

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 629.7.023.2

Оптимизация структуры композитных панелей при ограничениях по прочности и устойчивости

Я. С. Карпов, П. М. Гагауз

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского, “Харьковский авиационный институт”, Харьков, Украина

Рассмотрена задача оптимизации структуры композиционного материала для гладких панелей при ограничениях по прочности и устойчивости. Обоснованы типы оптимальных структур. Для проверки сформулированных выводов проведен ряд численных экспериментов.

Ключевые слова: композиционный материал, структура, панель, оптимизация, прочность, устойчивость.

В работах [1, 2] показано, что оптимальная структура слоистого композиционного материала (КМ) для панелей при ограничениях по устойчивости включает слои с армированием 0 , 90° и $\pm \varphi$, однако при этом не учитывалось влияние последовательности укладки слоев по толщине пакета на его изгибные жесткости, которые являются основными характеристиками при оценке устойчивости композитных конструкций.

Рассмотрим панель обшивки с симметричной схемой укладки слоев по толщине пакета, которая находится в условиях плоского напряженного состояния (рис. 1). Задачу оптимального армирования сформулируем следующим образом: необходимо отыскать такие значения структурных параметров КМ (количество слоев n , их толщины δ_k и углы укладки φ_k), которые обеспечивали бы минимальную суммарную толщину δ_Σ , выполнение условий прочности в каждом слое и устойчивость панели. Будем полагать, что все слои в пакете выкладываются из одного и того же материала. Для оценки прочности используем критерий Мизеса–Хилла:

$$\left(\frac{\sigma_{1k}}{F_{1k}}\right)^2 - \frac{\sigma_{1k} \sigma_{2k}}{F_{1k} F_{2k}} + \left(\frac{\sigma_{2k}}{F_{2k}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12k}}{F_{12}}\right)^2 \leq 1, \quad (1)$$

где σ_{1k} , σ_{2k} , τ_{12k} – напряжения в k -м слое пакета в локальной (местной) системе координат, связанной с направлением армирования;

$$F_{1k} = \begin{cases} F_{1p}, & \text{если } \sigma_{1k} > 0, \\ F_{1c}, & \text{если } \sigma_{1k} < 0; \end{cases} \quad F_{2k} = \begin{cases} F_{2p}, & \text{если } \sigma_{2k} > 0, \\ F_{2c}, & \text{если } \sigma_{2k} < 0; \end{cases} \quad (2)$$

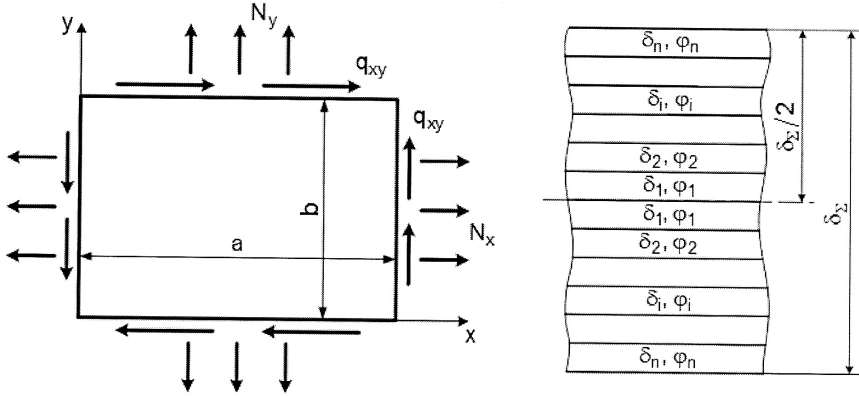


Рис. 1. Расчетная схема панели.

$F_{1p}, F_{1c}, F_{2p}, F_{2c}, F_{12}$ – пределы прочности КМ при растяжении и сжатии вдоль и поперек волокон и при сдвиге в плоскости армирования соответственно.

