# НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 620.178.5:620.179

## Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия трещины в упругом теле при супергармоническом резонансе

**В. В. Матвеев, О. Е. Богинич**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Рассматривается приближенный аналитический метод расчета основного параметра нелинейности колебательного процесса упругого тела с закрывающейся трещиной, моделируемого системой с одной степенью свободы с асимметричной билинейной восстанавливающей силой, при сильном супергармоническом резонансе 2-го порядка.*

***Ключевые слова***: нелинейные колебания, супергармонический резонанс, вибродиагностика усталостного повреждения.

**Введение**. Одним из наименее исследованных направлений в оценке возможного изменения вибрационного состояния элементов конструкций в процессе их длительной эксплуатации и разработке вибродиагностических методов обнаружения повреждений типа усталостных трещин, как уже отмечалось [1, 2], является установление зависимостей между параметрами закрывающейся трещины и параметрами колебательного процесса при нелинейных резонансах.

Ранее были получены приближенные аналитические решения для определения вибродиагностических параметров подобного типа повреждения при вынужденных колебаниях упругого тела в области сильного и слабого субгармонического резонансов порядка 1/2 [2, 3], а также слабого супергармонического резонанса 2-го порядка [1].

В данной работе в развитие сообщения [1] рассматривается приближенное аналитическое решение для случая сильного супергармонического резонанса.

**Методика приближенного решения**. Методика базируется на используемых ранее основных положениях [1, 2]:

1) при относительно малых размерах трещины нормального отрыва можно пренебречь некоторым различием в формах колебаний упругого тела на полуциклах его деформирования с открытой и закрытой трещиной и для данной формы собственных колебаний представить его моделью системы с одной степенью свободы с билинейной асимметричной характеристикой

восстанавливающей силы. Вынужденные колебания такой системы описываются дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2h\frac{du}{dt}+\omega^2[1-0{,}5\alpha(1+\operatorname{sign}u)]u=q_0\sin\nu t. \qquad (1)$$

Здесь $\omega$ – собственная частота колебаний неповрежденного тела, или тела с закрытой трещиной; $\alpha$ – параметр, характеризующий относительное изменение квадрата собственной частоты,

$$\alpha=1-\left(\frac{\omega_{\text{о}}}{\omega}\right)^2, \qquad (2)$$

где $\omega_{\text{о}}$ – собственная частота колебаний упругого тела при открытой трещине.

Параметр $\alpha$ зависит от вида, относительных размеров и местоположения трещины, относительных размеров и формы колебаний конструктивного элемента и может быть определен через энергетическую характеристику его повреждения $\kappa=\Delta\Pi_{\text{т}}/\Pi_0$:

$$\alpha=\frac{\kappa}{1+\kappa}, \qquad (3)$$

где $\Pi_0$ – потенциальная энергия деформации неповрежденного упругого тела; $\Delta\Pi_{\text{т}}$ – приращение потенциальной энергии, обусловленное увеличением его податливости в результате наличия трещины и определяемое через коэффициент интенсивности напряжений. Примеры определения параметров $\kappa$ и $\alpha$ при растяжении и изгибе стержней прямоугольного поперечного сечения и изгибе прямоугольных пластин в условиях деформирования по собственным формам колебаний и наличия различного вида трещин нормального отрыва рассматривались соответственно в [3, 4] и [5, 6];

2) при супергармоническом резонансе $\nu=\omega_0/2$ кроме основной, первой гармоники колебаний $A_1\sin(\nu t-\gamma_1)$, соответствующей частоте вынуждающей силы $\nu$, возникают колебания со спектром гармонических составляющих основного резонанса ($\nu=\omega_0$), определенным с использованием асимптотического метода нелинейной механики [1, 7]. Здесь $\omega_0$ – собственная частота колебаний упругого тела при закрывающейся трещине [2],

$$\omega_0=\frac{2\omega\omega_{\text{о}}}{\omega+\omega_{\text{о}}}=\frac{2\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}\omega; \qquad (4)$$

3) амплитуда первой гармоники $A_1$ примерно соответствует решению вынужденных колебаний линеаризованной системы с собственной частотой $\omega_0$:

$$A_1=q_0[(\omega_0^2-\nu^2)^2+4h^2\nu^2]^{-1/2} \qquad (5)$$

или приближенно исходной линейной системы, т.е. при $\omega_0\equiv\omega$.

