осевой силы  $F_z(0)$  и соответствующего им значения  $R$ . Полученные значения можно сопоставить с величиной  $G$ , равной полной силе тяжести, действующей на БК:

$$G = g(\rho_t - \rho_l)FH.$$

На рис. 3 приведены трехмерные изображения найденных форм осевых линий БК в закритических состояниях. Видно, что в закритических состояниях БК принимает спиральную форму, причем шаг спирали уменьшается по мере приближения к ее нижнему концу, а число витков (или угол  $v(s)$ ) увеличивается с ростом  $R$ .

**Значения параметров напряженно-деформированного состояния бурильных колонн в закритических состояниях**

№ варианта	$\rho_t$ , кг/м <sup>3</sup>	$M_z$ , Н·м	$G$ , Н	$v(S)$ , рад	$F_z(0)$ , Н	$R$ , Н
1	2500	$1 \cdot 10^3$	53621	12,67	2385	51245
2	4000	$1 \cdot 10^3$	120648	17,72	7242	113350
3	5000	$1 \cdot 10^3$	165333	20,16	10265	155080
4	5000	$1 \cdot 10^4$	165333	19,03	10409	154830

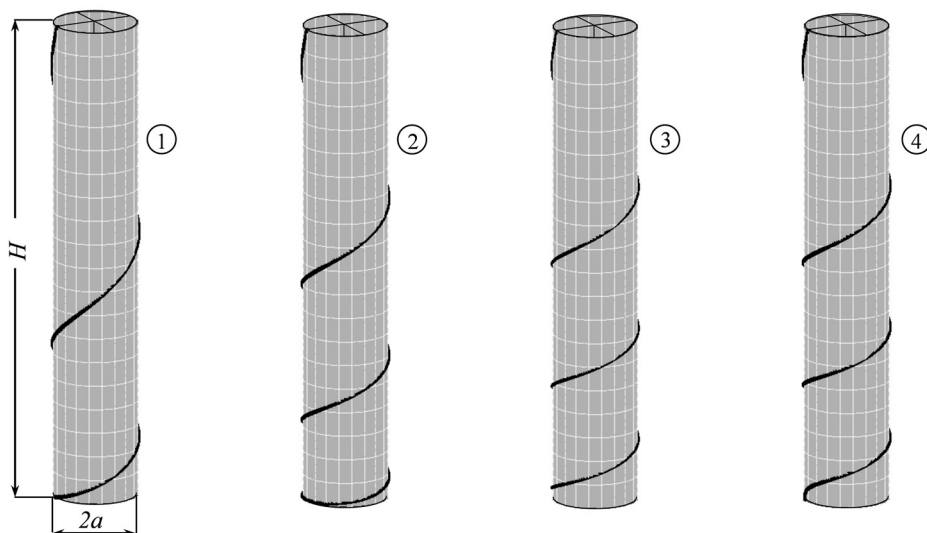


Рис. 3. Формы осевой линии бурильных колонн в закритических состояниях. (Цифры 1–4 соответствуют номеру варианта в таблице.)

Влияние момента  $M_z$  на закритическое деформирование БК проследить по двум рассмотренным примерам (№ 3 и 4 в таблице) не представляется возможным, этот вопрос требует специального исследования.

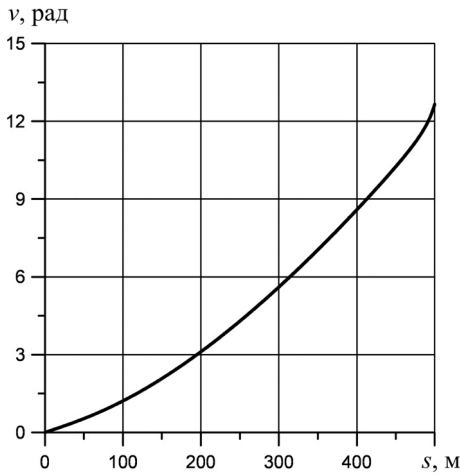


Рис. 4

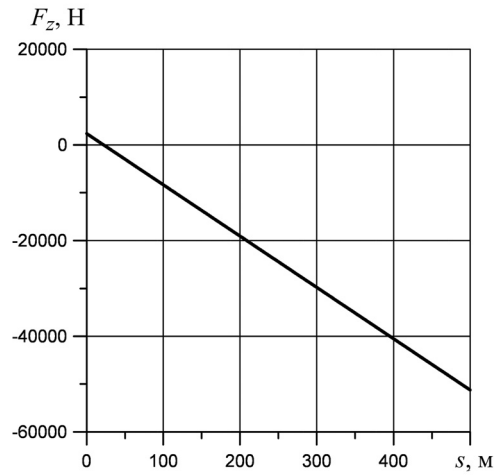
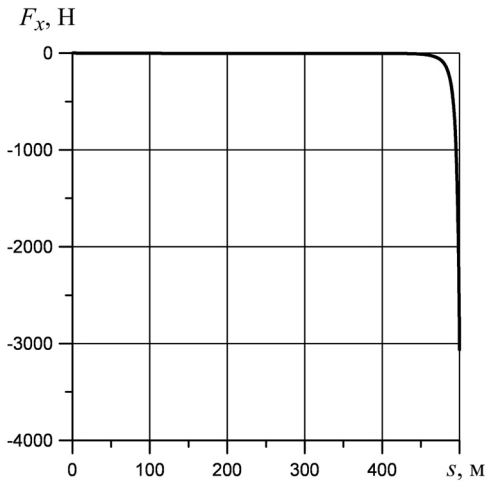