Развернутая форма записи условия прочности (1) как функции от структурных параметров КМ и внешней нагрузки приведена ранее [3]:

$$\begin{aligned} \Phi_{np}^{(k)} = & \cos^4 \varphi_k (d_{1k} \varepsilon_x^2 + d_{2k} \varepsilon_y^2 + d_{4k} \varepsilon_x \varepsilon_y) + \sin^4 \varphi_k (d_{1k} \varepsilon_y^2 + d_{2k} \varepsilon_x^2 + \\ & + d_{4k} \varepsilon_x \varepsilon_y) + \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k [4d_3 (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + d_{4k} (\varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2) + \\ & + 2\varepsilon_x \varepsilon_y (d_{1k} + d_{2k})] + \gamma_{xy}^2 [d_3 + \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k (d_{1k} + d_{2k} - 4d_3 - d_{4k})] + \\ & + \gamma_{xy} \sin \varphi_k \cos \varphi_k \{ \cos^2 \varphi_k [\varepsilon_x (2d_{1k} - 4d_3 - d_{4k}) - \varepsilon_y (2d_{2k} - 4d_3 - d_{4k})] + \\ & + \sin^2 \varphi_k [\varepsilon_y (2d_{1k} - 4d_3 - d_{4k}) - \varepsilon_x (2d_{2k} - 4d_3 - d_{4k})] \} \leq 1, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – деформации пакета слоев,

$$\varepsilon_x = \frac{N_x B_{22} - N_y B_{12}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{N_y B_{11} - N_x B_{12}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}; \quad \gamma_{xy} = \frac{q_{xy}}{B_{33}}; \quad (4)$$

$B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{12}$ – коэффициенты эффективной жесткости пакета слоев,

$$B_{ij} = 2 \sum_{k=1}^n \delta_k b_{ij}^{(k)}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} b_{11}^{(k)} = & \xi_1 \cos^2 2\varphi_k + \xi_2 \cos 2\varphi_k + \xi_3; & b_{33}^{(k)} = & -\xi_1 \cos^2 2\varphi_k + \xi_1 + G_{12}; \\ b_{22}^{(k)} = & \xi_1 \cos^2 2\varphi_k - \xi_2 \cos 2\varphi_k + \xi_3; & b_{12}^{(k)} = & -\xi_1 \cos^2 2\varphi_k + \xi_3 - 2G_{12}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\xi_{1,3} &= \frac{1}{4}[\bar{E}_1(1 \mp \mu_{21}) + \bar{E}_2(1 \mp \mu_{12}) \mp 4G_{12}]; \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(\bar{E}_1 - \bar{E}_2); \quad \bar{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}};\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}d_{1k} &= \bar{E}_1^2 \left(\frac{1}{F_{1k}^2} + \frac{\mu_{21}^2}{F_{2k}^2} - \frac{\mu_{21}}{F_{1k}F_{2k}} \right); \quad d_{2k} = \bar{E}_2^2 \left(\frac{\mu_{12}^2}{F_{1k}^2} + \frac{1}{F_{2k}^2} - \frac{\mu_{12}}{F_{1k}F_{2k}} \right); \\ d_3 &= \frac{G_{12}^2}{F_{12}^2}; \quad d_{4k} = \bar{E}_1 \bar{E}_2 \left(\frac{2\mu_{12}}{F_{1k}^2} + \frac{2\mu_{21}}{F_{2k}^2} - \frac{1 + \mu_{12}\mu_{21}}{F_{1k}F_{2k}} \right);\end{aligned}\quad (8)$$

$E_1, E_2, G_{12}, \mu_{12}$ – упругие характеристики КМ (модули упругости вдоль и поперек волокон, модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно).

Для оценки устойчивости панели в условиях совместного действия нормальных и касательных усилий часто используется критерий [4]:

$$\Phi_{\text{уст}} = -\frac{N_x}{N_{x0}} - \frac{N_y}{N_{y0}} + \left(\frac{q_{xy}}{q_{xy0}} \right)^2 \leq 1, \quad (9)$$

где N_x, N_y, q_{xy} – действующие погонные нагрузки, взятые со своим знаком; N_{x0}, N_{y0}, q_{xy0} – критические усилия при одноосном сжатии по оси x , при одноосном сжатии по оси y и при чистом сдвиге, величина которых определяется граничными условиями на краях пластины, ее изгибной жесткостью (коэффициентами $D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{12}$) и геометрией, т.е. размерами в плане [4–7]. В частности, при сжатии вдоль оси x имеем

$$N_{x0} = \frac{\pi^2}{b^2} \left[D_{11} \frac{m^2}{c^2} + 2(D_{12} + 2D_{33}) + D_{22} \frac{c^2}{m^2} \right], \quad (10)$$

где m – параметр волнообразования, характеризующий форму потери устойчивости, который находится из условия

$$m(m-1) < c^2 \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} < m(m+1). \quad (11)$$