С учетом этих положений решение существенно нелинейного уравнения (1) для супергармонического резонанса 2-го порядка ($\nu = 0{,}5\omega_0$) представим в виде [1]

$$u = A_0 + A_1 \sin(\nu t - \gamma_1) + A_2 \sin(2\nu t - \gamma_2) + \sum_{n=2,4,\ldots} A_{2n} \cos n(2\nu t - \gamma_2), \tag{6}$$

где

$$A_0 = \frac{2\alpha}{\pi(2-\alpha)} A_1 \approx \frac{\alpha}{\pi} A_1; \qquad A_{2n} = (-1)^{(n/2)+1} \frac{2\alpha}{\pi(n^2-1)^2} A_2. \tag{7}$$

Для определения неизвестных параметров $A_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ используем простой прямой способ, удовлетворяя уравнение (1) на каждом полуцикле колебаний с большей частотой ($2\nu$) на всем периоде вынужденных колебаний ($T_\nu = 2\pi/\nu$) в моменты известных значений билинейной характеристики восстанавливающей силы:

$$\begin{gathered} t_1' = \frac{\beta + \gamma_2}{2\nu}; \qquad t_1'' = \frac{\pi - \beta + \gamma_2}{2\nu}; \qquad t_2' = \frac{\pi + \beta + \gamma_2}{2\nu}; \\ t_2'' = \frac{2\pi - \beta + \gamma_2}{2\nu}; \qquad t_3' = \frac{2\pi + \beta + \gamma_2}{2\nu}; \qquad t_3'' = \frac{3\pi - \beta + \gamma_2}{2\nu}; \\ t_4' = \frac{3\pi + \beta + \gamma_2}{2\nu}; \qquad t_4'' = \frac{4\pi - \beta + \gamma_2}{2\nu}, \end{gathered} \tag{8}$$

где параметр $\beta$ рассматривается в интервале $\beta_0 \le \beta \le \pi/2$ при условии $A_2 \sin\beta_0 \approx A_1$.

Подставим указанные моменты времени (8) в уравнение (1) и обозначим $\Delta\gamma = \gamma_2/2 - \gamma_1$, в результате чего получим четыре пары исходных уравнений:

$$(1-\alpha)A_0 \pm \left\{\left[(1-\alpha) - \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\Delta\gamma + \cos\frac{\beta}{2}\sin\Delta\gamma\right) + \right.$$

$$\left. + 2h\frac{\nu}{\omega^2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\Delta\gamma - \sin\frac{\beta}{2}\sin\Delta\gamma\right)\right\}A_1 +$$

$$+ \left\{\left[(1-\alpha) - 4\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\sin\beta + 4h\frac{\nu}{\omega^2}\cos\beta\right\}A_2 -$$

$$-4h\frac{\nu}{\omega^2}\sum_{n=2,4,\ldots} n \sin n\beta A_{2n} + \sum_{n=2,4,\ldots}\left[(1-\alpha) - 4n^2\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\cos n\beta A_{2n} =$$

$$= \pm\frac{q_0}{\omega^2}\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma_2}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma_2}{2}\right); \tag{1′), (3′}$$

$$(1-\alpha)A_0 \pm \left\{\left[(1-\alpha)-\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\Delta\gamma+\sin\frac{\beta}{2}\sin\Delta\gamma\right)+\right.$$

$$\left.+2h\frac{\nu}{\omega^2}\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\Delta\gamma-\cos\frac{\beta}{2}\sin\Delta\gamma\right)\right\}A_1+$$

$$+\left\{\left[(1-\alpha)-4\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\sin\beta-4h\frac{\nu}{\omega^2}\cos\beta\right\}A_2+$$

$$+4h\frac{\nu}{\omega^2}\sum_{n=2,4,\ldots} n\sin n\beta A_{2n}+\sum_{n=2,4,\ldots}\left[(1-\alpha)-4n^2\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\cos n\beta A_{2n}=$$

$$=\pm\frac{q_0}{\omega^2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma_2}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma_2}{2}\right); \qquad (1''),\ (3'')$$

$$A_0 \pm \left\{\left[(1-\alpha)-\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\Delta\gamma-\sin\frac{\beta}{2}\sin\Delta\gamma\right)-\right.$$

$$\left.-2h\frac{\nu}{\omega^2}\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\Delta\gamma+\cos\frac{\beta}{2}\sin\Delta\gamma\right)\right\}A_1-$$

$$-\left\{\left[(1-\alpha)-4\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\sin\beta+4h\frac{\nu}{\omega^2}\cos\beta\right\}A_2-$$

$$-4h\frac{\nu}{\omega^2}\sum_{n=2,4,\ldots} n\sin n\beta A_{2n}+\sum_{n=2,4,\ldots}\left[(1-\alpha)-4n^2\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\cos n\beta A_{2n}=$$

$$=\pm\frac{q_0}{\omega^2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma_2}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma_2}{2}\right); \qquad (2'),\ (4')$$

$$A_0 \pm \left\{\left[(1-\alpha)-\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\Delta\gamma-\cos\frac{\beta}{2}\sin\Delta\gamma\right)-\right.$$

$$\left.-2h\frac{\nu}{\omega^2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\Delta\gamma+\sin\frac{\beta}{2}\sin\Delta\gamma\right)\right\}A_1-$$

$$-\left\{\left[(1-\alpha)-4\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\sin\beta-4h\frac{\nu}{\omega^2}\cos\beta\right\}A_2+$$

$$+4h\frac{\nu}{\omega^2}\sum_{n=2,4,\ldots} n\sin n\beta A_{2n} + \sum_{n=2,4,\ldots}\left[(1-\alpha)-4n^2\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\cos n\beta A_{2n} =$$

$$=\pm\frac{q_0}{\omega^2}\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma_2}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma_2}{2}\right). \qquad (2''), (4'')$$

(9)

Для удобства анализа уравнения (9) дополнительно пронумерованы в соответствии с обозначением индексов моментов времени (8): $1', 1'', 2', 2'', 3', 3'', 4', 4''$. При этом верхние знаки “+” относятся к уравнениям (1′), (1″), (2′), (2″), а нижние “–” к (3′), (3″), (4′), (4″).

