

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.3

Взаимное влияние вырезов на прочность оболочечных конструкций при пластическом деформировании

В. С. Гудрамович^{а,1}, Э. Л. Гарт^{б,2}, Д. В. Клименко^{в,3}, С. А. Рябоконь^а

^а Институт технической механики НАН Украины и ГКА Украины, Днепропетровск, Украина

^б Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Днепропетровск, Украина

^в Государственное предприятие КБ “Южное” им. М. К. Янгеля, Днепропетровск, Украина

¹ hudramovich@i.ua

² hart@ua.fm

³ klymenko_dv@hotmail.com

Построены расчетные схемы определения напряженно-деформированного состояния на основе использования проекционно-итерационных схем реализации метода конечных элементов для оболочечных конструкций с прямоугольными вырезами при пластическом деформировании материала. Варьирование параметрами вырезов, их количеством, расстоянием между ними позволяет изучить образование и трансформацию зон пластических деформаций в процессе нагружения для разных диаграмм деформирования. Слияние зон приводит к уменьшению жесткости, что используется при прогнозировании несущей способности оболочечных конструкций с вырезами.

Ключевые слова: вырезы, оболочечные конструкции, пластическое деформирование, несущая способность, взаимное влияние, метод конечных элементов, проекционно-итерационные схемы.

Постановка задачи. Конструкции, используемые во многих приоритетных отраслях современной техники (ракетно-космическая – РКТ, авиационная, нефтегазовая, промышленное строительство и др.), содержат в качестве основных несущих элементов оболочки и пластины, оптимально сочетающие минимальный вес и необходимую прочность. Для них зачастую характерно наличие вырезов-люков, которые предназначены для проведения определенных технологических операций. Отверстия в элементах конструкций могут возникнуть также при некоторых интенсивных воздействиях различной физической природы [1–3]. Нарушения сплошности вызывают концентрацию напряжений. Это может привести к разрушению или появлению недопустимых деформаций.

Высокие уровни нагрузки приводят к появлению пластических деформаций, что существенно усложняет разработку методов оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) и несущей способности элементов неоднородных конструкций с вырезами. Реальные запасы прочности и ресурс конструкций могут быть оценены только при учете пластического деформирования.

Обычно в конструкциях имеется несколько вырезов, взаимное влияние которых в процессе нагружения приводит к новым эффектам, существенно изменяющим сопротивляемость элементов неоднородных конструкций деформированию.

На рис. 1 приведены некоторые экспериментально полученные результаты, иллюстрирующие своеобразие соответствующих задач [3]. Кроме того, показаны модели сферических днищ с круговыми вырезами-люками, расположенными в разных местах оболочек, при поперечном нагружении (в плоскости подкрепляющего кольца – рис. 1,2). Это моделирует нагружение протяженных цилиндрических конструкций со сферическими днищами или мембранами при опирании на седловые опоры-ложементы в местах расположения днищ, мембран (объекты РКТ при транспортировке и хранении, трубопроводы, цистерны и др.). Концентрация напряжений приводит к возникновению вмятин у краев вырезов, что уменьшает сопротивляемость указанных элементов конструкции нагружению.

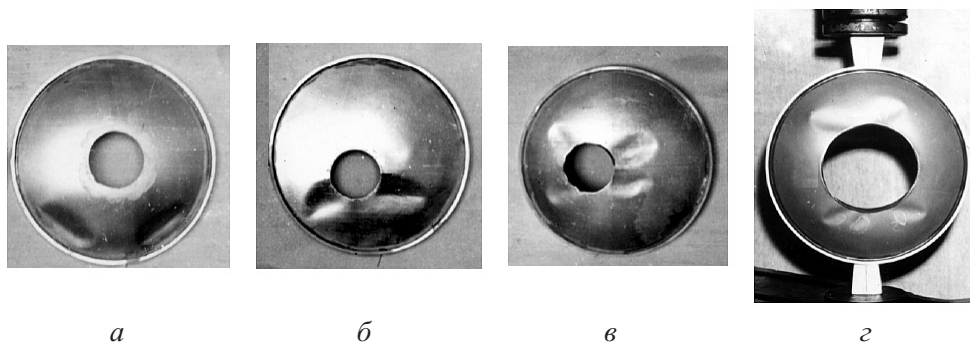


Рис. 1. Виды разрушения моделей сферических днищ с вырезами.

