

Диагностика закрывающихся трещин в стержневых элементах при нелинейных резонансах методом варьирования асимметрией вынуждающей силы

А. П. Бовсуновский, О. А. Бовсуновский

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Колебания упругого тела с закрывающейся трещиной являются существенно нелинейными. Отличительная особенность таких колебаний – проявление так называемых нелинейных эффектов, в частности суб- и супергармонические резонансы и нелинейность колебаний при этих резонансах. Предлагается метод диагностики трещин, суть которого состоит в варьировании асимметрией вынуждающей силы. Статическая составляющая сосредоточенной гармонической вынуждающей силы изменяет состояние трещины: она становится частично или полностью открытой либо закрытой. При этом уровень нелинейности колебаний при любом нелинейном резонансе изменяется от максимального значения (при отсутствии статической составляющей) до практически нулевого, когда трещина под действием статической составляющей становится открытой или закрытой при колебаниях. Метод позволяет обнаружить наличие трещины без какой-либо предварительной информации о диагностируемом объекте в неповрежденном состоянии.

Ключевые слова: закрывающаяся трещина, суб- и супергармонические колебания, диагностика трещины, нелинейные эффекты, асимметрия вынуждающей силы.

Введение. Обнаружение трещин докритических размеров с целью предотвращения разрушения машин и конструкций различного назначения является одной из наиболее актуальных задач технической диагностики. За последние десятилетия существенное развитие получили вибрационные методы диагностики повреждений, большая часть из которых основана на обусловленном трещиной изменении собственных частот и искажении форм колебаний [1, 2]. Однако чувствительность этих методов оказалась недостаточной для практического использования. Более высокой чувствительностью к наличию трещины обладают так называемые нелинейные эффекты [3], т.е. суб- и супергармонические резонансы и существенная нелинейность колебаний при этих резонансах.

При колебаниях тел с трещиной в процессе ее открытия или закрытия происходит изменение жесткости конструкции, которое для упрощения анализа моделируют несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы. Аналитические исследования вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы с такой характеристикой восстанавливающей силы свидетельствуют о возможности возникновения суб- [4–13] и супергармонических [7, 8, 10, 12, 14, 15] резонансных колебаний различного порядка. Аналогичные результаты были получены при численных исследованиях вынужденных колебаний стержней с закрывающейся трещиной [10, 16–18].

Идея моделирования колебаний элементов конструкций с трещиной, подвергающихся воздействию статической силы, была реализована при исследованиях свободных [19, 20] и вынужденных [21] колебаний стержней. Проведение этих исследований вызвано необходимостью более точного учета условий нагружения элементов конструкций, работающих в поле значительных центробежных сил (например, лопадки газотурбинных двигателей) или несущих большую статическую нагрузку (мосты). Было показано, что величина и знак статической нагрузки (растягивающая или сжимающая) влияют на собственные частоты стержневых элементов с разными краевыми условиями наряду с размерами и местоположением трещины [19–21].

В работе [22] аналитически исследовалось влияние асимметрии гармонической вынуждающей силы на уровень нелинейности колебаний механической системы с одной степенью свободы с несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы и стержня Бернулли–Эйлера на двух опорах с закрывающейся трещиной при основном резонансе. Показано, что чем больше асимметрия вынуждающей силы, тем ниже уровень нелинейности колебаний при основном резонансе. В случае если трещина становится полностью открытой или закрытой из-за высокой степени асимметрии вынуждающей силы, нелинейность колебаний системы полностью исчезает.

Следовательно, искусственно вызванное изменение состояния трещины, т.е. ее частичное или полное открытие или закрытие, посредством добавления статической составляющей к сосредоточенной гармонической вынуждающей силе и оценка при этом соответствующих изменений нелинейности при суб- и (или) супергармоническом резонансах могут быть использованы в качестве признака наличия повреждения типа трещины усталости в конструкции.

Модель стержня с закрывающейся трещиной. Результаты численного исследования получены с помощью экспериментально апробированной конечноэлементной модели стержня с трещиной [23], состоящей из 21 элемента (рис. 1). Трещина моделировалась укороченным элементом, длина которого составляет 10% длины обычного элемента, с уменьшенной жесткостью. Укороченный элемент позволяет более точно задавать местоположение трещины. Сосредоточенная сила прикладывалась к узлам модели.

