УДК 620.178.3:539.388.1:539.389.2

Предельное исчерпание локальной пластичности как критерий зарождения усталостной трещины

Г. В. Цыбанев, А. И. Новиков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предложенная ранее авторами расчетная модель оценки долговечности циклически упрочняющихся материалов развита для разупрочняющихся материалов. Обоснованы условия оценки параметров модели. Приведенные расчетные зависимости неупругих деформаций от числа циклов нагружении сопоставлены с экспериментальными.

Ключевые слова: долговечность, циклически упрочняющиеся и разупрочняющиеся материалы, неупругие деформации.

Введение. Существующие расчетные модели и методы, позволяющие прогнозировать долговечность конструкционных элементов как по полному разрушению, так и по зарождению усталостной трещины, включают характеристики материала, которые требуют специального определения. Это затрудняет использование созданных баз данных по усталости [1].

В процессе многоциклового нагружения большинства металлов и сплавов происходит изменение их неупругой деформации [2]. Под действием циклического деформирования в мягком режиме может наблюдаться как уменьшение, так и увеличение петли гистерезиса с наработкой, что связано с эффектами упрочнения или разупрочнения материала [2].

Ранее [3] рассмотрена модель поведения циклически упрочняющегося материала. С целью расширения круга материалов, для которых может быть использован подобный подход к оценке долговечности элементов конструкций, ниже представлена расчетная модель деформирования циклически разупрочняющихся материалов, предполагающая их усталостное разрушение при предельном исчерпании пластичности в некотором локальном объеме.

Описание расчетной модели предельного состояния материалов. Рассмотрим [4] модель циклического деформирования некоторой локальной зоны, принадлежащей поверхностному слою. Для описания модели исчерпания пластичности материала принимаем следующие гипотезы:

процессы изменения локального циклического предела текучести материала и зарождения усталостной трещины происходят в некотором объеме поверхностного слоя;

повторное неупругое деформирование приводит к упрочнению–разупрочнению материала в исследуемой зоне, выражающемуся в изменении предела текучести с каждым полуциклом нагружения;

за начальное значение локального циклического предела текучести принята величина, определенная по появлению пластических деформаций [2], а за предельное состояние материала – достижение локальным циклическим пределом текучести своего критического значения [5] в зонах локализации напряжений;

циклическое деформирование материала происходит так, что полная локальная деформация не зависит от величины наработки.

На рис. 1 представлена графическая интерпретация модели, где σ_a – амплитуда напряжения; $\sigma_к$ – критическое напряжение усталости [6]; $\sigma_т$ – текущий наработанный предел текучести; $\sigma_{т,0}$ – исходный локальный циклический предел текучести; $\sigma_{т,cr}$ – критическое локальное значение циклического предела текучести; n – текущее число циклов нагружения; N – число циклов нагружения до разрушения при заданном σ_a; ε_a, ε_{pl} – полная и пластическая амплитуды деформации.

