

Закономерности влияния аэродинамической связи лопаток на формирование спектра собственных колебаний венцов рабочих колес газотурбинных двигателей

А. П. Зиньковский, А. В. Побережников, В. А. Цимбалюк

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Представлены результаты аналитических и численных исследований по оценке влияния аэродинамической связи лопаток на формирование спектра собственных колебаний венцов рабочих колес как сложной механической системы, обладающей конструктивной поворотной симметрией, с учетом частотной расстройки лопаток.

Ключевые слова: лопаточный венец, расстройка частот, аэродинамическая связь, собственные колебания.

Введение и постановка задачи. Одной из актуальных проблем при создании современных газотурбинных двигателей (ГТД) является обеспечение вибрационной прочности лопаточного аппарата рабочих колес как одного из наиболее ответственных и напряженных узлов. Это объясняется тем, что более половины дефектов, которые выявляются при доводке двигателей, имеют вибрационное происхождение, и основная их часть приходится на лопаточный аппарат [1]. Среди явлений вибрационного характера наиболее распространены резонансные колебания рабочих лопаток и их автоколебания (флаттер). Именно изучение закономерностей таких колебаний с учетом возникающих в практике создания и эксплуатации двигателей проблем, как свидетельствуют данные многочисленных публикаций, обзор значительного числа которых приведен в работах [2, 3], постоянно находится в поле зрения исследователей, инженеров и конструкторов.

Для достоверного определения закономерностей динамического поведения и причин возникновения повреждений рабочих лопаток в условиях эксплуатации необходимо обязательно учитывать, во-первых, неизбежные отклонения в идентичности или расстройку (как технологическую, так и эксплуатационную) лопаток и, во-вторых, особенности их связанности [2–6].

Известно, что частотная расстройка лопаток, которая интегрально проявляется в различии их собственных частот и характеристик демпфирования колебаний, оказывает разное влияние на резонансные колебания и условия возникновения флаттера. Если при резонансных колебаниях расстройка может обусловить существенное повышение вибронапряженности лопаток [4–8], то при флаттере она благоприятно влияет на значения критических параметров его возникновения и таким образом может использоваться как пассивное средство борьбы с ним [9–11].

Взаимодействие лопаток может быть как механическое через диск, бандаж и другие конструктивные соединения, так и аэродинамическое через поток. Это обстоятельство обуславливает в общем случае необходимость

рассмотрения лопаточного венца, который конструктивно обладает поворотной симметрией как единой деформируемой системы.

Многими исследователями, в частности в работах [5–11], предложены расчетные модели венцов, учитывающие указанные выше виды связи лопаток. Однако рассмотрение известных результатов исследований показывает, что отсутствует комплексный анализ их влияния на формирование колебаний венцов как систем с нарушенной поворотной симметрией. Например, основные закономерности влияния расстройки лопаток на формирование резонансных колебаний венцов установлены в предположении наличия лишь механической связи [4–8], в то время как при изучении флаттера лопаток с учетом расстройки их частот учитывалась в большинстве случаев только аэродинамическая связь [9–11]. Однако для достоверного установления закономерностей колебаний расстроенных лопаточных венцов, как отмечается в работах [9, 11], необходимо учитывать все характерные типы связи лопаток. В частности, при изучении резонансных колебаний лопаток наряду с механической связью необходимо учитывать аэродинамическую связь, обусловливаемую обтеканием их газовым потоком.

На первом этапе решения задачи о колебаниях любой механической системы определяется спектр ее собственных колебаний, знание которого позволяет прогнозировать возможные резонансные режимы эксплуатации системы, а в случае флаттера решение аэроупругой собственной проблемы является одним из методов определения критических параметров его возникновения. Поэтому цель данной работы состоит в определении влияния аэродинамической связи лопаток на формирование спектра собственных колебаний расстроенных венцов рабочих колес газотурбинных двигателей.

Обобщенная расчетная модель венца и особенности аэродинамической связи лопаток. Матричное уравнение свободных колебаний любой дискретной модели венца, в предположении линейной зависимости силы сопротивления от скорости перемещения с учетом всех указанных выше видов связей лопаток, имеет вид [10]

$$[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} - \{\mathbf{Q}_a\} = 0, \quad (1)$$

где $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{K}]$ – матрицы инерционных, диссипативных и упругих характеристик системы соответственно; $\{\mathbf{Q}_a\}$ – вектор-столбец аэродинамических нагрузок, зависящих от вектор-столбца перемещений $\{\mathbf{q}\}$.

Рассмотрим решение задачи на примере одномерной дискретной модели венца (рис. 1), что не ограничивает [12] общности получаемых результатов. Каждая лопатка представляется в виде подсистемы с одной степенью свободы, коэффициент жесткости k_n и масса M_n которой соответствуют исследуемой форме колебаний лопатки, где $n = 0, 1, \dots, N - 1$ – номер лопатки (подсистемы); N – количество лопаток венца. Между подсистемами имеют место механическая и аэродинамическая связи. Механическая связь описывается упругими элементами с коэффициентом жесткости k_s . Исходя из приведенных в [13] результатов о быстром убывании упругого взаимовлияния лопаток при увеличении расстояния между ними исследуемая модель характеризуется так называемой “близостью” упругой связи, которая имеет место только между соседними подсистемами.

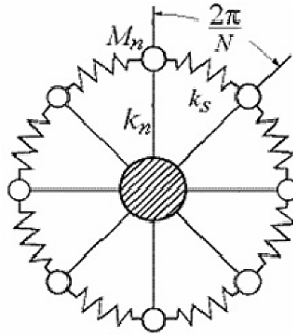


Рис. 1. Дискретная одномерная модель системы с поворотной симметрией.

Модель венца со строгой поворотной симметрией ($k_n = k_c$; $M_n = M_c$) при наличии только упругой связи подсистем будем считать невозмущенной (порождающей) системой. Такая система характеризуется симметричными циркулянтными матрицами инерционных $[\mathbf{M}]$ и упругих $[\mathbf{K}]$ характеристик. Собственную частоту колебаний ее подсистем обозначим как $\rho_c = \sqrt{k_c/M_c}$.