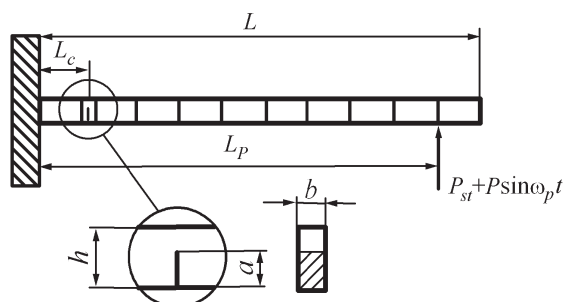


Рис. 1. Конечноэлементная модель консольного стержня (L – длина стержня; L_p – место приложения сосредоточенной силы; L_c – местоположение трещины).

Главная особенность модели применительно к поставленной задаче заключалась в процедуре нагружения стержня. К сосредоточенной гармонической

ческой силе добавлялась статическая составляющая различной величины таким образом, чтобы изменилось состояние трещины, т.е она стала больше или полностью открытой либо закрытой. Поскольку предполагалось, что стержень имеет несимметричную кусочно-линейную характеристику восстанавливающей силы, колебания стержня с закрывающейся трещиной описывались системой двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{x}\} + [D]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P_{st}\} + \{P\}\sin(\omega_P t); \\ [M]\{\ddot{x}\} + [D_d]\{\dot{x}\} + [K_d]\{x\} = \{P_{st}\} + \{P\}\sin(\omega_P t), \end{cases} \quad (1)$$

где $[M]$ – матрица масс; $[D]$ и $[D_d]$ – матрицы демпфирования; $[K]$ и $[K_d]$ – матрицы жесткости; $\{x\}$ – вектор обобщенных узловых перемещений; $\{P\}$ – вектор узловых сил; ω_P – частота вынуждающей силы; $\{P_{st}\}$ – вектор статической составляющей узловых сил. Здесь и далее параметры стержня с открытой трещиной обозначены индексом d . Индекс st обозначает статическую составляющую вынуждающей силы.

С целью уменьшения времени, необходимого для численного решения уравнений (1), преобразуем их к нормальным координатам:

$$\begin{cases} [I]\{\ddot{q}\} + [\Lambda]\{\dot{q}\} + [\omega^2]\{q\} = \{R_{st}\} + \{R\}\sin(\omega_P t); \\ [I_d]\{\ddot{q}\} + [\Lambda_d]\{\dot{q}\} + [\omega_d^2]\{q\} = \{R_{std}\} + \{R_d\}\sin(\omega_P t), \end{cases} \quad (2)$$

$[I]$ и $[I_d]$ – матрицы масс в главных координатах; $[\omega^2]$ и $[\omega_d^2]$ – матрицы собственных частот системы в главных координатах; $[\Lambda]$ и $[\Lambda_d]$ – матрицы демпфирования в главных координатах; $\{R\}$ и $\{R_d\}$ – векторы вынуждающей силы; $\{R_{st}\}$ и $\{R_{std}\}$ – векторы статической силы; $\{q\}$ – главная координата.

Преобразование системы (1) в систему (2) выполнялось с помощью следующих соотношений:

$$\begin{cases} [I] = [\Phi]^T [M] [\Phi]; & [I_d] = [\Phi_d]^T [M] [\Phi_d]; \\ [\omega^2] = [\Phi]^T [K] [\Phi]; & [\omega_d^2] = [\Phi_d]^T [K_d] [\Phi_d]; \\ [\Lambda] = [\Phi]^T [D] [\Phi]; & [\Lambda_d] = [\Phi_d]^T [D_d] [\Phi_d]; \\ \{R\} = [\Phi]^T \{P\}; & \{R_d\} = [\Phi_d]^T \{P\}; \\ \{R_{st}\} = [\Phi]^T \{P_{st}\}; & \{R_{std}\} = [\Phi_d]^T \{P_{st}\}, \end{cases} \quad (3)$$

где $[\Phi]$ и $[\Phi_d]$ – матрицы форм колебаний.

Матрицы форм колебаний находились из решения задачи на собственные значения для стержня с закрытой и открытой трещиной соответственно:

$$\begin{cases} [K]\{\Phi_i\} = \omega_i^2 [M]\{\Phi_i\}; \\ [K_d]\{\Phi_{di}\} = \omega_{di}^2 [M]\{\Phi_{di}\}, \end{cases} \quad (4)$$

где i – номер собственной формы колебаний.

Предложенная модель стержня учитывает влияние трещины на формы колебаний. Поэтому решались две задачи на собственные значения: для стержня с закрытой трещиной (в этом случае свойства стержня предполагались такими же, как и неповрежденного) и для стержня с открытой трещиной, вследствие чего векторы внешних сил $\{R\}$ и $\{R_d\}$, а также $\{R_{st}\}$ и $\{R_{std}\}$ были разными.