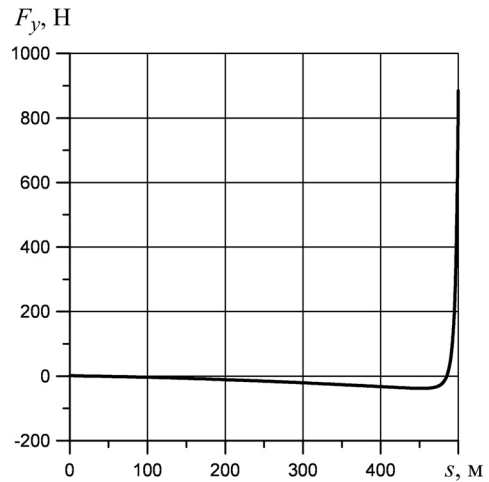
Рис. 5

Рис. 4. Развертка осевой линии  $L$  бурильной колонны на плоскость.

Рис. 5. Изменение осевой силы по длине бурильной колонны.



а



б

Рис. 6. Изменение перерезывающих сил  $F_x$  (а) и  $F_y$  (б) по длине бурильной колонны.

Функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние колонны, с изменением значений характерных параметров претерпевают лишь некоторые количественные изменения. Графики этих функций для исходных расчетных данных, соответствующих варианту № 1 в таблице, приведены на рис. 4–8. Диаграмма зависимости угловой координаты  $\nu(s)$  характеризует скорость уменьшения шага спирали осевой линии (рис. 4). Из рис. 5 видно, что несмотря на трехмерный характер деформирования БК, осевая сила  $F_z(s)$  из-за малого отношения  $a/H$  сохранила почти линейное очертание между крайними значениями  $F_z(0)$  и  $R$ . Значения перерезывающих сил  $F_x(s)$  и  $F_y(s)$  сравнительно малы на большей части области  $0 \leq s \leq S$  и быстро возрастают с приближением к нижнему краю  $s = S$  (рис. 6), где осевая линия

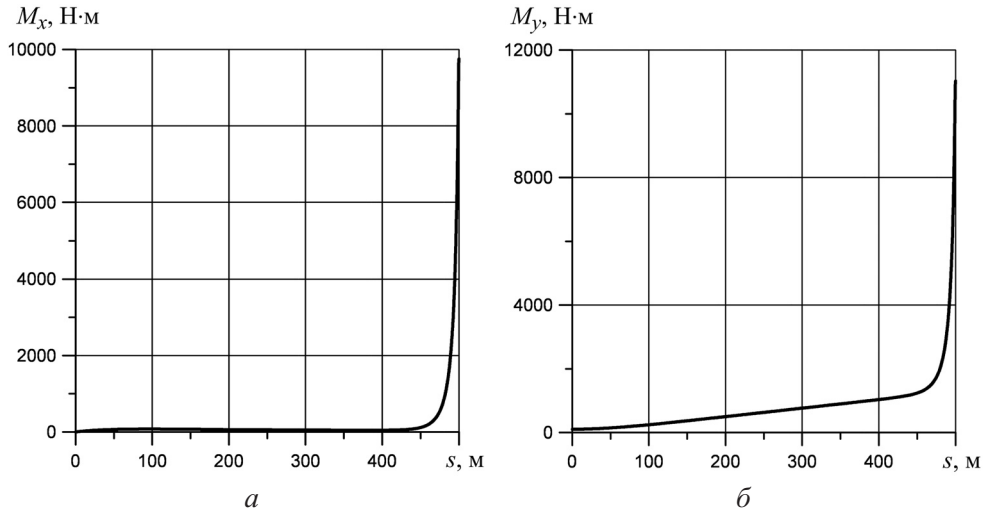


Рис. 7. Изменение изгибающих моментов  $M_x$  (а) и  $M_y$  (б) по длине буровой колонны.

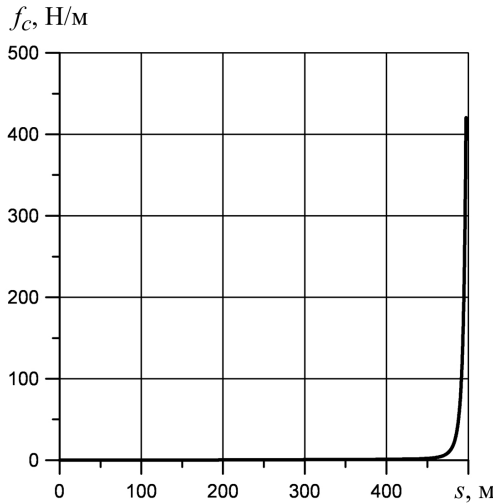


Рис. 8. Изменение контактной силы  $f_c$  по длине буровой колонны.