Результаты проведенных ранее расчетов [3, 8] показывают, что при исследуемых резонансах значение основного вибродиагностического параметра (относительной амплитуды резонирующий гармоники) не зависит от уровня относительной амплитуды вынуждающей силы $q_0$, а определяется значением параметров нелинейности $\alpha$ и демпфирующей способности $h$ колебательной системы. При этом определяющие уравнения для вибродиагностического параметра находились из рассмотрения алгебраических сумм исходных уравнений типа (9), соответствующих сумме и разности характерных пар уравнений $(N' \pm M'')$, $(N'' \pm M')$, охватывающих весь период низшей гармоники колебаний. Проводилось также усреднение значения тригонометрических функций угла $\beta$ на интервале $\beta_0 \le \beta \le \pi/2$, где $\beta_0$ определялось соответствующим условием, обусловливающим при данном перемещении $u(\beta)$ известное значение билинейной жесткости.

Так, для области слабого супергармонического резонанса 2-го порядка, когда относительная амплитуда резонирующей (второй) гармоники $\overline{A}_2 = A_2/A_1 < 1$, были получены достаточно простые приближенные выражения для вибродиагностического параметра [8]:

$$\overline{A}_2 = \frac{\alpha\left[(2-\alpha)\frac{\pi}{4}-2\right]}{8h\frac{\nu}{\omega^2}}\cos(\gamma_2-2\gamma_1) = \frac{\alpha\left[(2-\alpha)\frac{\pi}{4}-2\right]}{(2-\alpha)-8\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}\sin(\gamma_2-2\gamma_1), \qquad (10)$$

где $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ – сдвиг фаз, определяемый выражением

$$(\gamma_2-2\gamma_1) = \operatorname{arctg}\frac{(2-\alpha)-8\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}{8h\frac{\nu}{\omega^2}}. \qquad (11)$$

Сравнение результатов расчета зависимостей $\overline{A}_2(\alpha, h)$ с данными численного решения дифференциального уравнения (1) методом усреднения по ускорению показывает практически полное их совпадение при $\alpha\omega/h \le 5$.

Использование аналогичного подхода к нахождению определяющих уравнений из представленной системы уравнений (9) для сильного супергармонического резонанса ($\overline{A}_2 > 1$) обусловливает, в отличие от ранее выполненных решений [1, 2, 3, 8], наличие правой части и отсутствие в явном виде амплитуды резонирующей гармоники $A_2$. Так, для случая настроенного резонанса ($\nu = \omega_0/2$) из рассмотрения алгебраической суммы уравнений $\{[(1')+(4'')]-[(1'')+(4')]\}+\{[(2')+(3'')]-[(2'')+(3')]\}$ имеем

$$\left[(2-\alpha)-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\sin\Delta\gamma+\left(\alpha+2h\frac{\omega_0}{\omega^2}\right)\cos\Delta\gamma=\frac{2q_0}{\omega^2 A_1}\sin\frac{\gamma_2}{2}, \qquad (12)$$

из алгебраической суммы $\{[(1')-(4'')]-[(1'')-(4')]\}-\{[(2')-(3'')]-[(2'')-(3')]\}$ –

$$\left[(2-\alpha)-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\cos\Delta\gamma+\left(\alpha-2h\frac{\omega_0}{\omega^2}\right)\sin\Delta\gamma=\frac{2q_0}{\omega^2 A_1}\cos\frac{\gamma_2}{2}, \qquad (13)$$

где

$$\Delta\gamma=\frac{\gamma_2}{2}-\gamma_1. \qquad (14)$$

Однако такое, казалось бы, усложнение решения упрощается полным отсутствием в уравнениях тригонометрических функций угла $\beta$.