Уравнения (2) решались методом Рунге-Кутты пошагово во времени. Состояние трещины проверялось на каждом временном шаге по результатам сравнения углов поворота правого (φ^{right}) и левого (φ^{left}) узлов элемента, моделирующего трещину. Если $\varphi^{left} < \varphi^{right}$, трещина открыта, и наоборот. В случае если состояние трещины изменяется (трещина полностью закрывается или начинает открываться) на j -м временном шаге, начальные условия для следующего ($j + 1$)-го шага вычислялись по формулам:

$$\{q_{j+1}\} = [\Phi_d]^{-1}[\Phi]\{q_j\}; \quad (5)$$

$$\{q_{j+1}\} = [\Phi]^{-1}[\Phi_d]\{q_j\}. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) используются для момента времени, когда трещина начинает открываться и полностью закрывается соответственно.

Эквивалентная локальная жесткость элемента, моделирующего трещину, вычислялась на основе баланса энергий деформации [1]. Изменение энергии деформации стержня, обусловленное трещиной, определялось по формуле

$$\Delta U = b \int_0^a \frac{K_I^2}{E} da, \quad (7)$$

в которой коэффициент интенсивности напряжений для краевой трещины при изгибе полосы вычислялся по формуле Черепанова [24]:

$$K_I = \frac{4,2M_b}{bh^{3/2}} [(1-\gamma)^{-3} - (1-\gamma)^3]^{1/2}, \quad (8)$$

где E – модуль упругости материала; M_b – изгибающий момент; b и h – ширина и высота поперечного сечения стержня; a – глубина трещины; $\gamma = a/h$.

Трещина в зависимости от знака статической составляющей вынуждающей силы становится больше или полностью открытой либо закрытой. Изменение упругой восстанавливающей силы P_r в зависимости от статической силы P_{st} разного знака показано на рис. 2. Принято, что статическая сила, закрывающая трещину, положительна, в противном случае она отрицательна. Как видно, во всех случаях характеристики восстанавливающей силы упругого тела различаются. Можно ожидать, что будут различаться также уровни нелинейности колебаний при каком-либо нелинейном резонансе. Очевидно, что это будет иметь место лишь при наличии трещины в

стержне. Следовательно, если статическая составляющая вынуждающей силы изменяет нелинейность колебаний при суб- или супергармоническом резонансах, значит, в стержне возникла трещина.

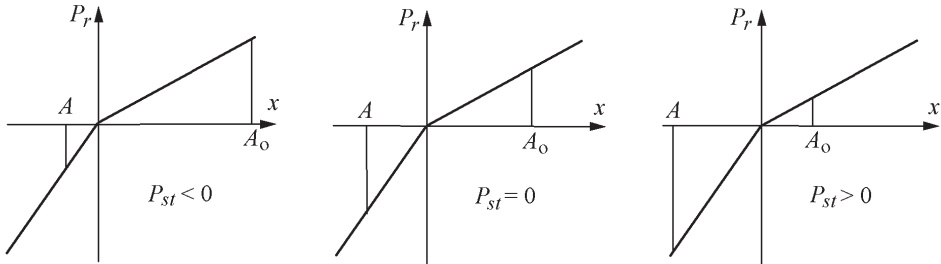


Рис. 2. Характеристики восстанавливающей силы стержня с закрывающейся трещиной при различных знаках статической составляющей вынуждающей силы (A и A_0 – амплитуды полуволн колебаний стержня, когда трещина закрыта и открыта соответственно).

Были исследованы вынужденные изгибные колебания по первой форме стержней с различными граничными условиями и местоположением трещины (рис. 3), а именно: консольный стержень ($L_c/L = 0,1$ и $0,5$), стержень на двух опорах ($L_c/L = 0,25$ и $0,5$) и стержень, защемленный с двух сторон ($L_c/L = 0,5$). Длина L , высота h и ширина b сечения консольного стержня составляли $0,23$ м, $0,02$ м и $0,004$ м соответственно. Размеры стержня на двух опорах и защемленного с двух сторон таковы: $L = 6$ м; $h = 0,5$ м; $b = 0,5$ м. Во всех случаях относительная глубина трещины $a/h = 0,2$. Модуль упругости E , плотность ρ и логарифмический декремент колебаний δ материала приняты равными 206 ГПа, 7850 кг/м³ и $0,01$ соответственно.