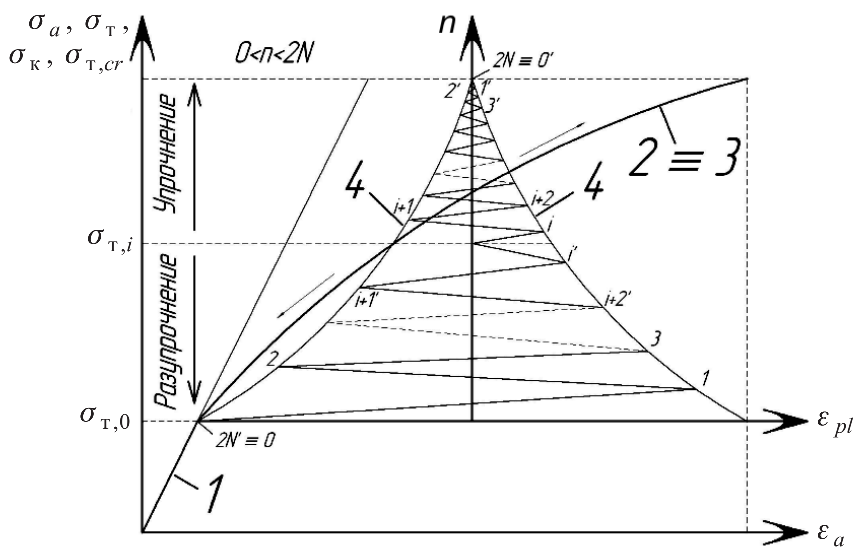

Рис. 1. Графическое представление модели: *1*, *2* – упругое и неупругое деформирование $\sigma_a - \varepsilon_a$; *3* – диаграмма $\sigma_т - \varepsilon_{pl}$; *4* – кинетические кривые упрочнения–разупрочнения $n - \varepsilon_{pl}$ (*1*, *2*, *3*, ..., $i-1$, i, $i+1$, ..., $2N$ – пики деформирования при соответствующих циклах нагружения, цифры со штрихами соответствуют разупрочнению, без штрихов – упрочнению).

В отличие от схемы деформирования Орована [7], в модели рассматриваются неупругие кривые (на рис. 1 кривые *3*, *4*), а также приняты другие условия начала пластических деформаций и наступления предельного состояния.

Вывод основного уравнения модели предельного исчерпания пластичности. Дальнейшие выкладки предлагаемой модели выполнены по схеме Афанасьева [4] для построения кривой усталости при использовании статической диаграммы деформирования упрочняющегося материала с учетом новых предположений и принятием других исходных данных [3]. Вследствие этих изменений решается обратная задача: параметры упрочнения–разупрочнения материала определяются не из статической диаграммы деформирования, а из известных кривых усталости.

Рассмотрим циклическое неупругое деформирование материала в локальной зоне, являющейся потенциальным местом зарождения трещины усталости, при нагружении симметричным циклом. В соответствии с принятыми выше гипотезами, амплитуду деформации локальной зоны в поверхностном слое запишем как

$$\varepsilon_a = F(\sigma_a), \tag{1}$$

где $F(\sigma_a)$ – функция, описывающая циклическую диаграмму деформирования.

С другой стороны, полная деформация выражается так:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl}, \tag{2}$$

где ε_{el} – амплитуда упругой деформации.

В процессе исчерпания пластичности в локальной зоне происходит перераспределение между упругой и пластической составляющими деформации, и на каждом i-м полуцикле они могут быть найдены следующим образом:

$$\varepsilon_{el,i} = \varepsilon_a(\sigma_{\text{т},i}), \qquad \varepsilon_{pl,i} = \varepsilon_a(\sigma_a) - \varepsilon_a(\sigma_{\text{т},i}). \tag{3}$$

Для описания процесса исчерпания пластичности материала введем функцию изменения циклического предела текучести от некоторого его начального значения $\sigma_{\text{т},0}$ до граничного, при котором наступает предельное состояние материала в рассматриваемой локальной зоне.

Примем, как и в работе [4], что ядро кривой текучести определяется некоторой степенной функцией:

$$\sigma_{\text{т}} = \sigma_{\text{т},0} \pm f(\varepsilon_{pl}) = \sigma_{\text{т},0} \pm b(\sigma_a - \sigma_{\text{т}})^{1/a}, \tag{4}$$

где $\sigma_{\text{т}}$ – текущее значение предела текучести; $f(\varepsilon_{pl})$ – ядро функции текучести; a – показатель нелинейности; b – коэффициент пропорциональности; коэффициент a описывает нелинейность процесса деградации, коэффициент b – часть деградации, приобретенной на данном цикле нагружения; знак “+” здесь и далее применяется для упрочняющегося материала, знак “–” – для разупрочняющегося.

Согласно описанной модели деградации материала, т.е. его упрочнения или разупрочнения, вследствие которой происходит исчерпание пластичности в зоне локализации неупругих деформаций, можно записать текущее значение предела текучести на $(i+1)$-м полуцикле:

$$\sigma_{\text{т},i+1} = \sigma_{\text{т},i} \pm \frac{\partial f(\varepsilon_{pl})}{\partial \varepsilon_{pl}} \varepsilon_{pl,i}, \tag{5}$$

где $\sigma_{\text{т},i}$ – предел текучести на i-м полуцикле нагружения; $\sigma_{\text{т},i+1}$ – предел текучести на $(i+1)$-м полуцикле нагружения; $\varepsilon_{pl,i}$ – значение пластической деформации на i-м полуцикле нагружения.