Отметим одну особенность этих экспериментов: несмотря на то что максимальное нагружение днищ осуществляется в месте контакта с опорой, образование локальных вмятин вследствие концентрации напряжений происходит вначале у краев вырезов. Случай, когда исчерпание несущей способности связано с образованием вмятин непосредственно в зоне контакта с опорой, показан на рис. 1,а.

Уменьшение концентрации напряжений конструктивно регулируется подкрепляющими элементами возле краев вырезов. Особенности их учета при расчетах прочности отражены в ряде исследований [2, 3].

Рассмотрим элементы тонкостенных цилиндрических оболочечных конструкций, которые содержат два (три) рядом расположенных выреза-люка прямоугольной формы при осевом сжатии (рис. 2). Приведенные на рис. 2 схемы нагружения моделируют поведение отсеков РКТ, башенных сооружений

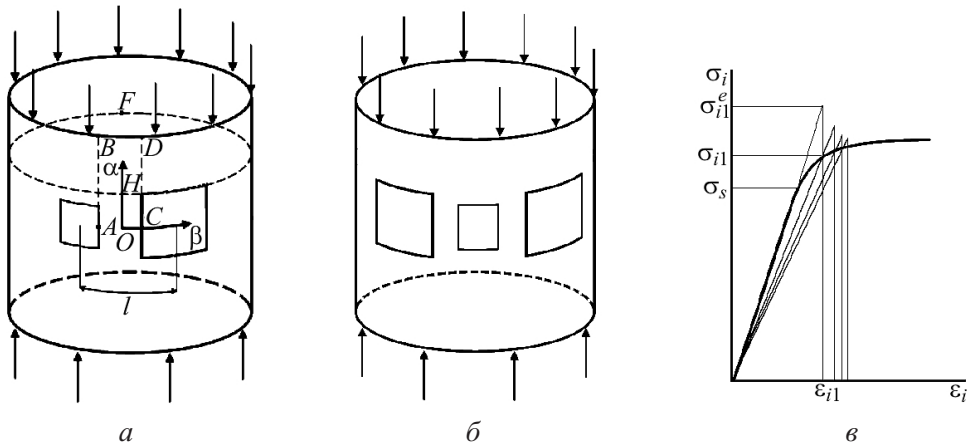


Рис. 2. Схемы нагружения оболочечных элементов конструкций с вырезами (а, б) и диаграмма деформирования материала (в).

различного назначения и др. Для конструкций РКТ – это случаи старта, полета на активном участке траектории [4, 5], для башенных конструкций – вес. На рис. 2,а отмечены также сечения AB , CD , FHF , в которых в дальнейшем будут определяться распределения напряжений.

Нагрузки и параметры конструкций соответствуют таким, при которых происходит пластическое деформирование материала. На рис. 2,в показаны диаграмма деформирования алюминиевых сплавов типа Д16Т [6] и использованная в работе схема расчета с учетом пластического деформирования (σ_s – условный предел текучести).

Отметим, что рассматриваемые нагрузки меньше критических усилий потери устойчивости, определяемых с учетом пластического деформирования материала [7], на величину которых для исследуемых элементов конструкций поддерживающее влияние оказывают также соседние отсеки.

В процессе нагружения происходит взаимодействие вырезов, зоны пластических деформаций сливаются. Образование последних приводит к существенному уменьшению жесткости конструкции, что влияет на ее прочность, при этом снижается сопротивляемость элементов конструкций действующим нагрузкам и увеличивается риск разрушения.