Для определения искомого диагностического параметра $\overline{A}_2$ преобразуем правые части уравнений (12), (13). С использованием соотношения $\gamma_2/2=$ $=\Delta\gamma+\gamma_1$ для тригонометрических функций и выражения для $\sin\gamma_1$, определяемого из баланса подводимой и рассеянной энергий

$$\sin\gamma_1=h\omega_0\frac{A_1}{q_0}\left\{1+4\left[1+\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2\sum_{n=2,4,\ldots}\frac{n^2}{(n^2-1)^4}\right]\overline{A}_2^2\right\}, \qquad (15)$$

получим

$$\frac{2q_0}{\omega^2 A_1}\sin\frac{\gamma_2}{2}=\frac{2q_0}{\omega^2 A_1}\cos\gamma_1\sin\Delta\gamma+$$

$$+2h\frac{\omega_0}{\omega^2}\left\{1+4\left[1+\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2\sum_{n=2,4,\ldots}\frac{n^2}{(n^2-1)^4}\right]\overline{A}_2^2\right\}\cos\Delta\gamma; \qquad (16а)$$

$$\frac{2q_0}{\omega^2 A_1}\cos\frac{\gamma_2}{2}=\frac{2q_0}{\omega^2 A_1}\cos\gamma_1\cos\Delta\gamma-$$

$$-2h\frac{\omega_0}{\omega^2}\left\{1+4\left[1+\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2\sum_{n=2,4,\ldots}\frac{n^2}{(n^2-1)^4}\right]\overline{A}_2^2\right\}\sin\Delta\gamma. \qquad (16б)$$

Пренебрегая ввиду малости членом $\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 \sum\limits_{n=2,4,\ldots} \frac{n^2}{(n^2-1)^4}$ и принимая с достаточным приближением $\cos\gamma_1 = 1$ и в соответствии с (5) $\frac{q_0}{\omega^2 A_1} \approx \approx \frac{3}{4}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$, получаем при замене $\frac{h}{\omega} = \frac{\delta}{2\pi}$, где $\delta$ – логарифмический декремент колебаний, следующие определяющие уравнения для настроенного супергармонического резонанса 2-го рода:

$$\begin{aligned} &\left\{2\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]-\alpha\right\}\sin\Delta\gamma + \alpha\cos\Delta\gamma = 4\frac{\delta}{\pi}\frac{\omega_0}{\omega}\overline{A}_2^2\cos\Delta\gamma; \\ &\left\{2\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]-\alpha\right\}\cos\Delta\gamma + \alpha\sin\Delta\gamma = -4\frac{\delta}{\pi}\frac{\omega_0}{\omega}\overline{A}_2^2\sin\Delta\gamma. \end{aligned} \tag{17}$$

Из системы уравнений (17) находим выражения для сдвига фаз $\Delta\gamma$:

$$\Delta\gamma = \frac{1}{2}\arcsin\left\{1-\frac{2}{\alpha}\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\right\} \tag{18}$$

и для вибродиагностического параметра:

$$\overline{A}_2 = \sqrt{\frac{\left\{2\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]-\alpha\right\}\operatorname{tg}\Delta\gamma+\alpha}{4\frac{\delta}{\pi}\frac{\omega_0}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\left\{\alpha-2\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\right\}\operatorname{ctg}\Delta\gamma-\alpha}{4\frac{\delta}{\pi}\frac{\omega_0}{\omega}}}. \tag{19}$$

Можно также принять значение амплитуды первой гармоники $A_1$ соответствующим решению вынужденных колебаний исходной линейной системы при частоте возбуждения $\nu = 0{,}5\omega$, т.е. $A_1 \approx \frac{4q_0}{3\omega^2}$ и $\frac{h\nu}{\omega^2} = \frac{\delta}{4\pi}$. Тогда формулы (19) примут вид

$$\overline{A}_2 = \sqrt{\frac{\left\{0{,}5\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]-\alpha\right\}\operatorname{tg}\Delta\gamma+\alpha}{4\frac{\delta}{\pi}}} = \sqrt{\frac{\left\{\alpha-0{,}5\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\right\}\operatorname{ctg}\Delta\gamma-\alpha}{4\frac{\delta}{\pi}}}, \tag{20}$$

где

$$\Delta\gamma = \frac{1}{2}\arcsin\left\{1 - \frac{0,5}{\alpha}\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\right\}. \tag{21}$$

**Результаты расчетов**. Расчетные зависимости относительной амплитуды $\bar{A}_2$ от параметра нелинейности системы $\alpha$, полученные по формулам (19) с использованием (18) и по формулам (20) с использованием (21), приведены на рис. 1 для различных значений логарифмического декремента колебаний $\delta$. Строго говоря, во внимание следует принимать значения $\bar{A}_2 \ge 1$.

Для проверки достоверности полученных результатов на рис. 1 точками нанесены данные численного решения уравнения (1)*. Как видно, характер зависимостей $\bar{A}_2(\alpha)$ аналогичный, но значения вибродиагностического параметра согласно численному решению по сравнению с результатами расчета по формулам (19) примерно на 21...24% меньше, а по (20) – на 5%, т.е. в данном случае предпочтительнее использовать последние.