После преобразований уравнения (5) с учетом (3), принимая его для большого числа полуциклов и переходя от дискретных значений к скалярным и приростам величин, заменяя их дифференциалами и интегрируя с помощью начальных условий, получаем

$$\int_0^{2N} dn = \pm E \int_{\sigma_{\text{т},0}}^{\sigma_{\text{т},cr}} \frac{d\sigma_{\text{т}}}{\dfrac{\partial f(\varepsilon_{pl})}{\partial \varepsilon_{pl}}(\sigma_a - \sigma_{\text{т}})}, \tag{6}$$

где $d\sigma_{\text{т}}$, dn – прирост предела текучести и полуциклов нагружения; E – модуль продольной упругости.

Частную производную в знаменателе зависимости (6) определим после дифференцирования (4) с учетом (3) и подстановки $(\sigma_a - \sigma_{\text{т}})$ из (4):

$$\frac{\partial f(\varepsilon_{pl})}{\partial \varepsilon_{pl}} = \frac{b^a(\sigma_{\text{т}} - \sigma_{\text{т},0})^{1-a}}{a + b^a(\sigma_{\text{т}} - \sigma_{\text{т},0})^{1-a}}. \tag{7}$$

После преобразований (6) с учетом (7) окончательная расчетная зависимость для определения числа циклов до разрушения на заданной амплитуде напряжения принимает вид

$$N = \pm \frac{a}{2b^a} E \left[\int_{\sigma_{\text{т},0}}^{\sigma_{\text{т},cr}} \frac{(\sigma_{\text{т}} - \sigma_{\text{т},0})^{a-1}}{\sigma_a - \sigma_{\text{т}}} d\sigma_{\text{т}} \pm \ln \left| \frac{\sigma_a - \sigma_{\text{т},0}}{\sigma_a - \sigma_{\text{т},cr}} \right|^{1/a} \right]. \tag{8}$$

Зависимость (8) представляет собой связь между текущим значением предела текучести и числом циклов нагружения до достижения заданного предельного состояния в рассматриваемой локальной зоне поверхностного слоя материала при нагружении его амплитудой σ_a, т.е. уравнение кривой усталости из модели предельного исчерпания пластичности.

Определение параметров предложенной модели предельного исчерпания пластичности. Зависимость (8) содержит интеграл, зависящий от параметров a и b, которые являются характеристиками данного материала и условий нагружения. Коэффициенты a и b могут быть найдены из системы нелинейных уравнений, составленных с помощью основного уравнения модели (8) и решенных численными методами. При этом интеграл выражается в виде суммы сходящегося бесконечного ряда. Для численного решения этой системы уравнений принимаем, что, как и в случае упрочняющегося материала, исходными данными для определения параметров модели являются пределы выносливости и прочности и кривая усталости гладких образцов [3] при условии, что начальные условия соответственно для упрочнения и разупрочнения могут быть получены следующим образом:

$$\sigma_{\text{т},0} = m_1 \sigma_{-1} = 0{,}5\sigma_{-1}; \qquad \sigma_{\text{т},cr} = m_2 \sigma_{\text{к}} = 1{,}2\sigma_{\text{к}}; \tag{9а}$$

$$\sigma_{\text{т},0} = m_3 \sigma_{\text{к}} = 1{,}2\sigma_{\text{к}}; \qquad \sigma_{\text{т},cr} = m_4 \sigma_{-1} = 0{,}9\sigma_{-1}. \tag{9б}$$