Учитывая постановку задачи, более подробно остановимся на определении параметров аэродинамической связи, которая обуславливается действием аэродинамических нагрузок \mathbf{Q}_a . Важной особенностью этих нагрузок является их зависимость не только от характеристик потока, но и от параметров колебаний лопаток, что вызывает, как будет показано ниже, их существенное влияние на формирование спектра собственных колебаний лопаточных венцов.

В Институте проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины разработана расчетно-экспериментальная методика определения аэродинамических нагрузок (сил и моментов), которые в предположении их линейной зависимости от колебаний лопаток выражаются через комплексные безразмерные аэродинамические коэффициенты влияния (АКВ) [14]. Тогда, выбирая решение в виде

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}_0\}e^{i\omega t} \quad (2)$$

($\{\mathbf{q}_0\}$ – вектор-столбец амплитуд перемещений; ω – частота колебаний системы), уравнение (1) может быть представлено в безразмерной форме:

$$-\bar{\omega}^2 [\bar{\mathbf{M}}] \{\bar{\mathbf{q}}_0\} + i\bar{\omega} [\bar{\mathbf{C}}] \{\bar{\mathbf{q}}_0\} + [\bar{\mathbf{K}}] \{\bar{\mathbf{q}}_0\} - \frac{\bar{\omega}^2}{\mu} [\mathbf{A}] \{\bar{\mathbf{q}}_0\} = 0. \quad (3)$$

Здесь $[\bar{\mathbf{M}}]$, $[\bar{\mathbf{C}}]$, $[\bar{\mathbf{K}}]$ – матрицы безразмерных инерционных, диссипативных и упругих характеристик системы соответственно; $\bar{\omega} = \omega/\rho_c$; $[\mathbf{A}]$ – матрица обобщенных АКВ [15]; $\{\bar{\mathbf{q}}_0\}$ – вектор-столбец безразмерных амплитуд перемещений; μ – массовый коэффициент лопатки, $\mu = 2M_b K_b^2 / (\rho_0 b^2 l_b)$, где M_b – приведенная масса лопатки; ρ_0 – плотность воздуха; b – хорда лопатки; l_b – длина лопатки; K_b – приведенная частота колебаний (число Струхалья), при которой определялись АКВ.

Результаты анализа многочисленных экспериментальных данных, полученных на основании испытаний прямых решеток лопаточных профилей, показывают, что АКВ, как и коэффициент жесткости упругой связи лопаток, быстро убывает по мере увеличения расстояния между ними (рис. 2). Для сравнения на рис. 2 приведены расчетные значения АКВ для венца из 56 лопаток (за исходную принята лопатка с номером 42) [16]. Это значит, что и в случае аэродинамической связи лопаток также может быть принято допущение о ее “близости”. Кроме того, имеет место неодинаковость в аэродинамическом влиянии данной лопатки на соседние к ней, расположенные вперед и назад по отношению к направлению вращения ротора.

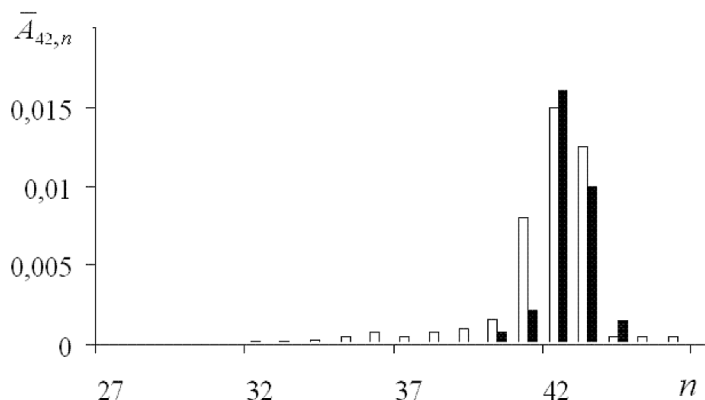


Рис. 2. Диаграмма экспериментальных (■) и расчетных (□) [16] значений АКВ.

Характеристическая матрица системы и ее особенности. По аналогии с работой [10] проведем решение задачи для случая пропорционального демпфирования, т.е. когда диссипативная матрица $[C]$ пропорциональна упругой $[K]$ (внутреннее трение) или инерционной $[M]$ (внешнее трение). В этом случае задача без ограничения ее общности может быть сведена к рассмотрению механической системы, колебания которой при наличии воздействия аэродинамических нагрузок описываются уравнением вида

$$\left(-\bar{\omega}^2 [\bar{M}] + [\bar{K}] - \frac{\bar{\omega}^2}{\mu} [A] \right) \{ \bar{q}_0 \} = 0. \quad (4)$$

Его можно записать в стандартной форме:

$$[D] \{ \bar{q}_0 \} = \lambda [I] \{ \bar{q}_0 \}, \quad (5)$$

где $[D]$ – характеристическая матрица, $[D] = [\bar{K}]^{-1} \left([\bar{M}] + \frac{1}{\mu} [A] \right)$; λ – характеристическое значение матрицы $[D]$, $\lambda = 1/\bar{\omega}^2$; $[I]$ – единичная матрица.

При рассмотрении конструктивно симметричной системы, состоящей из N подсистем с одной степенью свободы, матрица $[D]$ является циркулянтной и имеет вид

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \dots & d_{N-1} \\ d_{N-1} & d_0 & \dots & d_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 & d_2 & \dots & d_0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где каждая строка сдвинута относительно предыдущей на одну позицию вправо, т.е. имеет только N различающихся элементов.

При учете аэродинамической связи лопаток характеристическая матрица $[\mathbf{D}]$ является комплексной, поскольку АКВ представляют собой комплексные величины. Поэтому, учитывая, что матрица $[\mathbf{D}]$ неэрмитова, комплексными будут и ее собственные значения.

Известно [10], что собственные значения λ_k и соответствующие им нормированные собственные векторы $\{\bar{\mathbf{q}}_0\}_k$ циркулянтной матрицы $[\mathbf{D}]$ определяются выражениями:

$$\lambda_k = \sum_{n=0}^{N-1} d_n e^{i \frac{2\pi kn}{N}}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{\mathbf{q}}_0\}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(1, e^{i \frac{2\pi}{N} k}, e^{i 2 \frac{2\pi}{N} k}, \dots, e^{i(N-1) \frac{2\pi}{N} k} \right)^T = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} (1, e^{i\varphi_k}, e^{i2\varphi_k}, \dots, e^{i(N-1)\varphi_k})^T; \end{aligned} \quad (8)$$

$$k = 0, \dots, N-1; \quad \varphi_k = \frac{2\pi}{N} k,$$

где n – номер периода системы ($0 \leq n \leq N-1$), который в данном случае совпадает с номером подсистемы; φ_k – фазовый угол между периодами.