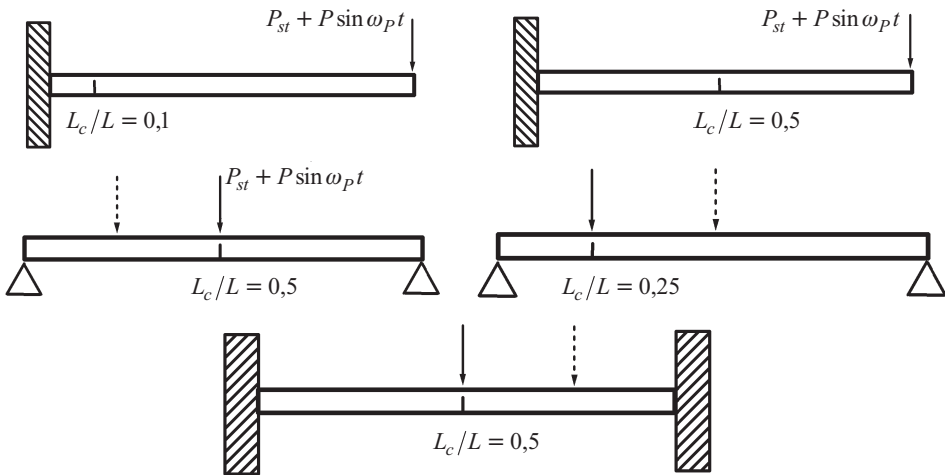


Рис. 3. Граничные условия и параметры вынуждающей силы.

Методика вычислений следующая: вынуждающая сила с той или иной степенью асимметрии прикладывалась к концу консольного стержня ($L_p/L = 1$) и последовательно к двум различным точкам стержня на двух опорах и защемленного с двух сторон ($L_p/L = 0,25$ и $0,5$). В каждом случае выполнялся спектральный анализ колебательного процесса ускорения конца консольного

стержня и среднего сечения стержня на двух опорах и заземленного с двух сторон при суб- и супергармоническом резонансах.

Влияние асимметрии вынуждающей силы на нелинейность колебаний консольного стержня с трещиной. Нелинейность колебаний при суб- и супергармоническом резонансах оценивалась отношением амплитуды доминирующей гармоники (наибольшей по амплитуде) в спектре колебаний к амплитуде основной гармоники. Например, при супергармоническом резонансе второго порядка доминирующей является вторая гармоника A_2 , при субгармоническом резонансе порядка $1/2$ – субгармоника $A_{1/2}$. Все другие составляющие спектра колебаний пренебрежимо малы по сравнению с доминирующей гармоникой. Поэтому уровень нелинейности колебаний оценивали соответственно отношениями A_2/A_1 и $A_{1/2}/A_1$ (A_1 – амплитуда основной гармоники).

При расчетах в модели учитывали восемь форм колебаний. Этого достаточно для оценки уровня нелинейности колебаний при нелинейных резонансах с приемлемой точностью, так как он практически перестает изменяться, начиная с четырех форм колебаний.

Нелинейность колебаний консольного стержня при обоих нелинейных резонансах существенно зависит от относительной величины статической составляющей вынуждающей силы (рис. 4), определяемой как отношение статической силы P_{st} к амплитуде гармонической вынуждающей силы P . Наибольшая нелинейность колебаний имеет место при отсутствии асимметрии вынуждающей силы ($P_{st} = 0$). С увеличением статической составляющей независимо от знака нелинейность колебаний вначале медленно, а затем резко уменьшается до нулевого значения. Так, нелинейность колебаний практически исчезает при $P_{st}/P = 2$ в случае супергармонического резонанса и при $P_{st}/P = 1$ в случае субгармонического резонанса. Это означает, что субгармонический резонанс исчезает при значительно меньшей асимметрии вынуждающей силы, чем супергармонический.