Решение искомого интеграла находим путем разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора. Решая исходный интеграл из уравнения (8), получаем сходящийся бесконечный ряд. Подставив его в (8), запишем в окончательном виде основное уравнение модели для численной обработки:

$$N=\frac{a}{2b^{a}}E\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma_{\text{т},cr}^{m+1}-\sigma_{\text{т},0}^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{(m)}}{d\sigma_{\text{т}}^{(m)}}\left(\frac{(\sigma_{\text{т}}-\sigma_{\text{т},0})^{a-1}}{\sigma_{a}-\sigma_{\text{т}}}\right)\bigg|_{\sigma_{\text{т}}=0}\right]+\right.$$

$$\left.+\ln\left|\frac{\sigma_{a}-\sigma_{\text{т},0}}{\sigma_{a}-\sigma_{\text{т},cr}}\right|^{1/a}\right]. \tag{10}$$

Сумма ряда в выражении (10), а соответственно и точность описания интеграла зависят от количества членов ряда m, которые принимаются при рассмотрении. Согласно проведенному анализу, для достаточной точности в выражении (10) можно оставлять не более 8–15 членов ряда, при этом общая ошибка составляет приблизительно 3...7%.

Уравнение (10) представляет собой уравнение кривой усталости в неявном виде для диапазона амплитуд напряжений от предела выносливости σ_{-1} до критического напряжения усталости $\sigma_{\text{к}}$.

Для определения искомых параметров диаграммы циклического разупрочнения a и b по полученному основному уравнению (10) составлена система нелинейных уравнений для граничных условий конца и начала многоцикловой области усталости с условием достижения материалом предельного состояния:

$$\begin{cases} N_{\text{к}}=\dfrac{a}{2b^{a}}E\left[\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left[\dfrac{\sigma_{\text{т},cr}^{m+1}-\sigma_{\text{т},0}^{m+1}}{(m+1)!}\dfrac{d^{(m)}}{d\sigma_{\text{т}}^{(m)}}\left(\dfrac{(\sigma_{\text{т}}-\sigma_{\text{т},0})^{a-1}}{\sigma_{\text{к}}-\sigma_{\text{т}}}\right)\bigg|_{\sigma_{\text{т}}=0}\right]+\right. \\ \left.+\ln\left|\dfrac{\sigma_{\text{к}}-\sigma_{\text{т},0}}{\sigma_{\text{к}}-\sigma_{\text{т},cr}}\right|^{1/a}\right]; \\ N_{0}=\dfrac{a}{2b^{a}}E\left[\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left[\dfrac{\sigma_{\text{т},cr}^{m+1}-\sigma_{\text{т},0}^{m+1}}{(m+1)!}\dfrac{d^{(m)}}{d\sigma_{\text{т}}^{(m)}}\left(\dfrac{(\sigma_{\text{т}}-\sigma_{\text{т},0})^{a-1}}{\sigma_{-1}-\sigma_{\text{т}}}\right)\bigg|_{\sigma_{\text{т}}=0}\right]+\right. \\ \left.+\ln\left|\dfrac{\sigma_{-1}-\sigma_{\text{т},0}}{\sigma_{-1}-\sigma_{\text{т},cr}}\right|^{1/a}\right]. \end{cases} \tag{11}$$

При решении системы (11) значения параметров деградации материала a и b необходимо выбирать с учетом условия (2), т.е. наличия неупругих деформаций для рассматриваемой локальной зоны. Для этого связь между σ_a и ε_{pl} принимаем в виде экспоненциальной функции как в [2]:

$$\sigma_a = A\ln(\varepsilon_{pl}) + B, \qquad \varepsilon_{pl} = e^{(\sigma_a - B)/A}, \tag{12}$$

где A и B – параметры, подлежащие определению.

Для нахождения параметров A и B задаем значения пластических деформаций на двух уровнях амплитуды напряжений. При описании характера изменения и уровня локальных неупругих деформаций при наработке основывались на анализе этих деформаций, который проводили с использованием данных литературных источников [8, 9] и полученных ранее результатов [2, 3, 10].