Для рассматриваемой системы, обладающей свойством поворотной симметрии (рис. 1), индекс k совпадает с числом волн деформации (узловых диаметров) m по окружности.

В соответствии с постановкой задачи первоначально рассмотрим ее решение при наличии лишь механической связи подсистем ($[\mathbf{A}] \equiv 0$). Для исследуемой системы матрица $[\mathbf{D}]$ является действительной. Учитывая принятое допущение о “близости” связи, с определенной степенью приближения и, не ограничивая общности задачи, в данном случае можно считать, что ненулевыми внедиагональными элементами этой матрицы являются только d_1 и d_{N-1} , которые равны между собой, т.е. $d_1 = d_{N-1} = d_s$. Выражение для определения собственных значений λ_m такой матрицы приобретает вид

$$\lambda_m = d_0 + d_s \left(e^{i \frac{2\pi m}{N}} + e^{i \frac{2\pi m(N-1)}{N}} \right) = d_0 + 2d_s \cos \frac{2\pi m}{N}, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (9)$$

Из (9) следует, что $\lambda_m = \lambda_{N-m}$, т.е. подтверждается свойство кратности собственных частот колебаний системы при выполнении условия $0 < m < N/2$.

Собственные формы колебаний рассматриваемой системы описываются выражением (8), т.е. они характеризуются синусоидальным распределением амплитуд по окружности системы. При этом кратным собственным частотам соответствуют пары взаимно ортогональных форм колебаний.

Представленные результаты соответствуют известным выводам о собственных колебаниях систем с конструктивной поворотной симметрией, характеризующихся только упругой связью подсистем [4].

При наличии наряду с упругой аэродинамической связи подсистем, что свойственно, как уже отмечалось, лопаточным венцам рабочих колес турбомашин, характеристическая матрица $[D]$, оставаясь циркулянтной, вследствие указанной выше неодинаковости аэродинамического взаимовлияния лопаток не обладает симметрией относительно главной диагонали. С учетом этой особенности комплексную аэродинамическую матрицу $[A]$ можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих:

$$\begin{aligned}
 [A] &= \begin{bmatrix} l_0 & l_1 & \cdots & l_{-1} \\ l_{-1} & l_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_1 & 0 & \cdots & l_0 \end{bmatrix} = [A]_{sym} + [\Delta A] = \\
 &= \begin{bmatrix} l_0 & l_{sym} & \cdots & l_{sym} \\ l_{sym} & l_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{sym} & 0 & \cdots & l_0 \end{bmatrix} + \Delta l \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

где параметр Δl характеризует величину асимметрии аэродинамической связи.

Это означает, что в отличие от системы с упругой связью при наличии аэродинамической связи подсистем характеристическая матрица $[D]$ не обладает симметрией относительно главной диагонали. Следовательно, как отмечается в работе [16], в спектре собственных колебаний такой системы, несмотря на ее конструктивную поворотную симметрию, кратные собственные частоты будут отсутствовать. Для подтверждения этого характеристическую матрицу $[D]$ представим в виде

$$[D] = [\bar{K}]^{-1} \left([\bar{M}] + \frac{1}{\mu} [A]_{sym} + \frac{1}{\mu} [\Delta A] \right) = [\bar{K}]^{-1} [\bar{M}]_{эКВ} + [\Delta D], \quad (11)$$

где $[\bar{M}]_{эКВ}$ – приведенная инерционная матрица, определяемая следующим выражением:

$$[\bar{M}]_{эКВ} = [\bar{M}] + \frac{1}{\mu} [A]_{sym}. \quad (12)$$

В данном случае будем считать, что характеристическая матрица $[\mathbf{D}]$ является полностью заполненной.

Матрица $[\Delta\mathbf{D}]$, которая зависит от кососимметричной составляющей $[\Delta\mathbf{A}]$ аэродинамической матрицы $[\mathbf{A}]$, также является кососимметричной и определяется выражением

$$[\Delta\mathbf{D}] = \frac{\Delta l}{\mu} [\overline{\mathbf{K}}]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Учитывая представление рассматриваемой матрицы в виде (11), а также необходимость выполнения условия кососимметричности, ее элементы, которые в данном случае являются комплексными величинами, можно определить следующим образом:

$$d_n = d_{sn} + \Delta d_n; \quad d_{N-n} = d_{sn} - \Delta d_n; \quad \Delta d_n = \Delta f_n(k_c, k_s)/\mu,$$

где $d_{sn} = (d_n + d_{N-n})/2$; $\Delta d_n = (d_n - d_{N-n})/2$; $f_n(k_c, k_s)$ – функция, зависящая от упругих характеристик системы. Параметр Δd_n характеризует асимметрию системы, обусловленную аэродинамической связью ее подсистем.

В предположении симметричности аэродинамической связи лопаток матрица $[\Delta\mathbf{D}] \equiv 0$. В этом случае влияние аэродинамической связи на формирование спектра собственных колебаний системы совершенно идентично влиянию упругой связи.

Поскольку свойство циркулянтности матрицы $[\mathbf{D}]$ (11) при наличии аэродинамической связи лопаток сохраняется, ее собственные векторы имеют вид (8).

С использованием приведенных выше представлений из (7) получим выражение для определения собственных значений матрицы $[\mathbf{D}]$ в зависимости от параметра асимметрии аэродинамической связи Δl :

$$\lambda_m = d_0 + 2 \sum_{n=1}^g d_{ns} \cos \frac{2\pi nm}{N} + i \frac{2\Delta l}{\mu} \sum_{n=1}^g f_n(k_0, k_s) \sin \frac{2\pi nm}{N}, \quad (14)$$

где $g = N/2$ – для четных значений N , $g = (N-1)/2$ – для нечетных.