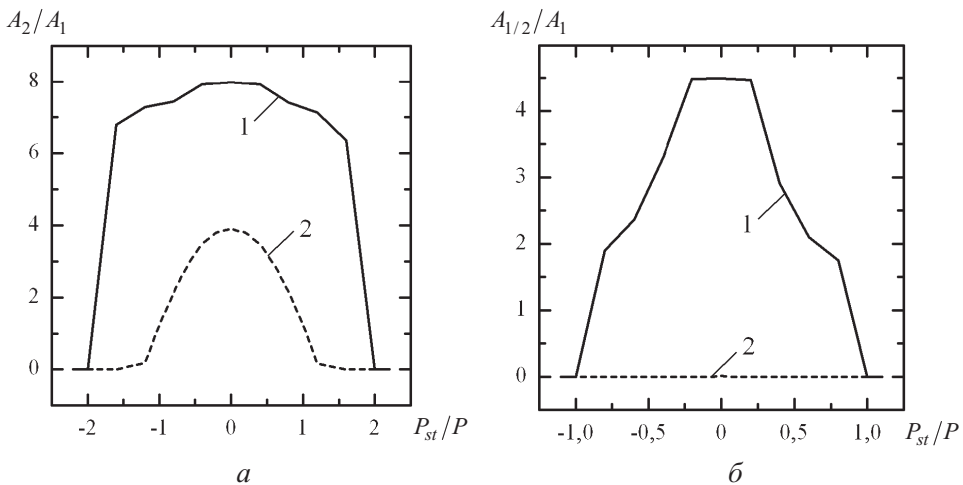


Рис. 4. Зависимость относительной амплитуды доминирующей гармоники спектра ускорения при супергармоническом резонансе порядка $2/1$ (а) и субгармоническом резонансе порядка $1/2$ (б) от относительной величины статической составляющей вынуждающей силы для консольного стержня ($L_p/L = 1$): 1 – $L_c/L = 0,1$; 2 – $L_c/L = 0,5$.

Чем дальше трещина от заделки, тем слабее ее влияние на жесткость консольного стержня. Поэтому вполне логично, что уровень нелинейности колебаний стержня с трещиной посередине ($L_c/L=0,5$) при супергармоническом резонансе приблизительно в два раза ниже, чем в случае трещины у заделки ($L_c/L=0,1$). В то же время при расположении трещины в сечении $L_c/L=0,5$ супергармонический резонанс исчезает при меньшей асимметрии вынуждающей силы, чем при $L_c/L=0,1$. Субгармонический резонанс стержня с трещиной посередине отсутствует, поскольку нелинейность системы недостаточна для возникновения этого режима колебаний.

Влияние асимметрии вынуждающей силы на нелинейность колебаний стержня на двух опорах и заземленного с двух сторон. Зависимости между статической составляющей вынуждающей силы и нелинейностью колебаний при суб- и супергармоническом резонансах стержня на двух опорах и заземленного с двух сторон качественно подобны зависимостям, полученным для консольного стержня. Однако количественно они различаются.

Так, для стержня на двух опорах, колебания которого возбуждаются силой, приложенной посередине ($L_p/L=0,5$), максимальная нелинейность супергармонических резонансных колебаний имеет место при расположении трещины в среднем сечении стержня ($L_c/L=0,5$). В этом случае трещина вызывает наибольшее изменение изгибной жесткости стержня, колеблющегося по первой форме (рис. 5,а,б). Поэтому при ее приближении к опоре стержня нелинейность колебаний при супергармоническом резонансе уменьшается. Например, при $L_c/L=0,25$ максимальный уровень нелинейности колебаний при супергармоническом резонансе стержня почти в два раза ниже, чем при $L_c/L=0,5$. В отличие от супергармонического резонанса нелинейность колебаний при субгармоническом резонансе стержня с местоположением трещины в сечении $L_c/L=0,25$ выше, чем при $L_c/L=0,5$.

Таким образом, влияние состояния трещины на нелинейность колебаний при суб- и супергармоническом резонансах качественно идентично. Наличие закрывающейся трещины можно обнаружить без какой-либо предварительной информации о диагностируемом объекте в неповрежденном состоянии. Если с изменением асимметрии вынуждающей силы изменяется нелинейность колебаний при каком-либо нелинейном резонансе, можно определенно предположить наличие трещины в диагностируемом объекте. Если нелинейность не изменяется, трещина отсутствует.

С приближением точки приложения вынуждающей силы к зоне расположения трещины увеличивается нелинейность колебаний при супергармоническом резонансе, максимум которой достигается при совпадении точки приложения вынуждающей силы с местоположением трещины. При этом же условии уровень нелинейности колебаний при субгармоническом резонансе достигает минимума. Изменение нелинейности колебаний при приложении вынуждающей силы в двух различных точках, одна из которых совпадает с местоположением трещины ($L_c/L=0,25$), показано на рис. 5,в,г. Это соответствует полученной ранее закономерности [25], согласно которой при приложении вынуждающей силы вблизи трещины наблюдается максимальный уровень нелинейности колебаний при супергармоническом резонансе и минимальный – при субгармоническом.