Поля напряжений и деформаций, возникающие возле краев вырезов, взаимно влияют друг на друга. Это влияние зависит от формы, размеров и количества вырезов, а также расстояния между ними. Пластическое деформирование материала конструкции существенно меняет картину этого взаимодействия. Эффекты, обусловленные трансформацией полей напряжений и деформаций возле отверстий при нагружении, изменяют процесс исчерпания несущей способности и должны быть оценены.

Определяются зоны пластического деформирования, возникающие вначале локально возле краев вырезов, распределение напряжений, нагрузки, соответствующие началу слияния зон для заданных диаграмм деформирования материала, и дальнейшая трансформация совместных зон деформирования в процессе нагружения. Эти факторы позволяют прогнозировать несущую способность конструкций.

Методы решения. При решении задач определения НДС оболочечных элементов конструкций с вырезами могут быть использованы аналитические методы, представленные, в частности, в [1, 2, 8]. В этих работах (в них содержится обширная библиография) рассмотрены многочисленные решения задач определения НДС пластинчато-оболочечных элементов конструкций с вырезами различной формы в геометрически линейной и нелинейной постановках при упругом и нелинейно-упругом деформировании материала. При изучении НДС с учетом пластического деформирования материала используются методы упругих решений, сводящие упругопластические задачи к последовательности задач теории упругости (методы дополнительных нагрузок или деформаций, переменных параметров упругости [9, 10]). Строятся схемы последовательных приближений, в каждом из которых решается задача теории упругости. Процесс их построения продолжается до совпадения соседних приближений с заданной точностью.

Для решения рассматриваемых задач применяется метод переменных параметров упругости (МППУ). В этом методе для каждого приближения имеются соотношения теории упругости с переменными параметрами: ν^* – коэффициент Пуассона, E^* – модуль упругости, G^* – модуль сдвига. Используются соотношения деформационной теории пластичности:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G^*} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu^*}{1+\nu^*} \delta_{ij} \sigma \right), \quad (1)$$

где

$$G^* = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)}; \quad E^* = \frac{3E}{2E\psi + 1 - 2\nu}; \quad \nu^* = \frac{E\psi - 1 + 2\nu}{2E\psi + 1 - 2\nu}; \quad \psi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i};$$

σ_{ij} , ε_{ij} – напряжения и деформации; σ_i , ε_i – их интенсивности; σ – среднее напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера.

Использование деформационной теории пластичности должно быть оговорено особо. Теория справедлива для процессов нагружения, близких к простому, при сравнительно медленно меняющихся нагрузках. В зонах, близких к угловым точкам вырезов, ее применимость должна быть исследована дополнительно [9]. Разработаны также расчетные схемы для теории течения, где используются соотношения между приращениями деформаций и напряжениями [10]. При проведении расчетов используются реальные диаграммы деформирования различных материалов, связывающие σ_i и ε_i [6].

Схема применения МППУ показана на рис. 2, в. В первом приближении решается задача теории упругости при $E_{*1} = E$, $\nu_{*1} = \nu$, определяется интенсивность σ_{i1}^e , соответствующая такому расчету, σ_{i1} (по диаграмме $\sigma_i - \varepsilon_i$) и $\psi_1 = 3\varepsilon_{i1}/2\sigma_{i1}$. Во втором приближении решается задача теории упругости при $E_{*2} = \sigma_{i1}/\varepsilon_{i1}$, для вычисления ν_{*2} используется ψ_1 и т.д. Решение проводится до совпадения соседних n -го и $(n-1)$ -го приближений с заданной точностью при условии, что точки, определяющие σ_{in} , ε_{in} , достаточно близки к диаграмме (при расчетах используется условие $E_{*(n)} \approx E_{*(n-1)}$).

При использовании метода дополнительных нагрузок [7, 9] в уравнениях равновесия и граничных условиях при решении задачи теории упругости к действующим объемным и поверхностным нагрузкам добавляются дополнительные, учитывающие пластическое деформирование (обозначены “0”).