Действительная часть собственных значений λ_m , которая характеризует собственную частоту колебаний, и мнимая, связанная с характеристикой их демпфирования, определяются по выражениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_m &= \operatorname{Re} d_0 + 2 \sum_{n=1}^g \operatorname{Re} d_{ns} \cos \frac{2\pi nm}{N} - 2 \frac{\operatorname{Im} \Delta l}{\mu} \sum_{n=1}^g f_n(k_0, k_s) \sin \frac{2\pi nm}{N}; \\ \operatorname{Im} \lambda_m &= \operatorname{Im} d_0 + 2 \sum_{n=1}^g \operatorname{Im} d_{ns} \cos \frac{2\pi nm}{N} + 2 \frac{\operatorname{Re} \Delta l}{\mu} \sum_{n=1}^g f_n(k_0, k_s) \sin \frac{2\pi nm}{N}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) следует, что собственные значения рассматриваемой системы не обладают свойством кратности, т.е. $\lambda_m \neq \lambda_{N-m}$. При этом заметим, что различаются как мнимые, так и действительные их части. Это означает, что при аэродинамической связи подсистем наряду с отсутствием кратности собственных частот колебаний системы, определяемых действительными частями собственных значений λ_m , различаются также характеристики демпфирования возбуждаемых форм колебаний такой системы, описываемые мнимыми частями λ_m . Это основное качественное отличие обладающих аэродинамической связью систем от таковых, характеризующихся наличием только упругой связи подсистем. Полученные результаты позволяют сделать заключение, что аэродинамическая связь лопаток может быть одним из источников частотно-диссипативной неоднородности венцов.

Рассмотрим формы колебаний исследуемой системы. Расщепившимся частотам соответствуют комплексно сопряженные формы колебаний, мнимая и действительная части которых могут образовывать бегущую волну деформации. В системе с упругой связью подсистем бегущая волна деформации образовывалась наложением форм колебаний, соответствующих кратной частоте. Для системы с аэродинамической связью подсистем такая волна имеет место для пары форм с расщепившимися частотами колебаний. Количество различных форм колебаний остается таким же, однако расщепившейся паре собственных частот соответствует пара взаимортогональных форм колебаний с одинаковым числом узловых диаметров.

Методы решения задачи. При определении влияния аэродинамической связи лопаток на формирование спектра собственных колебаний венцов с нарушенной поворотной симметрией использовали как прямой метод, так и метод возмущений.

Суть прямого метода заключается в решении аэроупругой задачи на собственные значения. Для решения уравнения (5) использовали стандартный математический пакет MathCad. Однако данный метод имеет один существенный недостаток, состоящий в том, что решение указанного уравнения чувствительно к величине расстройки системы. Поэтому, поскольку для большинства реальных лопаточных венцов она является малой, необходимы специальные подходы к получению корректного решения. Например, в данном случае удобно использовать метод возмущений [17], в соответствии с которым собственные значения уравнения (5) отыскиваются в виде разложения в ряд по степеням малого параметра ε . При этом, во-первых, значительно упрощается вычислительный процесс, так как исходно требуется лишь решение собственной задачи для настроенного венца. Во-вторых, использование метода позволяет получить представление о влиянии параметров расстройки на изменение спектра собственных колебаний рассматриваемой системы. Однако, как следует из проведенного обзора публикаций, его применение ограничивалось определением спектров собственных колебаний моделей венцов, учитывающих только один из возможных видов связи лопаток, в частности механической или аэродинамической. Так, впервые метод возмущений для определения влияния малой расстройки частот лопаток на спектр собственных колебаний венцов как систем с нарушенной поворотной симметрией в предположении наличия только упругой связи подсистем, моделирующих

лопатки, использовался в работе [18]. В дальнейшем он применялся к анализу колебаний расстроенных венцов с акцентом основного внимания на учете аэродинамической связи лопаток [10, 16].

Аэродинамическая связь лопаток рассматривается как возмущение, поскольку, как показано выше, она обуславливает явление, аналогичное расщеплению спектра собственных частот колебаний системы с упругой связью. Согласно методу возмущений, матрицу $[D]$ уравнения (5) необходимо записать в виде

$$[D] = [D^{(0)}] + \varepsilon [\Delta D], \quad (16)$$

где $[D^{(0)}]$ – матрица невозмущенной системы; $[\Delta D]$ – матрица возмущений.

Собственные значения матрицы $[D^{(0)}]$ и ее собственные векторы определяются выражениями (7) и (8) соответственно. Вследствие малости нарушения симметрии матрица $[D]$ имеет вид (16), и согласно теории возмущений искомые собственные значения и векторы системы можно представить в виде следующих сходящихся рядов:

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \varepsilon^3 \lambda^{(3)} + \dots; \quad (17)$$

$$\{q\} = \{q\}^{(0)} + \varepsilon \{q\}^{(1)} + \varepsilon^2 \{q\}^{(2)} + \varepsilon^3 \{q\}^{(3)} + \dots, \quad (18)$$

где $\lambda^{(j)}$ и $\{q\}^{(j)}$ – возмущения (поправки) j -го порядка, которые подлежат определению.

Алгоритм решения рассматриваемой задачи изложен в [19], поэтому здесь на нем останавливаться не будем.

Результаты вычислительных экспериментов. Для подтверждения достоверности изложенного алгоритма решения задачи первоначально были выполнены расчеты спектра собственных частот колебаний системы, состоящей из 12 подсистем ($N=12$), методом возмущений и прямым методом при наличии лишь упругой связи подсистем. Вычислительные эксперименты проводились в предположении расстройки только одной из подсистем, в данном случае $n=0$, за счет изменения коэффициента жесткости $k_0 = k_c + \Delta k$, что обуславливает расстройку Δp ее собственной частоты $p_0 = \sqrt{k_0/M_c}$ относительно собственной частоты p_c подсистем невозмущенной системы. Такое распределение расстройки подсистем было выбрано потому, что, во-первых, в этом случае нагляднее всего проявляется искажение собственных форм колебаний системы. Во-вторых, результаты исследований для такого варианта широко представлены в литературных источниках [4], сравнение с которыми позволяет установить правильность разработанного алгоритма определения спектра собственных частот колебаний системы.

При проведении расчетов варьировались как величина параметра Δk , так и коэффициент жесткости k_s упругой связи подсистем. Результаты расчетов приведены на рис. 3 в виде зависимостей погрешности Δp_m в определении

собственных частот колебаний p_m системы от числа волн деформации m , которая вычислялась из выражения

$$\Delta p_m = (p_m^B - p_m^П) / p_m^П,$$

где p_m^B и $p_m^П$ – собственные частоты колебаний системы, определенные методом возмущений и прямым методом соответственно.