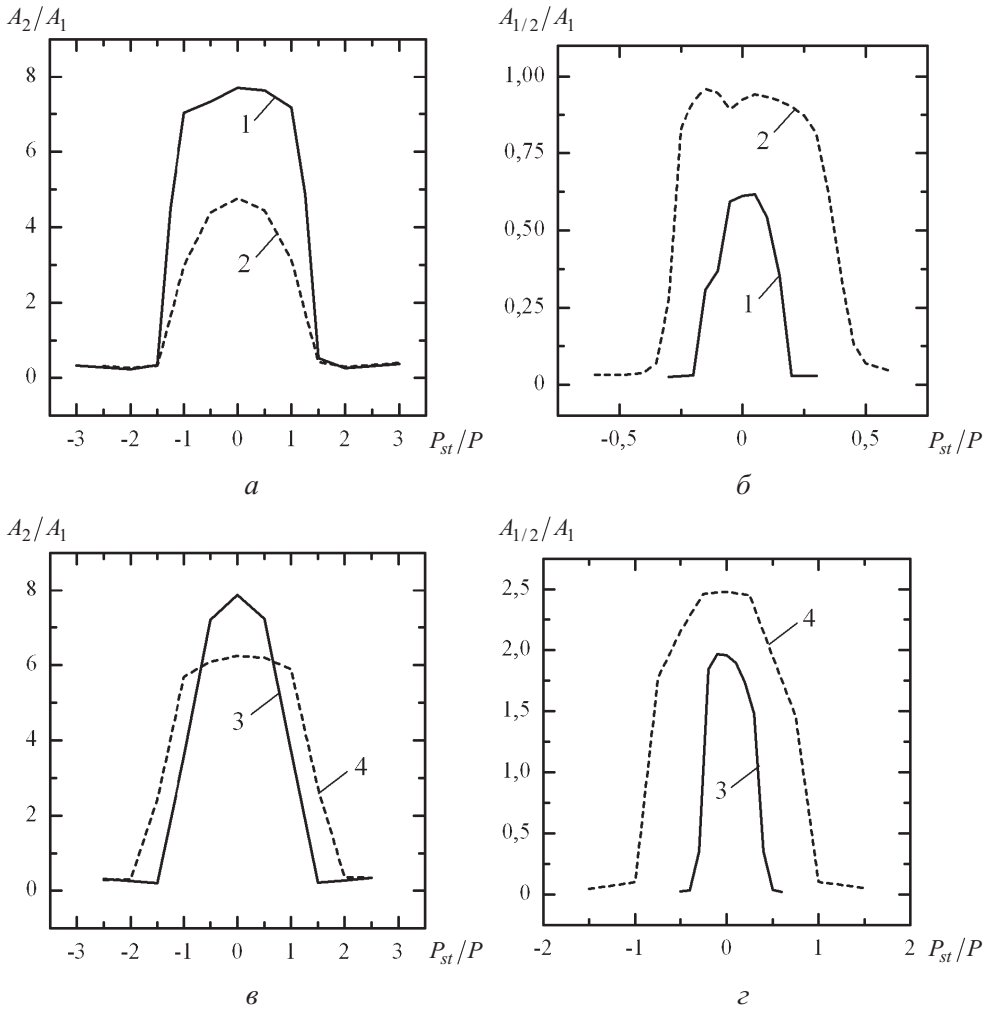


Рис. 5. Зависимость относительной амплитуды доминирующей гармоники спектра ускорения при супергармоническом резонансе порядка 2/1 (а, в) и субгармоническом резонансе порядка 1/2 (б, г) от относительной величины статической составляющей вынуждающей силы для стержня на двух опорах: а, б - $L_p/L = 0,5$; в, г - $L_c/L = 0,25$ (1 - $L_c/L = 0,5$; 2 - $L_c/L = 0,25$; 3 - $L_p/L = 0,25$; 4 - $L_p/L = 0,5$).

Практически аналогичные результаты получены для стержня, защемленного с двух сторон (рис. 6). Качественно влияние состояния трещины и места приложения вынуждающей силы на нелинейность колебаний стержня, защемленного с двух сторон, и стержня на двух опорах оказалось одинаковым. Заметное количественное расхождение между результатами расчетов для этих стержней наблюдается в случае субгармонического резонанса. Например, если вынуждающая сила прикладывается в точке $L_p/L = 0,25$, то нелинейность колебаний стержня, защемленного с двух сторон, при субгармоническом резонансе исчезает при большей асимметрии вынуждающей силы ($P_{st}/P = 2$), чем в случае стержня на двух опорах ($P_{st}/P = 1$). Это связано с влиянием более жестких краевых условий для защемленного с двух сторон стержня.