Для деформационной теории уравнения имеют вид

$$\sigma_{ij,j}^e + F_i + F_i^0 = 0, \quad \sigma_{ij}^e n_i = p_i + p_i^0, \quad (2)$$

где

$$F_i^0 = -[(1 - 1/2G\psi)s_{ij}^e]_{,j}; \quad p_i^0 = (1 - 1/2G\psi)s_{ij}^e n_i;$$

s_{ij} – девиаторы напряжений; n_i – направляющие косинусы; запятая в индексе обозначает дифференцирование по соответствующей координате.

Напряжения в пластическом теле равны

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e / 2G\psi + \sigma^e (1 - 1/2G\psi) \delta_{ij}. \quad (3)$$

В первом приближении ($\psi = 1/(2G)$, $F_i^0 = p_i^0 = 0$) решается задача теории упругости, определяются σ_{i1}^e , σ_{i1} , которым соответствует параметр $\psi_1 = (1 + \nu)\sigma_{i1}^e / E\sigma_{i1}$, и напряжения пластического тела σ_{ij1} по (3) при $\psi = \psi_1$. Во втором приближении решается задача теории упругости с дополнительными нагрузками F_{i1}^0 , p_{i1}^0 , определяемыми при $\psi = \psi_1$, $s_{ij}^e = s_{ij1}^e$. Далее вычисления осуществляются по схеме: $\sigma_{ij2}^e \rightarrow \sigma_{i2}^e \rightarrow \sigma_{i2} \rightarrow \psi_2 \rightarrow \sigma_{ij2} \rightarrow F_{i2}^0, p_{i2}^0$. Определяется НДС в третьем приближении и т.д. Решение проводится до совпадения двух соседних приближений с заданной точностью: $\sigma_{ijn} \approx \sigma_{ij(n-1)}$. Подобная схема решений может быть построена и для теории течения [7].

К наиболее универсальным и распространенным численным методам решения задач НДС элементов конструкций с вырезами относится вариационно-сеточный метод конечных элементов (МКЭ). Актуальным при численной реализации МКЭ является разработка эффективных вычислительных схем, позволяющих ускорить компьютерное время расчета и контролировать процесс вычислений на любом этапе.

В случае вариационной постановки задачи при определении компонент НДС осуществляется минимизация функционала энергии с последующей дискретизацией по МКЭ.

Используется общий функционал потенциальной энергии для геометрически линейной теории тонких оболочек при введенной системе координат α, β, z [11]:

$$I = h \int \int_{\Omega} \frac{G^*}{1 - \nu^*} [\varepsilon_{\alpha}^2 + 2\nu^* \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} + \varepsilon_{\beta}^2 + 2(1 - \nu^*)(\omega/2)^2] d\alpha d\beta + \frac{h^3}{12} \int \int_{\Omega} \frac{G^*}{1 - \nu^*} [\chi_{\alpha}^2 + 2\nu^* \chi_{\alpha} \chi_{\beta} + \chi_{\beta}^2 + 2(1 - \nu^*)\tau^2] d\alpha d\beta, \quad (4)$$

где $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \omega$ – соответственно относительные удлинения и сдвиг волокон срединной поверхности, связанные с координатами α, β ; $\chi_\alpha, \chi_\beta, \tau$ – параметры кривизны и кручения соответственно; h – толщина оболочки; Ω – ее поверхность; G_*, ν_* – переменные параметры упругости для каждого приближения МППУ.

В первом приближении при решении задачи теории упругости можно записать $E_* = 2G_*(1 + \nu_*) = E, \nu_* = \nu$. Для тонкостенных конструкций, например РКТ, при большой величине отношения R/h распределение напряжений и деформаций по толщине можно считать линейным (именно для таких конструкций при нагружении продольными силами – рис. 2,а,б проведен ниже численный анализ НДС).