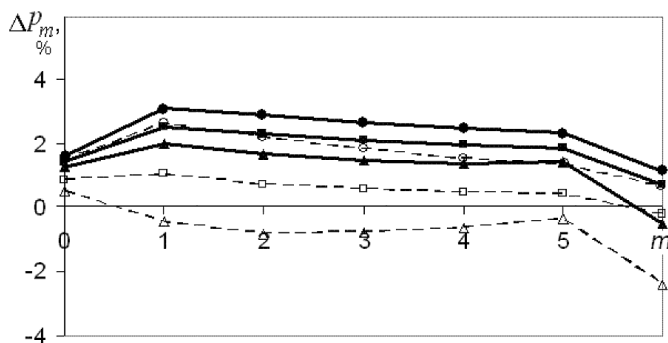


Рис. 3. Зависимости изменения погрешности в определении собственных частот колебаний системы методом возмущений от числа волн деформации при $k_s/k_c = 0,1$ (сплошные линии) и $0,5$ (штриховые линии) для значений параметра расстройки системы $\Delta k/k_c = 0,1$ (●, ○), $0,5$ (■, □) и $1,0$ (▲, △).

Как видно, величины указанной погрешности не превышают 4%, что подтверждает достоверность разработанного алгоритма. Кроме того, эти результаты свидетельствуют о преимуществе метода возмущений, используемого при расчете спектра собственных частот колебаний системы с малыми величинами ее расстройки. Поэтому в дальнейшем приводятся результаты расчетов по определению спектра собственных колебаний системы, состоящей из 24 подсистем ($N = 24$), полученные методом возмущений.

Поскольку собственные частоты колебаний системы, как видно из (14), зависят от мнимой части параметра асимметрии аэродинамической связи Δl , была проведена оценка возможной его величины на основе результатов экспериментального определения аэродинамических коэффициентов влияния на различных режимах работы газотурбинного двигателя. Были получены зависимости отношения действительной и мнимой частей параметра асимметрии аэродинамической связи Δl к модулю l_{sym} от приведенной частоты колебаний K_b для различных значений угла атаки θ (рис. 4). Из представленных зависимостей видно, что величина этого отношения может изменяться в довольно широких пределах. Поэтому можно заключить, что при существенной величине аэродинамической связи достоверная оценка ее влияния на спектр собственных частот колебаний такой системы невозможна без учета параметра асимметрии Δl .

Поскольку в данных вычислительных схемах определяются квадраты собственных частот колебаний системы, их зависимости от числа узловых диаметров m , как и аналогичные зависимости собственных частот, будем также называть частотными функциями. Рассмотрим результаты изучения

влияния на вид этих функций варьирования параметров $Re l_{sym}$ и $Im \Delta l$, от которых, как следует из (15), зависит формирование спектра собственных частот колебаний системы. При этом жесткость упругой связи предполагается неизменной ($k_s = 0,1k_c$). Учитывая, что симметричная составляющая аэродинамической связи определяет приведенную инерционную матрицу (12), представленные ниже результаты соответствуют системе с приведенными упруго-инерционными характеристиками. Кроме того, влияние аэродинамической нагрузки лопатки, обусловленной ее колебаниями, не учитывается, т.е. предполагается равенство нулю диагональных элементов матрицы АКВ. Такое допущение вполне оправданно, поскольку известно, что эта часть аэродинамических нагрузок вызывает лишь изменение инерционных и диссипативных свойств лопатки.

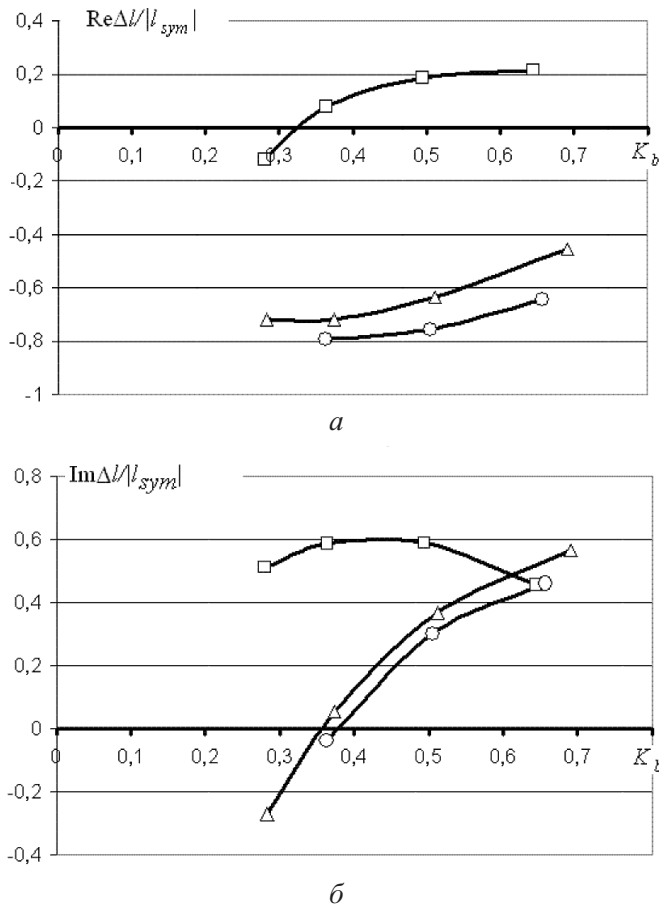


Рис. 4. Зависимости изменения отношения действительной (а) и мнимой (б) частей параметра асимметрии аэродинамической связи Δl к модулю l_{sym} от приведенной частоты колебаний для различных значений угла атаки θ , равных 5° (\square), 12° (\triangle) и 15° (\circ).

В качестве примера на рис. 5 приведены частотные функции системы при отсутствии расстройки частот подсистем для значений параметра $Im \Delta l$, равных 0 и $0,01\mu$. Анализ представленных результатов показывает, что асимметрия аэродинамической связи даже при строгой конструктивной поворот-

ной симметрии системы обуславливает расщепление кратных частот собственных колебаний системы. Подобное явление характерно для систем, обладающих лишь упругой связью подсистем при наличии расстройки их собственных частот. При этом формы колебаний системы, несмотря на расщепление ее частот, сохраняют синусоидальность.