Уровень неупругих деформаций задаем для амплитуд напряжений $\sigma_к$ и σ_{-1}. Принимаем, что при наработке, равной половине долговечности N на граничных уровнях σ_a в системе уравнений (11), пластическая деформация ε_{pl} определяется соответственно для упрочнения и разупрочнения как

$$\varepsilon_{pl}(\sigma_{-1}) = \frac{\sigma_к - \sigma_{-1}}{E}; \qquad \varepsilon_{pl}(\sigma_к) = \frac{\sigma_b - \sigma_{-1}}{E}; \tag{13а}$$

$$\varepsilon_{pl}(\sigma_{-1}) = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_{т,0}}{E}; \qquad \varepsilon_{pl}(\sigma_к) = \frac{\sigma_к - \sigma_{-1}}{E}. \tag{13б}$$

Решением системы (11) совместно с условиями (13) являются численные значения двух искомых параметров a и b, по которым могут быть построены диаграммы изменения локального циклического предела текучести для разных амплитуд напряжений по уравнению (4). Кривые изменения циклического предела текучести, а следовательно, и параметры деградации материала, позволяющие получить одну и ту же долговечность, множественны. Поэтому, записав условия (13) в другом виде, можно описать иное поведение материала в процессе циклического нагружения.

Для апробации модели взяты четыре разупрочняющихся материала: стали 40Х(II) и 1Х17Н2Ш, технически чистая медь в состоянии поставки и латунь Л62. Из системы уравнений, составленных по зависимости (11) в соответствии с условиями (13), и по вышеизложенным методикам были найдены значения параметров упрочнения a и b (таблица).

Значения параметров *a* и *b* и координаты характерных точек кривых усталости для выбранных материалов по полному разрушению

Материал	$N_к \cdot 10^{-4}$, цикл	$\sigma_к$, МПа	$N_0 \cdot 10^{-7}$, цикл	σ_{-1}, МПа	a	b	Литературный источник
Сталь 40Х(II)	5	380	0,7	300	1,61	0,39	[2]
Сталь 1Х17Н2Ш	5	490	1,0	390	1,95	0,58	[2]
Медь	5	175	1,0	100	1,21	0,25	[2]
Латунь Л62	5	300	1,0	150	1,42	0,31	[2]

С использованием расчетных параметров a и b могут быть построены кривые усталости по уравнениям (8) или (10), что подтверждает правильность нахождения данных параметров. Ранее [3] подобные решения были получены для циклически упрочняющихся металлов. Максимальная ошибка по долговечности для расчетных и экспериментальных кривых усталости по полному разрушению составляет $+5{,}31\%$.

Определение кинетики неупругого циклического деформирования на основе модели предельного исчерпания пластичности. При описании кинетики расчетной неупругой деформации необходимо определить значения предела текучести $\sigma_{\text{т},i}$ и пластической деформации $\varepsilon_{pl,i}$ в каждом цикле. Для этого подставим (7) в (5) и с учетом выражения (3), записанного для *i*-го полуцикла, получим окончательно уравнение для нахождения предела текучести $\sigma_{\text{т},i}$ на каждом полуцикле нагружения:

$$\sigma_{\text{т},i+1} = \sigma_{\text{т},i} + \frac{1}{E}\frac{b(\sigma_a - \sigma_{\text{т},i})^{(1-a)/a}}{a + b(\sigma_a - \sigma_{\text{т},i})^{(1-a)/a}}(\sigma_a - \sigma_{\text{т},i})^a. \tag{14}$$

Затем, можно найти размах неупругой деформации $\Delta\varepsilon_{pl}$, соответствующий каждому циклу нагружения, определяемый как сумма значений неупругих деформаций в двух полуциклах, составляющих один цикл нагружения. Выражение (3) преобразуется так:

$$\Delta\varepsilon_{pl,j} = \varepsilon_{pl,2j-1} + \varepsilon_{pl,2j} = 2\varepsilon_a(\sigma_a) - \varepsilon_a(\sigma_{\text{т},2j-1}) - \varepsilon_a(\sigma_{\text{т},2j}). \tag{15}$$

Далее можно построить графики изменения расчетной неупругой деформации (рис. 2) для ряда выбранных материалов, характеристики которых представлены в таблице.