Влияние последовательности укладки слоев по толщине пакета на величину критических усилий можно учесть при использовании следующих формул для определения изгибных жесткостей:

$$D_{ij} = 2 \sum_{k=1}^n b_{ij}^{(k)} \left[\frac{\delta_k^3}{12} + \delta_k \left(\sum_{s=1}^k \delta_s - \frac{\delta_k}{2} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

В качестве базового примера рассмотрим задачу оптимизации по условиям устойчивости структуры КМ для шарнирно опертой пластины при одноосном сжатии усилиями N_x . После некоторых преобразований уравнения (10) с учетом соотношений (6) и (12) получим

$$N_{x0} = \frac{2\pi^2}{b^2} \sum_{k=1}^n A_k \left[\frac{\delta_k^3}{12} + \delta_k \left(\sum_{i=1}^k \delta_i - \frac{\delta_k}{2} \right)^2 \right], \quad (13)$$

где

$$A_k = \xi_1 \cos^2 2\varphi_k \left(\frac{m^2}{c^2} - 6 + \frac{c^2}{m^2} \right) + \xi_2 \cos 2\varphi_k \left(\frac{m^2}{c^2} - \frac{c^2}{m^2} \right) + \xi_3 \left(\frac{m^2}{c^2} + 2 + \frac{c^2}{m^2} \right) + 4\xi_1. \quad (14)$$

Искомые параметры δ_k , φ_k и n будем определять с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Составим расширенный функционал:

$$L = 2\rho ab \sum_{k=1}^n \delta_k + \lambda(N_{x0} - N_x), \quad (15)$$

где λ – множитель Лагранжа; ρ – плотность КМ.

Разрешающая система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_k} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} = 0; \quad N_{x0} - N_x = 0. \quad (16)$$

Первое из уравнений (16) с учетом (15) записывается так:

$$2\rho ab + \lambda \frac{\partial N_{x0}}{\partial \delta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (17)$$

где

$$\frac{\partial N_{x0}}{\partial \delta_k} = \frac{2\pi^2}{b^2} \left[A_k \left(\sum_{i=1}^k \delta_i \right)^2 + 2 \sum_{j=k+1}^n A_j \delta_j \left(\sum_{i=1}^j \delta_i - \frac{\delta_j}{2} \right) \right]. \quad (18)$$

Подставим выражения (18) в систему уравнений (17) и вычтем из первого уравнения второе, из второго – третье и т.д. В результате (17) преобразуется к виду

$$(A_k - A_{k+1}) \left(\sum_{i=1}^k \delta_i \right)^2 = 0, \quad k = 1, \dots, (n-1);$$

$$2\rho ab + \lambda \frac{2\pi^2}{b^2} A_n \left(\sum_{k=1}^n \delta_k \right)^2 = 0.$$
(19)

Полученная система уравнений имеет два решения:

$$\delta_k = 0, \quad k = 1, \dots, (n-1), \quad \delta_n \neq 0;$$
(20)

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = A.$$
(21)

Из соотношений (20) следует: все слои в пакете, за исключением последнего (или первого), вырождаются, что в общем является закономерным, учитывая характер зависимости критического усилия N_{x0} от толщины δ_k (13).

Согласно (13), вариант решения (21) имеет место в следующих случаях:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n;$$
(22)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \pi/4;$$
(23)

$$\cos 2\varphi_k + \cos 2\varphi_{k+1} = \text{const.}$$
(24)

Последнее равенство равносильно условию чередования слоев:

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \dots; \quad \varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6 = \dots$$
(25)

Решения (20)–(22) обосновывают оптимальность однородного симметричного пакета. В этом случае с учетом четности функции $\cos 2\varphi$ требуемая толщина пакета определяется непосредственно из последнего уравнения (16).

Рассмотрим второе из уравнений (16). С учетом (13)–(15) получим

$$\frac{\partial N_{x0}}{\partial \varphi_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

или

$$\sin 2\varphi_k \left[2\xi_1 \cos 2\varphi_k \left(\frac{m^2}{c^2} - 6 + \frac{c^2}{m^2} \right) + \xi_2 \left(\frac{m^2}{c^2} - \frac{c^2}{m^2} \right) \right] = 0.$$
(26)

Каждое уравнение (26) имеет три варианта решения:

$$\varphi_k = 0;$$
(27)

$$\varphi_k = \pi/2; \quad (28)$$

$$\cos 2\varphi_k = -\frac{\xi_2(m^2 - c^4)}{2\xi_1(m^4 - 6m^2c^2 + c^4)}. \quad (29)$$

Соотношения (27)–(29) позволяют установить зависимость критических усилий от угла армирования: на интервале $\varphi \in [0; 90^\circ]$ функция N_{x0} имеет два или три экстремума и соответственно один или два максимума.