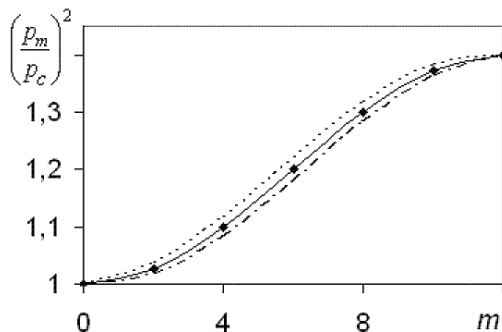


Рис. 5. Частотные функции системы при $\text{Im} \Delta l = 0$ (сплошная линия) и $0,01\mu$ (штриховая и штрихпунктирная линии).

Теперь рассмотрим влияние параметра l_{sym} как характеристики симметричной составляющей аэродинамической связи на изменение спектра собственных частот колебаний исследуемой системы. При этом будем предполагать, что ее асимметричная составляющая отсутствует, т.е. $\Delta l = 0$. На рис. 6 приведены частотные функции рассматриваемой системы. Видно, что с увеличением величины l_{sym} первая собственная частота колебаний системы, которая не зависит от уровня упругой связи подсистем, уменьшается. Такое влияние характеристик связи на указанную собственную частоту колебаний системы объясняется тем, что в этом случае, как следует из (12), возрастают величины элементов побочных диагоналей инерционной матрицы $[M]$, которые характеризуют инерционную связь подсистем. Изменения последующих собственных частот колебаний системы уже зависят от соотношения характеристик упругой и инерционной связи подсистем.

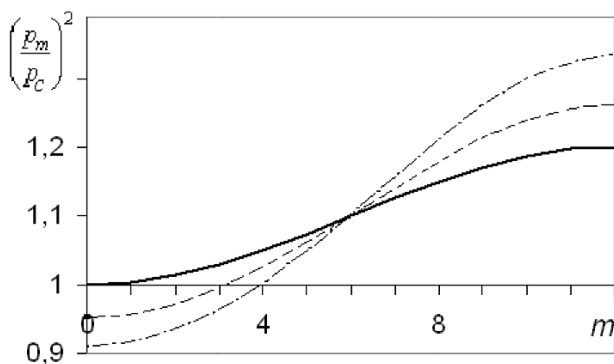


Рис. 6. Частотные функции системы с упругой связью подсистем при симметричной составляющей $\text{Re} l_{sym}$ их аэродинамической связи, равной 0 (сплошная линия), $0,025\mu$ (штриховая линия) и $0,05\mu$ (штрихпунктирная линия).

Известно [4], что ширина спектра собственных частот колебаний системы, соответствующего данной ее частотной функции, зависит от параметров упругой связи подсистем. Из представленных частотных функций следует, что при постоянстве этих параметров увеличение ширины частотного спектра обусловлено симметричной составляющей l_{sym} аэродинамической связи. Особенностью частотных функций является также их поворот относительно некоторой точки против часовой стрелки с ростом величины l_{sym} . Для ее определения в выражение (7) подставим элементы матрицы вида (16). Тогда формула для нахождения собственных значений λ_k приобретает вид

$$\lambda_k = \sum_{n=0}^{N-1} \left(d_n^{(0)} \cos \frac{2\pi kn}{N} + \Delta d_n \cos \frac{2\pi kn}{N} \right) = \lambda_{k(\text{мех})} + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta d_n \cos \frac{2\pi kn}{N}, \quad (19)$$

где $d_n^{(0)}$ и $\lambda_{k(\text{мех})}$ – элементы характеристической матрицы $[D]$ системы без аэродинамической связи и ее собственные значения соответственно; Δd_n – добавка, пропорциональная действительной части симметричной составляющей аэродинамических нагрузок.

Как видно из выражения (19), при $n = N/4$ его слагаемое $\sum_{n=0}^{N-1} \Delta d_n \cos \frac{2\pi kn}{N} = 0$, т.е. частота колебаний, соответствующая числу узловых диаметров $m = N/4$, не изменяется при варьировании действительной частью симметричной составляющей аэродинамической связи подсистем. Также можно заключить, что частоты колебаний, соответствующие формам с числом узловых диаметров $m < N/4$, уменьшаются с ростом действительной части симметричной составляющей аэродинамической связи, при $m > N/4$ – увеличиваются.

Одной из наиболее сложных проблем исследования колебаний рабочих колес является изучение влияния расстройки частот лопаток на их вибрационные характеристики. В контексте поставленной задачи проанализируем влияние расстройки подсистем на формирование спектра собственных колебаний модели венца с учетом рассматриваемых видов связей лопаток.

Для решения этой задачи были проведены расчеты по определению собственных частот колебаний исследуемой системы при $\Delta k = 0,025 k_c$ и $k_s = 0,1 k_c$ как при наличии только симметричной составляющей матрицы аэродинамической связи, так и ее асимметричной части. На рис. 7 приведены частотные функции при $\text{Im } \Delta l = 0$ и $0,05\mu$. Сравнение полученных частотных функций с таковыми для системы, характеризующейся лишь упругой связью подсистем, показывает, что аэродинамическая связь в целом качественно не изменяет закономерности их формирования. При учете лишь симметричной составляющей аэродинамической связи для выбранного варианта расстройки частот подсистем изменяется только одна из парных собственных частот колебаний системы. Характер данного влияния расстройки подтверждает сделанный выше вывод о возможности использования в этом случае механической системы с приведенными упругоинерционными характеристиками.