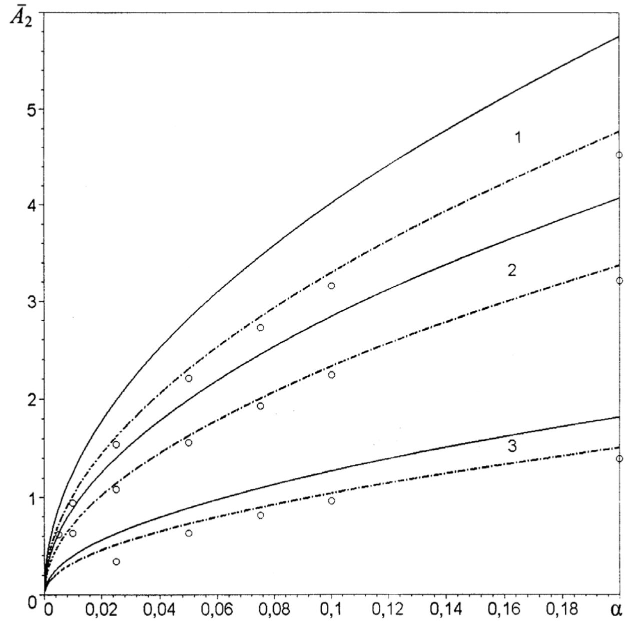



Рис. 1. Зависимости относительной амплитуды второй гармоники $\bar{A}_2$ от параметра $\alpha$, полученные по формулам (19) – сплошные линии и (20) – штриховые линии, при различных значениях логарифмического декремента колебаний $\delta$: *1* – $\delta = 0{,}005$; *2* – $\delta = 0{,}010$; *3* – $\delta = 0{,}050$. (Здесь и на рис. 2, 3: точки – данные численного решения уравнения (1).)

Анализ формул (19) и (20) позволяет обнаружить следующую особенность первых членов в числителе подкоренного выражения. Независимо от величины параметра $0 \le \alpha \le 0{,}2$ для формул (19) они равны

$$\left\{2\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right] - \alpha\right\}\operatorname{tg}\Delta\gamma \approx 0; \qquad \left\{\alpha - 2\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\right\}\operatorname{ctg}\Delta\gamma \approx 2\alpha,$$

* Данные получены О. А. Бовсуновским с использованием метода Рунге-Кутта.

для формул (20) –

$$\left\{0{,}5\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]-\alpha\right\}\operatorname{tg}\Delta\gamma \cong -0{,}326\alpha; \quad \left\{0{,}5\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]-\alpha\right\}\operatorname{ctg}\Delta\gamma = 1{,}674\alpha.$$

Таким образом, приближенное аналитическое решение для случая сильного резонанса определяет четкую прямо пропорциональную зависимость диагностического параметра $\overline{A}_2$ от квадратного корня отношения определяющих параметров колебательной системы $\alpha/\delta$, которую для рассматриваемого диапазона значений $\alpha$ с достаточным для практики приближением можно принять соответственно

$$\overline{A}_2 = \sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{\omega}{\omega_0}}\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} \approx 0{,}886\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} \qquad \text{или} \qquad \overline{A}_2 \approx 0{,}725\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}. \tag{22}$$

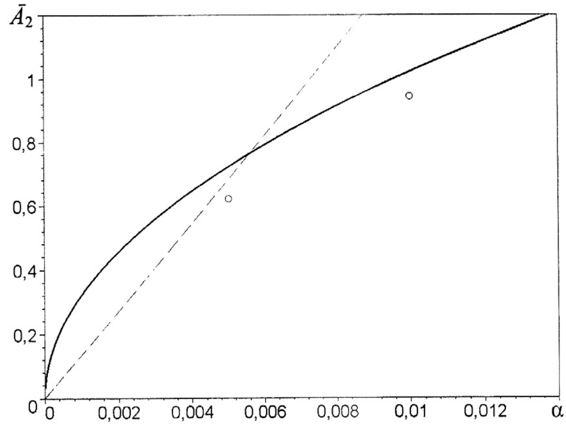
Зависимости (22) существенно отличаются от зависимости $A_2(\alpha/\delta)$ в случае слабого супергармонического резонанса, для которого приближенное аналитическое решение (10) определяет примерно прямо пропорциональную зависимость параметра $\overline{A}_2$ от отношения $\alpha/\delta$: $\overline{A}_2 \approx 0{,}69(\alpha/\delta)$.

Определенный интерес представляет анализ согласования результатов приближенного расчета вибродиагностического параметра, получаемых для области слабого ($\overline{A}_2 < 1$) и сильного ($\overline{A}_2 > 1$) супергармонического резонанса. На рис. 2 для трех величин логарифмического декремента колебаний $\delta$ представлены зависимости $\overline{A}_2(\alpha)$, рассчитанные по формулам (10) для слабого и по второй формуле (22) для сильного резонансов с включением области значений $\overline{A}_2 \approx 1$. Как видно, для значений $\overline{A}_2 \le 0{,}75$ лучшие результаты получены по формулам (10), для $\overline{A}_2 \ge 0{,}75$ – по формуле (22).