Для решения задачи оптимального армирования композитной панели, находящейся в условиях совместного нагружения растяжением (или сжатием) и сдвигом, необходимо изменить расширенный функционал:

$$L = 2\rho ab \sum_{k=1}^n \delta_k + \lambda(1 - \Phi_{уст}), \quad (30)$$

при этом ход решения идентичен рассмотренному выше примеру и дает аналогичные результаты.

Сформулированные выше выводы о типе оптимальных по устойчивости схем армирования ($[0]$, $[90^\circ]$ или $[\pm\varphi]$) подтверждаются данными численных экспериментов, в которых варьировались используемый материал (упругие характеристики), внешняя нагрузка (соотношение усилий N_x , N_y , q_{xy}) и геометрия панели (ее удлинение). На рис. 2 приведены результаты расчета композитных пластин размером 400×900 , 600×600 и 900×400 мм из однонаправленного углепластика Т300/934 со следующими свойствами [8]: $E_1 = 148$ ГПа; $E_2 = 9,65$ ГПа; $G_{12} = 4,55$ ГПа; $\mu_{12} = 0,3$; $F_{1p} = 1314$ МПа; $F_{1c} = 1220$ МПа; $F_{2p} = 43$ МПа; $F_{2c} = 168$ МПа; $F_{12} = 48$ МПа.

При оптимизации структуры КМ с учетом комплекса ограничений по прочности и устойчивости тип оптимальной структуры во многом определяется размерами панели и уровнем действующей нагрузки. Если для панели, спроектированной по устойчивости, выполняются также условия прочности (рис. 3,а), то такую структуру можно считать оптимальной, учитывая отсутствие запаса по устойчивости для уменьшения толщины (критерий устойчивости (9) выполняется в виде равенства). И наоборот, если активными являются условия прочности, а условия устойчивости выполняются в виде строгого неравенства, общим решением будет структура, оптимальная по прочности. Более интересен случай, когда области допустимых решений по прочности и устойчивости пересекаются (рис. 3,б). При этом общее решение может не соответствовать ни оптимуму по прочности, ни оптимуму по устойчивости.

Заранее установить активность или неактивность того или иного ограничения, как правило, не удастся. Это надо принимать во внимание при разработке алгоритмов решения задачи оптимального армирования.

В заключение отметим, что и аналитические решения (20)–(24), (27)–(29) и численные результаты получены в предположении о непрерывном характере структурных параметров. Это и позволило использовать метод