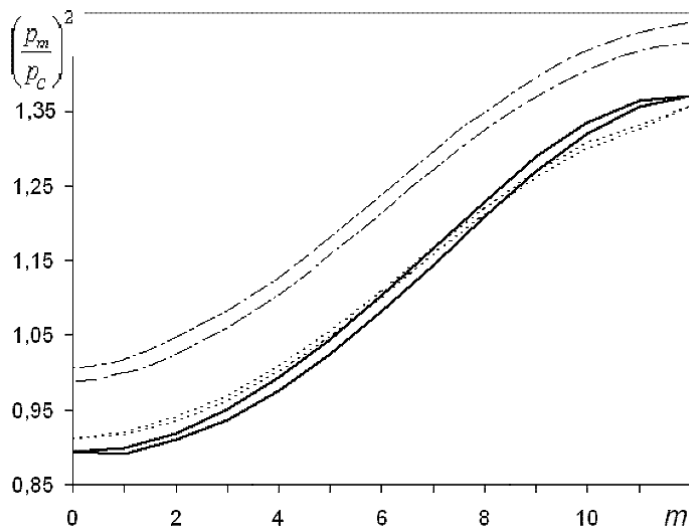


Рис. 7. Частотные функции системы с упругой связью ($k_s = 0,1k_c$) при $\Delta k = 0,025k_c$ без аэродинамической связи (штрихпунктирные линии) и с учетом только ее симметричной ($\text{Im } \Delta l = 0$) (штриховые линии) и асимметричной ($\text{Im } \Delta l = 0,05\mu$) (сплошные линии) составляющих.

Учет несимметричной составляющей аэродинамической связи приводит к росту расщепления частот изначально парных форм колебаний системы.

Для определения взаимовлияния расстройки подсистем и их аэродинамической связи были определены зависимости изменения расщепления частот некоторых парных форм колебаний системы от относительной величины расстройки $\Delta k/k_c$ выбранной подсистемы (рис. 8). Как видно, с увеличением параметра $\Delta k/k_c$ величина расщепления кратных частот системы с асимметрией аэродинамической связи подсистем практически не изменяется для форм колебаний, наиболее удаленных по частоте от середины частотного спектра, соответствующего числу узловых диаметров $m = N/4$. Для рассматриваемой системы это относится к формам колебаний, соответствующим $m = 1$ и 11. Для формы колебаний с числом узловых диаметров $m = 5$ наблюдается лишь локальное изменение величины расщепления парных частот. Это можно объяснить полученными с использованием метода возмущений выводами об уплотнении спектра частот колебаний в его центральной части. Поэтому для данной пары частот влияние соседних форм колебаний наибольшее, что и вызывает изменение величины расщепления в определенном диапазоне расстройки подсистем.

При учете только симметричной составляющей аэродинамической связи подсистем характер изменения величины расщепления парных частот колебаний в зависимости от параметра $\Delta k/k_c$ такой же, как и при наличии лишь упругой связи подсистем.

Таким образом, анализ полученных результатов показывает, что основное влияние на расщепление кратных частот колебаний системы оказывает асимметрия аэродинамической связи подсистем.

Проведем анализ влияния аэродинамической связи подсистем на формы колебаний расстроенной системы.

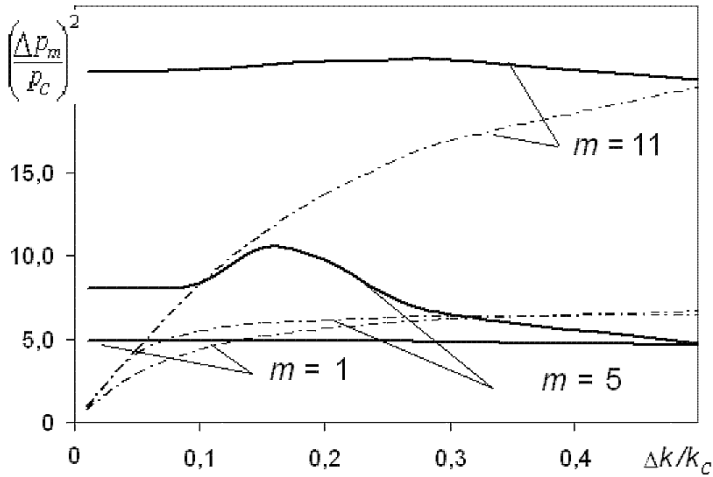


Рис. 8. Изменение расщепления частот некоторых парных форм колебаний системы в зависимости от величины параметра расстройки системы при значении параметра асимметрии $\text{Im } \Delta l$ аэродинамической связи, равном 0 (штрихпунктирные линии) и $0,05\mu$ (сплошные линии).

Поскольку симметричная составляющая аэродинамической связи, как установлено выше, не приводит к изменению закономерностей формирования частотного спектра расстроенной системы, искажение ее форм колебаний будет таким же, как и в случае наличия лишь упругой связи подсистем. Это подтверждается представленными на рис. 9 формами колебаний для $m=0$, полученными при одном и том же значении коэффициента жесткости k_s упругой связи подсистем, равном $0,1k_c$, для различных значений параметров Δk и $\text{Im } \Delta l$. Следует отметить, что при варьировании параметром Δk , характеризующим расстройку системы, формы ее колебаний были определены при фиксированном значении параметра $\text{Im } \Delta l = 0,01\mu$. При варьировании параметром асимметрии аэродинамической связи $\text{Im } \Delta l$ принимается постоянной величина параметра $\Delta k = 0,05k_c$.

Анализ представленных на рис. 9,а форм колебаний системы с аэродинамической связью показывает, что при фиксированном уровне ее симметрии влияние величины частотной расстройки подсистемы на разброс амплитуд исследуемой формы колебаний аналогично таковому для системы, обладающей только упругой связью подсистем, т.е. разброс амплитуд возрастает с увеличением Δk . При фиксированном значении Δk с увеличением характеристики асимметрии аэродинамической связи разброс амплитуд колебаний, как следует из рис. 9,б, уменьшается. Однако с уменьшением параметра Δk (рис. 9,а) кроме уменьшения разброса амплитуд становится более “гладким” вид формы колебаний. Увеличение параметра $\text{Im } \Delta l$, хотя и снижает разброс амплитуд, однако не уменьшает искажение формы колебаний. Это связано с тем, что в данном случае возрастает влияние соседних форм колебаний, проявляющееся в возникновении дополнительных экстремумов в рассматриваемой форме колебаний (рис. 9,б). Следовательно, увеличение асимметрии аэродинамической связи приводит к качественно новой чувствительности системы к расстройке по сравнению с системой, обладающей только упругой связью подсистем.