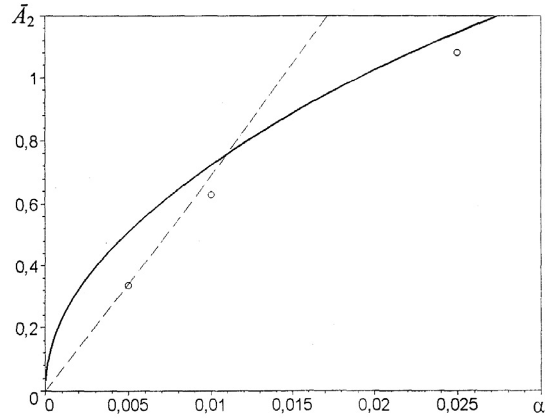
Предложенный приближенный аналитический метод определения вибродиагностического параметра наличия в упругом теле закрывающейся трещины четко выявляет существенное различие между значениями параметра нелинейности колебательного процесса при супер- и субгармоническом резонансах при одинаковых значениях параметра нелинейности $\alpha$ и демпфирующей способности $\delta$ колебательной системы.

На рис. 3 приведены расчетные зависимости относительной амплитуды $\overline{A}_{1/2}$ резонирующей низшей гармоники при субгармоническом резонансе порядка 1/2 ($\nu = 2\omega_0$) и относительной амплитуды $\overline{A}_2$ резонирующей второй гармоники при супергармоническом резонансе ($\nu = 0{,}5\omega_0$), полученные по формуле (20), от параметра нелинейности колебательной системы $\alpha$ при $\delta = 0{,}005$. Зависимость $\overline{A}_{1/2}(\alpha)$ рассчитывалась согласно данным работы [3] по приближенной формуле, полученной при значении $\beta_0 = 0$:

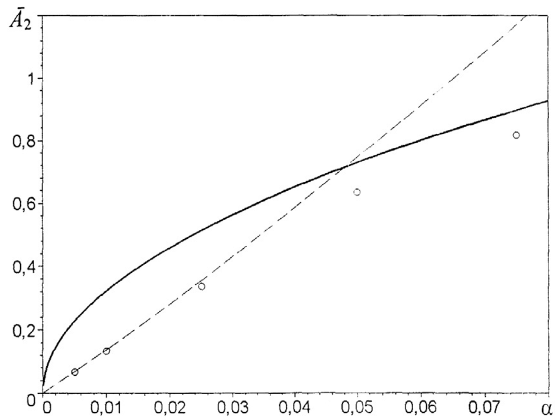
$$\overline{A}_{1/2} = \alpha\sin\Delta\gamma\left\{\left[(2-\alpha)-2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]-D\alpha^2\right\}^{-1}, \tag{23}$$




*а*




*б*




*в*

Рис. 2. Зависимости относительной амплитуды второй гармоники $\overline{A}_2$ от параметра $\alpha$, полученные по формулам (10) – штриховые линии и (22) – сплошные линии, при различных значениях логарифмического декремента колебаний $\delta$: *а* – $\delta = 0{,}005$; *б* – $\delta = 0{,}010$; *в* – $\delta = 0{,}050$.

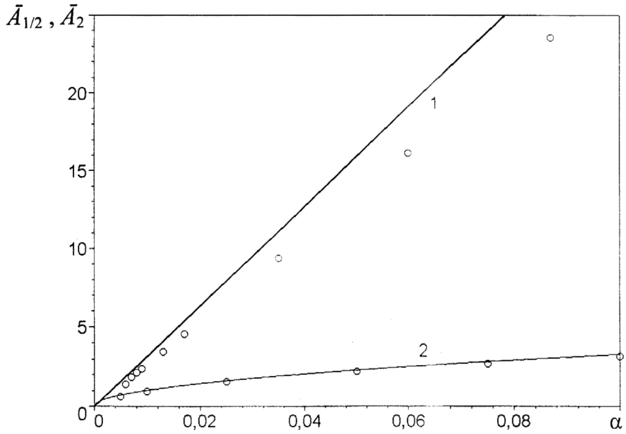



Рис. 3. Расчетные зависимости относительных амплитуд $\overline{A}_{1/2}$ (кривая *1*) и $\overline{A}_2$ (кривая *2*) от параметра $\alpha$ при значении $\delta = 0{,}005$.

где

$$\Delta\gamma = \operatorname{arctg}\left\{\left[(2-\alpha) - 2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right] - D\alpha^2\right\}\left(2\frac{\delta}{\pi}\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{-1}$$

($D$ может принимать значения 0,5; 0,570736 и $0{,}25(2-\alpha)+0{,}070736$).

Для сравнения на рис. 3 точками показаны данные численных решений.

Следует отметить, что если для сильного субгармонического резонанса порядка 1/2 ($\nu = 2\omega_0$) зависимость относительной амплитуды резонирующей низшей гармоники $\overline{A}_{1/2}(\alpha, \delta)$ при отношении параметров $\alpha/\delta \le 10$ удовлетворительно описывается формулой $\overline{A}_{1/2} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\alpha}{\delta}$ [3], т.е. величина $\overline{A}_{1/2}$ прямо пропорциональна отношению $\alpha/\delta$, то для сильного супергармонического резонанса значение $\overline{A}_2$ пропорционально квадратному корню этого отношения.