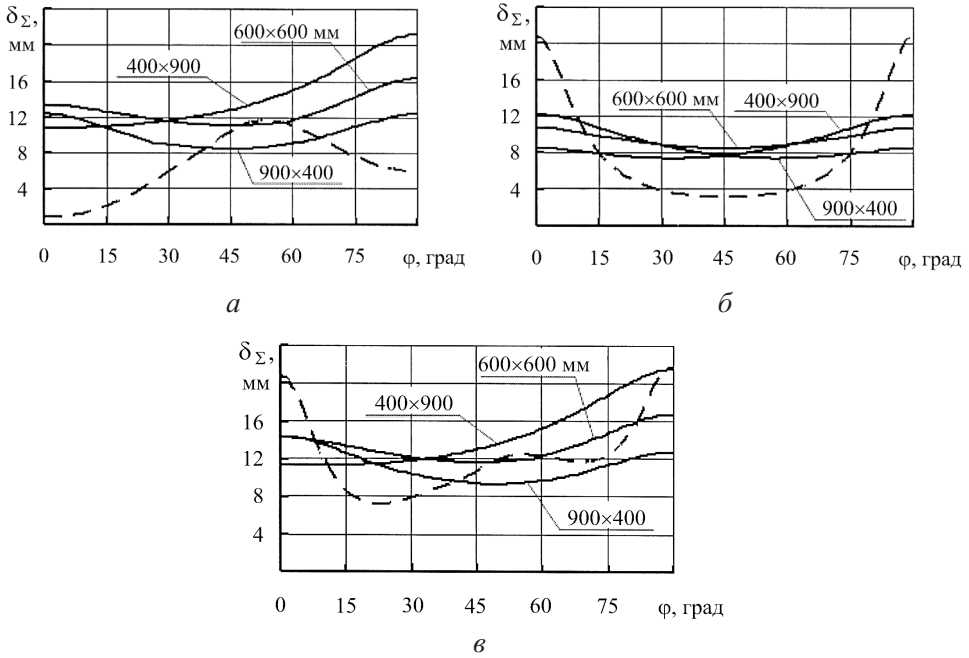


Рис. 2. Влияние угла укладки φ на толщины композитной панели, соответствующие требованиям по условиям прочности (сплошные линии) и устойчивости (штриховые линии): *a* – $N_x = -1000$ Н/мм, $N_y = q_{xy} = 0$; *б* – $N_x = N_y = 0$, $q_{xy} = 1000$ Н/мм; *в* – $N_x = -1000$ Н/мм, $N_y = 0$, $q_{xy} = 1000$ Н/мм.

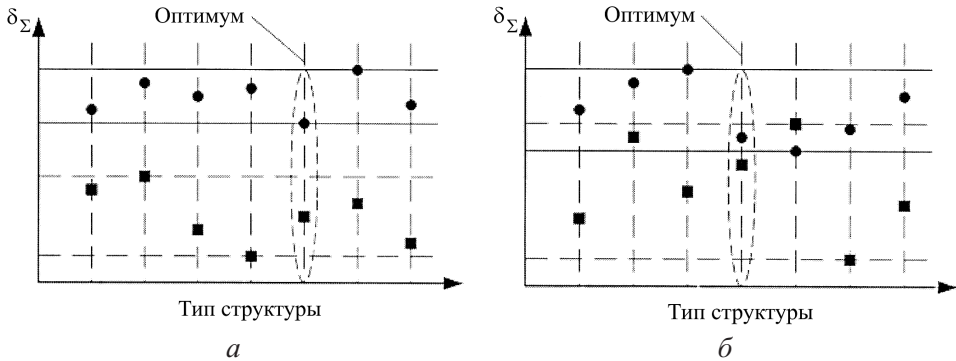


Рис. 3. К определению оптимальной структуры КМ при ограничениях по прочности (■) и устойчивости (●).

неопределенных множителей Лагранжа. Однако толщина элементарного слоя и механические характеристики КМ являются величинами взаимосвязанными, т.е. общая толщина пакета не может быть произвольной и должна соответствовать некоторому целому числу монослоев. Учет таких конструктивно-технологических ограничений означает, по сути, необходимость округления толщин в большую сторону, что, в свою очередь, приводит к появлению определенных запасов по прочности и устойчивости и соответственно неоднозначности оптимального решения (множество локальных оптимумов, в том числе и неоднородные по углам укладки структуры) [9]. Однако и в

этом случае максимальными запасами по устойчивости будут обладать именно однородные структуры $[\pm\varphi]$.

Резюме

Розглянуто задачу оптимізації структури композиційного матеріалу для гладких панелей при обмеженнях по міцності і стійкості. Обґрунтовано типи оптимальних структур. Для перевірки сформульованих висновків проведено ряд числових експериментів.

1. Карнов Я. С. Оптимизация структуры композиционного материала панелей летательных аппаратов при ограничениях по прочности, устойчивости, прогибу // Пробл. прочности. – 2004. – № 6. – С. 33 – 47.
2. Карнов Я. С., Гагауз П. М., Гагауз Ф. М. Оптимальное проектирование структуры композиционного материала панелей обшивки крыла летательного аппарата // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2003. – Вып. 16. – С. 40 – 44.
3. Карнов Я. С. Решение фундаментальной задачи проектирования структуры композиционных материалов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 2001. – Вып. 27. – С. 18 – 25.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
5. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
6. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
7. Азиков Н. С., Васильев В. В., Патеркас А. Д. Устойчивость композитных панелей при сжатии и сдвиге // Механика композитных материалов. – 1990. – № 2. – С. 351 – 353.
8. Material Properties T300/934 Carbon Epoxy. The New York Times Company. – <http://composite.about.com/library/data/blc-t300-934-1.htm>.
9. Гагауз П. М. Оптимизация структуры КМ с учетом конструктивно-технологических ограничений на толщину пакета // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2008. – Вып. 2 (53). – С. 121 – 126.

Поступила 18. 10. 2009