Из рис. 2 видно, что расчетные зависимости монотонны и отображают разработанную модель: происходит стабильное повышение неупругой деформации на всех уровнях амплитуд напряжений. В то же время экспериментальные кривые несколько отличаются от расчетных, что можно считать закономерным, так как первые отображают процесс в локальном объеме материала, разупрочнение в котором приведет к усталостному разрушению, вторые – осредненную неупругую деформацию во всем объеме металла [2, 10]. В соответствии с [6], начальное скольжение материала начинается в самых слабых единицах структуры, в которых в последующем происходит зарождение трещины и ее рост.

Для трактовки правильности модели весьма показательным является близкая картина изменения расчетных и экспериментальных величин неупругой деформации, что свидетельствует о корректности допущений при построении модели, хотя уровень и интенсивность роста расчетных кривых выше экспериментальных, что связано с их локальностью.

Заключение. Предложена модель предельного исчерпания пластичности материала для области многоцикловой усталости, в основу которой положены математическое описание Афанасьева и схема упрочнения Орована. Модель позволяет определить параметры упрочнения–разупрочнения материала и

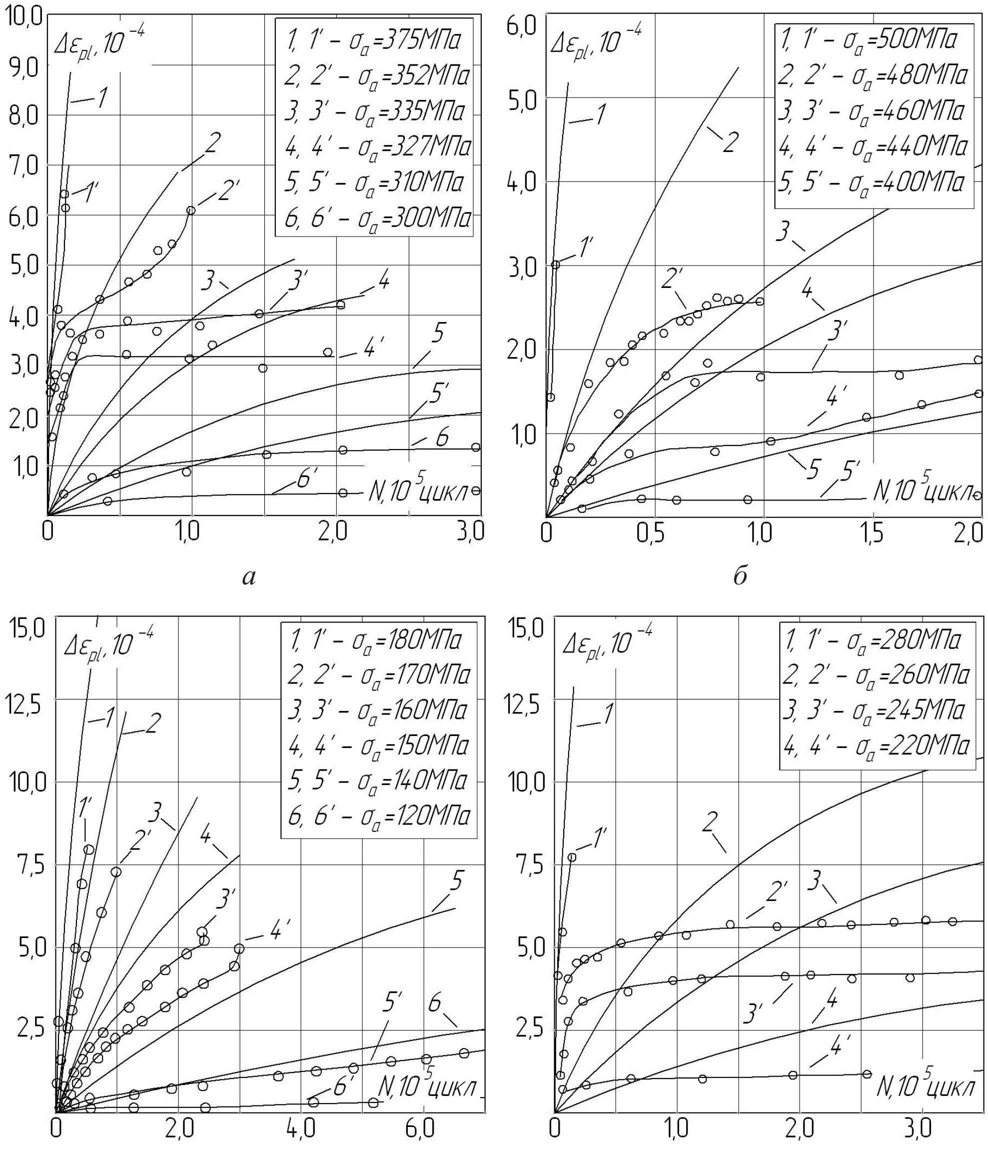

Рис. 2. Расчетное (цифры со штрихом) и экспериментальное (цифры без штрихов) [2] изменение размаха неупругой деформации за цикл для разных σ_a в зависимости от числа циклов нагружения для сталей 40Х(II) (*а*) и 1Х17Н2Ш (*б*), меди (*в*) и латуни Л62 (*г*).

кинетику локального циклического неупругого деформирования материала по кривой усталости. Апробирование модели по кривым усталости и по кинетике неупругого циклического деформирования показывает, что ее можно использовать для качественного и количественного описания неупругого деформирования материалов в процессе усталости. Важным аспектом модели является то, что ее параметры определяются по известным механическим характеристикам материалов и кривой многоцикловой усталости, которые могут быть взяты из базы данных.