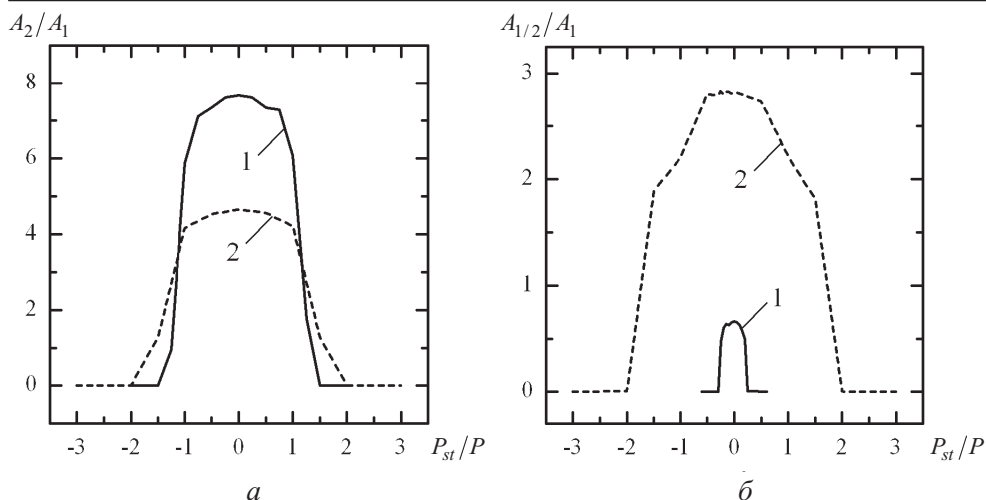


Рис. 6. Зависимость относительной амплитуды доминирующей гармоники спектра ускорения при супергармоническом резонансе порядка 2/1 (а) и субгармоническом резонансе порядка 1/2 (б) от относительной величины статической составляющей вынуждающей силы для стержня, защемленного с двух сторон ($L_c/L = 0,5$): 1 – $L_p/L = 0,5$; 2 – $L_p/L = 0,25$.

Местоположение трещины ($L_c/L = 0,5$) обнаруживается по максимуму нелинейности колебаний при супергармоническом резонансе и по ее минимуму при субгармоническом резонансе (место приложения вынуждающей силы $L_p/L = 0,5$). В то же время диапазон изменения асимметрии вынуждающей силы, в котором возникает субгармонический резонанс, весьма узок ($P_{st}/P = 0,25$). Это говорит о том, что даже относительно небольшая статическая составляющая вынуждающей силы может затруднить возбуждение субгармонического режима колебаний стержней.

Таким образом, данный неразрушающий вибрационный метод диагностики повреждений обеспечивает достижение первого уровня диагностики повреждения согласно классификации, предложенной А. Риттером [26], т.е. выявление наличия повреждения.

Выводы

1. Изменение состояния трещины посредством добавления статической составляющей к гармонической вынуждающей силе приводит к изменению уровня нелинейности колебаний при суб- и супергармоническом резонансах, что может служить признаком наличия трещины. Преимущество метода заключается в отсутствии необходимости предварительной информации о вибрационных характеристиках конструкции в неповрежденном состоянии.

2. Уровень нелинейности колебаний в окрестности суб- и супергармонического резонансов стержня является чувствительным к наличию закрывающейся трещины. Чувствительность этой характеристики на один–три порядка выше, чем чувствительность собственных частот или форм колебаний. В общем случае эта нелинейность существенно зависит от размеров и местоположения трещины, уровня демпфирования колебаний, краевых усло-

вий, а также места приложения вынуждающей силы и степени ее асимметрии. Первых три фактора являются свойствами объекта диагностики и не могут быть изменены. Параметрами вынуждающей силы, т.е. местом ее приложения и асимметрией, можно искусственно варьировать. При этом все остальные параметры объекта диагностики заведомо остаются неизменными. Этот факт можно использовать для сбора достоверной информации о свойствах механической системы для решения обратной задачи диагностики повреждения.

Резюме

Коливання пружного тіла з тріщиною, що закривається, є суттєво нелінійними. Характерною особливістю таких коливань є прояв так званих нелінійних ефектів, зокрема суб- і супергармонічні резонанси і нелінійність коливань при цих резонансах. Запропоновано метод діагностики тріщин, суть якого полягає у варіюванні асиметрії змушувальної сили. Статична складова зосередженої гармонічної змушувальної сили змінює стан тріщини: вона стає частково або повністю відкритою чи закритою. При цьому рівень нелінійності коливань за будь-якого нелінійного резонансу змінюється від максимального значення (за відсутності статичної складової) до практично нульового, коли тріщина під дією статичної складової стає відкритою або закритою при коливаннях. Метод дозволяє виявити тріщину без будь-якої попередньої інформації про об'єкт, що діагностується, у непошкодженому стані.