В заключение проанализируем зависимость $\overline{A}_{1/2}(\alpha, \delta)$, определяемую по формулам (23) с использованием вышеизложенного способа решения системы уравнений при наличии правой части. В работе [3] указанные формулы были получены из решения системы двух определяющих уравнений без правой части, но содержащих тригонометрические функции параметра $\beta$. При этом предполагалось, что среднее значение функции $\cos 2\beta$, имеющейся в одном из уравнений, равно среднему значению ее абсолютной величины на интервале $0 < \beta < \pi/2$. Уравнения получали из соответствующих алгебраических сумм исходных уравнений, записанных аналогично (9) для характерных моментов времени $t_1'$, $t_1''$, $t_2'$, $t_2''$ исследуемого колебательного процесса, обозначаемых указанными индексами.

Для исключения наличия функции $\cos 2\beta$ рассмотрим приведенные в [3] алгебраические суммы уравнений [(1′)–(2′)]–[(1″)–(2″)] и [(1′)–(2″)]–[(1″)–(2′)], которые при пренебрежении высшими гармониками позволяют найти следующую пару определяющих уравнений:

$$2h\frac{\nu}{\omega^2}\cos\beta\cdot A_{1/2}-\alpha\sin 2\beta\cos\Delta\gamma\cdot A_1=0; \tag{24}$$

$$\left[(2-\alpha)-2\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\cos\Delta\gamma-4h\frac{\nu}{\omega^2}\sin\Delta\gamma=2\frac{q_0}{\omega^2 A_1}\cos 2\gamma_{1/2}. \tag{25}$$

Как видно, в первом уравнении отсутствует проблемная функция $\cos 2\beta$, во втором – вообще отсутствуют тригонометрические функции параметра $\beta$.

Далее рассмотрим случай настроенного резонанса ($\nu=2\omega_0$). Из уравнения (5) находим $\dfrac{q_0}{\omega^2 A_1}=-3\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2$, а из баланса подводимой и рассеянной энергий – $\sin\gamma_1=2h\nu\dfrac{A_1}{q_0}(1+0{,}25\overline{A}_{1/2}^2)$. Здесь $\overline{A}_{1/2}=A_{1/2}/A_1$, где $A_1$ – амплитуда гармоники вынужденных колебаний с частотой возбуждения $\nu$; $A_{1/2}$ – амплитуда резонирующей гармоники с частотой $\dfrac{1}{2}\nu=\omega_0$.

С учетом того, что $\cos 2\gamma_{1/2}=\cos(\Delta\gamma+\gamma_1)$, и, полагая $\dfrac{h}{\omega}=\dfrac{\delta}{2\pi}$, уравнение (25) запишем в виде

$$\left\{2\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]-\alpha\right\}\cos\Delta\gamma\approx-\frac{\delta}{\pi}\overline{A}_{1/2}^2\sin\Delta\gamma. \tag{26}$$

Выражая функции $\cos\beta$ и $\sin 2\beta$ через их средние значения на интервале $0<\beta<\pi/2$, уравнение (24) преобразуется следующим образом:

$$\overline{A}_{1/2}=\frac{\alpha\cos\Delta\gamma}{2(\delta/\pi)}. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26), получаем необходимую формулу для определения сдвига фаз $\Delta\gamma$:

$$\Delta\gamma=\frac{1}{2}\arcsin 8\left\{\alpha-2\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\right\}\frac{\delta}{\pi\alpha^2}\approx\frac{1}{2}\arcsin 8\frac{\delta}{\pi\alpha}. \tag{28}$$

Из (26) получим формулу для вычисления $\overline{A}_{1/2}$ через $\operatorname{tg}\Delta\gamma$:

$$\overline{A}_{1/2}=\sqrt{\frac{\alpha-2\left[1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}{\frac{\delta}{\pi}\operatorname{tg}\Delta\gamma}}\approx\sqrt{\frac{\pi\alpha}{\delta\operatorname{tg}\Delta\gamma}}. \tag{29}$$