Параметры разрабатываемой модели будут использоваться в программе расчета долговечности элементов конструкций при наличии переменных циклических амплитудных и средних напряжений, а также градиента напряжений.

Р е з ю м е

Запропоновану раніше авторами розрахункову модель оцінки довговічності циклічно зміцнюваних матеріалів розвинено для знеміцнюваних матеріалів. Обґрунтовано умови оцінки параметрів моделі. Приведені розрахункові залежності непружних деформацій від числа циклів навантаження зіставляються з експериментальними.

1. *Трощенко В. Т.*, *Лепихин П. П.*, *Хамаза Л. А.*, *Бабич Ю. Н.* Автоматизированный банк данных “Прочность материалов” // Пробл. прочности. – 2009. – № 3. – С. 5 – 13.
2. *Трощенко В. Т.*, *Хамаза Л. А.*, *Цыбанев Г. В.* Методы ускоренного определения пределов выносливости металлов на основе деформационных и энергетических критериев. – Киев: Наук. думка, 1979. – 172 с.
3. *Цыбанев Г. В.*, *Новиков А. И.* Определение параметров диаграммы циклического упрочнения по результатам испытаний материала на многоцикловую усталость // Надійність і довговічність машин і споруд. – 2008. – **30**. – С. 160 – 168.
4. *Афанасьев Н. Н.* Статистическая теория усталостной прочности металлов. – Киев: Изд-во АН УССР, 1953. – 128 с.
5. *Цыбанев Г. В.*, *Цыбанев М. В.* Модель предельного упрочнения материала как критерия зарождения трещины при многоцикловом нагружении // Динаміка, міцність і ресурс машин та конструкцій: Тез. доп. міжнар. наук.-техн. конф. – Киев: Ин-т пробл. материаловедения НАН Украины, 2005. – Т. 2. – С. 361 – 362.
6. *Иванова В. С.*, *Терентьев В. Ф.* Природа усталости металлов. – М.: Металлургия, 1975. – 456 с.
7. *Orowan E.* Theory of the fatigue of metals // Proc. Roy. Soc. – 1939. – **171** (944). – P. 79 – 106.
8. *Klesnil M. and Lucas P.* Fatigue of Metallic Materials. – Prague: Academia, 1980. – 239 p.
9. *Sasaki S. and Ochi Y.* Some experimental study of fatigue slip bands and persistent slip bands during fatigue process of low-carbon steel // Fract. Mech. – 1979. – **12**. – P. 531 – 540.
10. *Трощенко В. Т.*, *Коваль Ю. И.*, *Цыбанев Г. В.* Исследование связи усталостной долговечности металлов с уровнем циклических неупругих деформаций // Пробл. прочности. – 1977. – № 11. – С. 9 – 14.

Поступила 21. 06. 2009