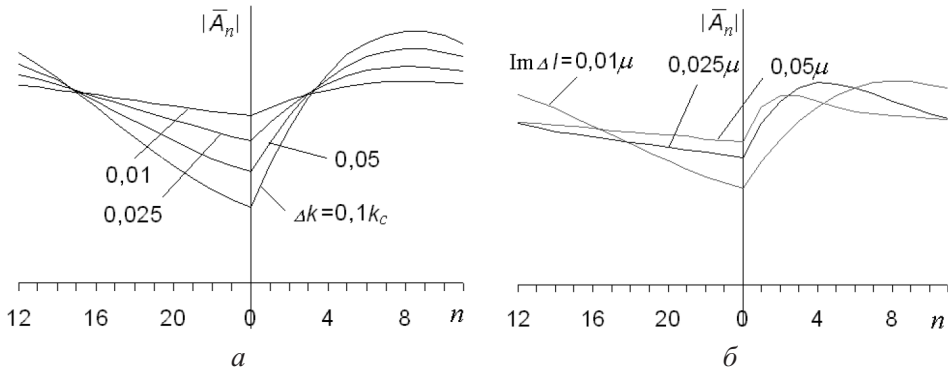


Рис. 9. Формы колебаний $m = 0$ системы при варьировании параметрами ее расстройки Δk ($\text{Im} \Delta l = \text{const}$) – а) и асимметрией аэродинамической связи $\text{Im} \Delta l$ ($\Delta k = \text{const}$) – б).

Выводы

1. Подтверждено, что асимметрия аэродинамической связи подсистем обуславливает расщепление кратных частот колебаний при одновременном сохранении синусоидальности форм систем со строгой конструктивной поворотной симметрией.

2. На основании результатов экспериментального определения нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на рабочие лопатки турбомашин, получены возможные диапазоны изменения параметра асимметрии аэродинамической связи подсистем.

3. Проведено сравнение результатов определения спектра частот собственных колебаний прямым расчетом и с использованием алгоритма, разработанного на основе метода возмущений. Показано, что метод возмущений обеспечивает приемлемую точность для выбранных параметров расстройки и связи подсистем.

4. Установлено, что основное влияние на расщепление парных частот колебаний расстроенной системы оказывает асимметричная составляющая аэродинамической связи, которая имеет качественно иное влияние на формы колебаний по сравнению с симметричной. Симметричная составляющая аэродинамической связи обуславливает увеличение лишь ширины частотного спектра настроенной системы.

Резюме

Представлено результати аналітичних і числових досліджень щодо визначення впливу аеродинамічного зв'язку лопаток на формування спектра власних коливань вінців робочих колес як складної механічної системи, що має конструктивну поворотну систему, з урахуванням частотного розладу лопаток.

1. *Ножницкий Ю. А.* Разработка ключевых (критических) технологий для создания нового поколения газотурбинных двигателей // Новые технологические процессы и надежность ГТД: Науч.-техн. сб. – М.: ЦИАМ, 2000. – Вып. 1: Блиски и блинги турбомашин. – С. 5 – 34.

2. *Srinivasan A. V.* Vibration of bladed disk assemblies – a selected survey // *J. Vibr. Acoust. Stress Reliab. Des.* – 1984. – **106**, No. 2. – P. 165 – 168.
3. *Slater J. C., Minkiewicz G. R., and Blair A. J.* Forced response of bladed disk assemblies – a survey // *The Shock Vibr. Digest.* – 1999. – **31**, No. 1. – P. 17 – 24.
4. *Иванов В. П.* Колебания рабочих колес турбомашин. – М.: Машиностроение, 1983. – 224 с.
5. *Воробьев Ю. С.* Колебания лопаточного аппарата турбомашин. – Киев: Наук. думка, 1988. – 224 с.
6. *Зиньковський А. П.* Зв'язані коливання регулярних механічних систем з порушеною симетрією: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Київ, 1996. – 35 с.
7. *Иванов В. П.* К вопросу о причинах разброса напряжений в упругих телах, конструктивно обладающих циклической симметрией // *Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов: Тр. КуАИ им. С. П. Королева.* – 1969. – Вып. 36. – С. 93 – 99.
8. *Ewins D. J.* The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks // *J. Sound Vibration.* – 1969. – **9**, No. 1. – P. 65 – 79.
9. *Kaza K. R.V. and Kielb R. E.* Flutter and response of a mistuned cascade in incompressible flow // *AIAA J.* – 1982. – **20**, No. 8. – P. 1120 – 1127.
10. *Bendiksen O. O.* Flutter of mistuned turbomachinery rotors // *J. Eng. Gas Turb. Power.* – 1984. – **106**, No. 1. – P. 25 – 33.
11. *Шунов Р. А.* К теории флаттера динамически неоднородной решетки профилей // *Лопаточные машины и струйные аппараты.* – М.: Машиностроение, 1969. – Вып. 4. – С. 146 – 165.
12. *Побережников А. В., Зиньковский А. П.* К вопросу о колебаниях расстроенного венца с различными видами связи лопаток // *Вибрации в технике и технологиях.* – 2001. – № 4 (20). – С. 97 – 101.
13. *Бауэр В. О., Шорр Б. Ф.* Влияние расстройки частот лопаток на резонансные колебания // *Прочность и динамика авиационных двигателей.* – М.: Машиностроение, 1971. – Вып. 6. – С. 75 – 98.
14. *Цимбалюк В. А., Зиньковский А. П., Побережников А. В.* Экспериментально-расчетная оценка динамической устойчивости лопаточных венцов рабочих колес компрессоров газотурбинных двигателей // *Пробл. прочности.* – 2001. – № 6. – С. 15 – 28.
15. *Курзин В. Б.* О влиянии расстройки собственных частот лопаток турбомашин на устойчивость их колебаний в потоке // *Лопаточные машины и струйные аппараты.* – М.: Машиностроение, 1969. – Вып. 4. – С. 166 – 175.
16. *Pierre C. and Murthy D. V.* Aeroelastic modal characteristics of mistuned blade assemblies: Mode localization and loss of eigenstructure // *AIAA J.* – 1992. – **30**, No. 10. – P. 2483 – 2496.
17. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. – М.: Государственное изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 620 с.

18. *Иванов В. П., Сердотецкий А. С.* О собственных формах и частотах поворотно-симметричной системы с несовершенствами // *Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов.* – 1975. – Вып. 2 (73). – С. 34 – 44.
19. *Побережников А. В.* Оценка влияния аэродинамической связи лопаток на колебания венцов методом возмущений // *Вест. Нац. техн. ун-та “ХПИ”.* – 2002. – **9**, № 9. – С. 9 – 14.

Поступила 19. 11. 2008