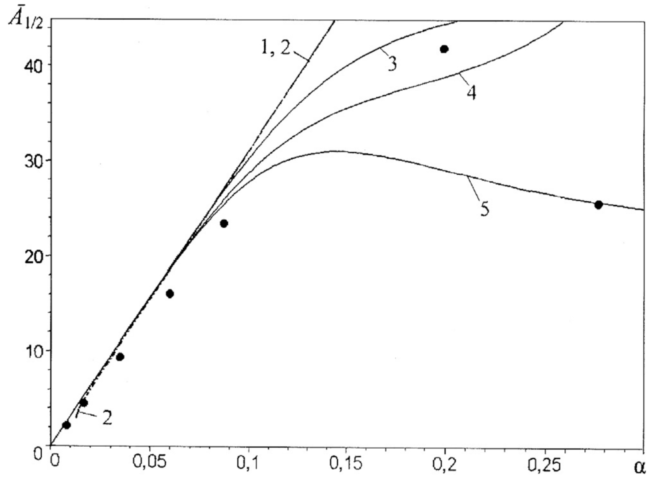



Рис. 4. Зависимости $\overline{A}_{1/2}$, рассчитанные при $\delta = 0{,}005$ по формулам (27), (29) – кривые *1*, *2* (кривая *2* соответствует приближенным значениям $\Delta\gamma$ и $\overline{A}_{1/2}$) и по (23) – кривые *3*, *4*, *5* при коэффициенте $D = 0{,}5$; $[0{,}25(2-\alpha) + 0{,}070736]$ и 0,570736 соответственно.

Для сравнения полученных ранее [3] результатов с настоящими на рис. 4 представлены зависимости $\overline{A}_{1/2}(\alpha)$, рассчитанные по формулам (27), (29) и (23) при $\delta = 0{,}005$, а также данные численного решения дифференциального уравнения (1). Как видно, согласно формулам (27) и (29) зависимость $\overline{A}_{1/2}$ от параметра $\alpha$ практически прямо пропорциональна и описывается формулой $\overline{A}_{1/2} \approx \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\alpha}{\delta}$, а по (23) – она такая же только до определенного значения $\alpha$, в данном случае равного примерно 0,08. Однако зависимости, определяемые по формуле (23), находятся в соответствии с данными численного решения до более высокого значения $\alpha$. Таким образом, можно сделать вывод о возможности принятия указанного в [3] допущения о среднем значении функции $\cos 2\beta$.

## Выводы

1. Предложен приближенный аналитический метод определения параметра нелинейности вынужденных колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной, моделируемого системой с одной степенью свободы с асимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы, при сильном супергармоническом резонансе 2-го порядка.

2. Получены приближенные выражения для определения основного вибродиагностического параметра наличия трещины – относительной амплитуды второй гармоники $\overline{A}_2$ колебательного процесса при настроенном супергармоническом резонансе.

3. Показано, что с достаточной для практики точностью зависимость относительной амплитуды $\overline{A}_2$ от отношения параметров нелинейности $\alpha$ и демпфирующей способности $\delta$ колебательной системы удовлетворительно описывается единой формулой $\overline{A}_2 = 0{,}725\sqrt{\alpha/\delta}$, результаты расчета по которой удовлетворительно согласуются с данными численного решения.

4. Показано существенное различие в зависимости параметра нелинейности колебательного процесса при субгармоническом ($\overline{A}_{1/2}$) и супергармоническом ($\overline{A}_2$) резонансах от величины отношения $\alpha/\delta$. Если в первом случае $\overline{A}_{1/2}$ прямо пропорционально значению $\alpha/\delta$, то во втором – пропорционально квадратному корню этого отношения, при этом величина отношения этих амплитуд $\overline{A}_2/\overline{A}_{1/2} \approx 0,46\sqrt{\delta/\alpha}$.

**Резюме**

Розглядається наближений аналітичний метод розрахунку основного параметра нелінійності коливального процесу пружного тіла з тріщиною, що закривається, яке моделюється системою з одним ступенем вільності з асиметричною білінійною відновлювальною силою, при сильному супергармонічному резонансі 2-го порядку.

1. *Матвеев В. В*. Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 1. Существующие и предлагаемый методы решения // Пробл. прочности. – 2004. – № 4. – С. 5 – 20.
2. *Матвеев В. В*., *Бовсуновский О. А*. Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров упругого тела с трещиной при субгармоническом резонансе. Сообщ. 1. Слабый резонанс // Там же. – 2008. – № 2. – С. 26 – 40.
3. *Матвеев В. В*., *Бовсуновский О. А*. Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров упругого тела с трещиной при субгармоническом резонансе. Сообщ. 2. Сильный резонанс // Там же. – № 3. – С. 5 – 16.
4. *Матвеев В. В*., *Бовсуновский А. П*. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 3. Аналитическое и численное определение собственных частот продольных и изгибных колебаний стержней с поперечными трещинами // Там же. – 1999. – № 4. – С. 19 – 31.
5. *Матвеев В. В*., *Богинич О. Е*. Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщ. 1. Методика определения параметров повреждения // Там же. – 2004. – № 6. – С. 5 – 16.
6. *Матвеев В. В*., *Богинич О. Е*. Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщ. 3. Сквозные и поверхностные полуэллиптические трещины // Там же. – 2006. – № 5. – С. 27 – 47.
7. *Матвеев В. В*. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Там же. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.

8. *Матвеев В. В*. Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 2. Определение диагностических параметров при основном и супергармоническом резонансе 2-го порядка // Там же. – 2004. – № 5. – С. 5 – 22.

Поступила 06. 04. 2009