1. *Dimarogonas A. D.* Vibration of cracked structures: a state of the art review // Eng. Fract. Mech. – 1996. – **55**. – P. 831 – 857.
2. *Salawu O. S.* Detection of structural damage through changes in frequency: a review // Eng. Struct. – 1997. – **19**. – P. 718 – 723.
3. *Bovsunovsky A. P. and Surace C.* Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack // J. Sound Vibration. – 2005. – **288**. – P. 865 – 886.
4. *Thompson J. M. T.* Complex dynamics of compliant offshore structures // Proc. Royal Soc. London. – 1983. – **A387**. – P. 407 – 427.
5. *Shaw S. W. and Holmes P. J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // J. Sound Vibration. – 1983. – **90**. – P. 129 – 155.
6. *Thompson J. M. T. and Elvey J. S. N.* Elimination of sub-harmonic resonances of compliant marine structures // Int. J. Mech. Sci. – 1984. – **26**. – P. 419 – 426
7. *Choi Y. S. and Noan S. T.* Forced periodic vibration of unsymmetric piecewise-linear systems // J. Sound Vibration. – 1988. – **121**. – P. 117 – 126.
8. *Wong C. W., Zhang W. S., and Lau S. L.* Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method // Ibid. – 1991. – **149**. – P. 91 – 105.

9. *Kim Y. B. and Noah S. T.* Stability and bifurcation analysis of oscillators with piecewise-linear characteristics: a general approach // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1991. – **58**. – P. 545 – 553.
10. *Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I.* Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // *J. Sound Vibration.* – 1998. – **213**. – P. 159 – 168.
11. *Xu Ming Tian, Li Jian Feng, and Cheng Delin.* Non-linear vibration by a new method // *Ibid.* – 1998. – **215**. – P. 475 – 487.
12. *Kim T. C., Rook T. E., and Singh R.* Super- and sub-harmonic response calculations for a torsional system with clearance nonlinearity using the harmonic balance method // *Ibid.* – 2005. – **281**. – P. 965 – 993.
13. *Qinglong Ma and Kahraman A.* Subharmonic resonances of a mechanical oscillator with periodically time-varying, piecewise-nonlinear stiffness // *Ibid.* – 2006. – **294**. – P. 624 – 636.
14. *Imregun M. and Sanliturk K. Y.* Natural frequency and damping changes produced by fatigue cracks // *Proc. 15th Int. Sem. on Modal Analysis (Leuven, Belgium), 1990.* – P. 791 – 805.
15. *Rytter A., Brincker R., and Kirkegaard P. H.* An experimental study of the modal parameters of a cantilever beam // *Fracture & Dynamics, Paper No. 37, Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Denmark, 1992.* – 76 p.
16. *Crespo P., Ruotolo R., and Surace C.* Non-linear modelling of a cracked beam // *Proc. 14th IMAC (Dearbon, Michigan), 1996.* – **2**. – P. 1017 – 1022.
17. *Ruotolo R., Surace C., Crespo P., and Storer D.* Harmonic analysis of the vibrations of a cantilever beam with a closing crack // *Comp. Struct.* – 1996. – **61**. – P. 1057 – 1074.
18. *Pugno N., Ruotolo R., and Surace C.* Analysis of the harmonic vibrations of a beam with a breathing crack // *Proc. 15th IMAC (Tokyo, Japan), 1997.* – P. 409 – 413.
19. *Krawczuk M. and Ostachowicz W.* Transverse natural vibrations of a cracked beam loaded with a constant axial force // *Trans. ASME. J. Vibration Acoustics.* – 1993. – **115**. – P. 524 – 528.
20. *Binici B.* Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force // *J. Sound Vibration.* – 2005. – **287**. – P. 277 – 295.
21. *Murphy K. D. and Zhang Y.* Vibration and stability of a cracked translating beam // *Ibid.* – 2000. – **237**, No. 2. – P. 319 – 335.
22. *Sundermeyer J. N. and Weaver R. L.* On crack identification and characterization in a beam by non-linear vibration analysis // *Ibid.* – 1995. – **183**, No. 5. – P. 857 – 871.
23. *Бовсуновский О. А.* Конечноэлементная модель для исследования колебаний стержня с закрывающейся трещиной // *Пробл. прочности.* – 2008. – № 5. – С. 114 – 120.

24. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
25. Bovsunovsky A. and Bovsunovsky O. Crack detection in beams by means of the driving force parameters variation at non-linear resonance vibrations // Key Eng. Mater. – 2007. – **347**. – P. 413 – 420.
26. Rytter A. Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures, Ph.D. Thesis, University of Aalborg, Denmark, 1993. – 193 p.

Поступила 18. 12. 2008