БК получает наибольшее искривление, а продольная сила  $F_z(S)$  – наибольшее значение  $R$ . Аналогичный характер имеют функции  $M_z(s)$  и  $M_y(s)$  – рис. 7.

После решения задачи по формуле (19) с помощью найденных функций  $u(s)$ ,  $v(s)$ ,  $F_x(s)$ ,  $F_y(s)$ ,  $F_z(s)$ ,  $k_y(s)$  вычисляется реакция связи  $f^c(s)$  – рис. 8. Видно, что она также имеет всюду малые значения и резко возрастает с приближением к краю  $s = S$ .

Полученные результаты позволяют заключить, что в верхней части БК, где она растянута и искривление мало, ее напряженное состояние почти безмоментное, и изгибание происходит в основном в зоне действия вертикальной сжимающей реакции  $R$  и моментов  $M_x(S)$ ,  $M_y(S)$ , прилегающих к краю  $s = S$ .

## Выводы

1. Поставлена задача об упругом закритическом изгибании протяженных бурильных колонн в цилиндрических полостях вертикальных нефтяных и газовых скважин.

2. Выполнено компьютерное моделирование процесса упругого деформирования бурильной колонны в цилиндрической полости под действием крутящего момента, распределенных осевых сил тяжести, вертикальной сжимающей реакции взаимодействия колонны с дном скважины и искомых распределенных сил давления стенки скважины на колонну. Исследовано ее напряженно-деформированное состояние.

3. Показано, что изгибание колонны происходит по форме трехмерной спирали с переменным шагом. При этом значения внутренних перерезывающих сил, изгибающих моментов и силы контактного взаимодействия БК с поверхностью скважины сравнительно невелики и имеют вид краевых эффектов с быстро возрастающими значениями на нижнем конце.

Работа выполнена в рамках проекта № 0112U000137.

## Резюме

Розглянуто задачу про пружне нелінійне згинне деформування бурильних колон у циліндричних порожнинах вертикальних надглибоких нафтових і газових свердловин. На основі теорії гнучких криволінійних стрижнів із використанням спеціально вибраної системи відліку побудовано нелінійні звичайні диференціальні рівняння, що описують контактну взаємодію труби бурильної колони зі стінкою свердловини. Запропоновано методику числового розв'язання цих рівнянь. Обговорюються результати комп'ютерного моделювання.

1. *Gulyayev V. I., Gaidaichuk V. V., Solovjov I. L., and Gorbunovich I. V.* The buckling of elongated rotating drill strings // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2009. – **67**, No. 2. – P. 140 – 148.
2. *Гуляев В. И., Худолій С. Н., Глушакова О. В.* Самовозбуждение крутильных колебаний колонн глубокого бурения // *Пробл. прочности.* – 2009. – № 6. – С. 31 – 43.
3. *Gulyayev V. I. and Borshch E. I.* Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2011. – **78**, No. 3. – P. 759 – 764.
4. *Gulyayev V. I., Hudoly S. N., and Glovach L. V.* The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – **48**. – P. 110 – 118.
5. *Mohiuddin M. A., Khan K., Abdulraheem A., et al.* Analysis of wellbore instability in vertical, directional, and horizontal wells using field data // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2006. – **55**, No. 1. – P. 83 – 92.
6. *Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Соловьев И. Л., Горбунович И. В.* Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения // *Пробл. прочности.* – 2006. – № 5. – С. 109 – 119.

7. *Gulyaev V. I., Gaidaichuk V. V., Solov'ev I. L., and Gorbunovich I. V.* Quasistatic bifurcation states of super-deep vertical drill strings // *J. Mining Sci.* – 2010. – **46**, No. 5. – P. 546 – 553.
8. *Cunha J. C.* Buckling of tubulars inside wellbores: a review on recent theoretical and experimental works // *SPE Drill. Compl.* – 2004. – **19**, No. 1. – P. 13 – 19.
9. *Lim C. W.* A spiral model for bending of non-linearly pretwisted helicoidal structures with lateral loading // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – **40**, No. 16. – P. 4257 – 4279.
10. *Mitchell R. F. and Miska S.* Helical buckling of pipe with connectors and torque // *SPE Drill. Compl.* – 2006. – **21**, No. 2. – P. 108 – 115.
11. *Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Кошкин В. Л.* Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наук. думка, 1992. – 344 с.
12. *Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Соловьев И. Л., Гловач Л. В.* Компьютерное моделирование сил сопротивления, действующих на криволинейные буровые колонны // *Пробл. прочности.* – 2007. – № 5. – С. 55 – 67.
13. *Gulyayev V. I., Khudoliy S. N., and Andrusenko E. N.* Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes // *Int. Multiscale Mech.* – 2011. – **4**, No. 1. – P. 1 – 16.
14. *Гуляев В. И., Горбунович И. В., Гловач Л. В.* Элементы теорії поверхонь. – Київ: Вид. РВВ НТУ, 2011. – 239 с.

Поступила 17. 09. 2012