Деформации срединной поверхности, кривизны и кручение цилиндрической оболочки определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, & \varepsilon_\beta &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{R} w, & \omega &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \\ \chi_\alpha &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, & \chi_\beta &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta}, & \tau &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \end{aligned} \quad (5)$$

где u, v, w – перемещения точек срединной поверхности в направлении координат α, β, z ; R – радиус оболочки.

Напряжения в срединной поверхности оболочки равны:

$$\sigma_\alpha = \frac{2G_*}{1 - \nu_*} (\varepsilon_\alpha + \nu_* \varepsilon_\beta), \quad \sigma_\beta = \frac{2G_*}{1 - \nu_*} (\varepsilon_\beta + \nu_* \varepsilon_\alpha), \quad \sigma_{\alpha\beta} = G_* \omega.$$

Функционал I с использованием (5) запишем в виде

$$\begin{aligned} I &= h \int \int_{\Omega} \frac{G_*}{1 - \nu_*} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + 2\nu_* \frac{\partial u}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{R} w \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{R} w \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}(1 - \nu_*) \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\alpha d\beta + \frac{h^3}{12} \int \int_{\Omega} \frac{G_*}{1 - \nu_*} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)^2 + \right. \\ &+ 2\nu_* \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. 2(1 - \nu_*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\alpha d\beta - \int (T_1 u + S_1 v + Q_1 w + M_1 \varphi_1) d\beta, \quad (6) \end{aligned}$$

где T_1, S_1, Q_1, M_1 – соответственно продольные, касательные, поперечные усилия и изгибающий момент, приложенные к краям оболочки.

Интенсивность деформаций определяется по формуле

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1 - \nu_* + \nu_*^2}{(1 - \nu_*)^2} (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)^2 - 3\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \frac{3}{4} \omega^2}. \quad (7)$$

Отметим, что для расчета оболочечных конструкций с вырезами, используемых в различных отраслях техники, можно применять теорию пологих оболочек [12], что дает более простые выражения для функционала I . Например, в РКТ переходной отсек первой ступени космической ракеты-носителя “Циклон-3” выполнен в виде цилиндрической оболочки ($R = 1,5$ м, длина $L = 1,2$ м, толщина обшивки $h = 0,0012$ м), в которой имеется несколько расположенных на разных уровнях прямоугольных вырезов-люков высотой $0,3-0,4$ м и шириной – $0,3-0,6$ м [4]. Напряженно-деформированное состояние, вызванное концентрацией напряжений, быстро затухает при удалении от краев вырезов и для такой конструкции может быть определено на основе теории пологих оболочек.

При минимизации функционала энергии для оболочечных элементов конструкций используется проекционно-итерационная схема МКЭ, существенно уменьшающая время расчета на персональных компьютерах. Основная суть ее заключается в следующем [13–19].

Задача нахождения минимума функционала является задачей условной минимизации

$$I[z] \rightarrow \inf, \quad z \in Z, \quad (8)$$

где $I[z]$ – функционал, ограниченный на множестве кинематически возможных перемещений Z вещественного гильбертова пространства.

Экстремальная задача (8) с помощью МКЭ аппроксимируется последовательностью дискретных экстремальных задач ($n = 1, 2, \dots$). Каждая из них решается с помощью некоторого итерационного процесса (например, метода последовательной верхней релаксации [15]), но не до конца. Начиная с произвольного достаточно грубого разбиения сетки, строится лишь несколько приближений (k_n) к точке минимума n -й функции многих переменных, последнее интерполируется на более мелкую конечноэлементную сетку и служит на ней начальным приближением к точке минимума следующей функции на $(n + 1)$ -м шаге проекционно-итерационного процесса, который продолжается до достижения заданной точности вычислений.

Элементы конструкции разбиваются на прямоугольные конечные элементы (билинейная аппроксимация), исходя из особенностей геометрии. Применение треугольных элементов (линейная аппроксимация) является более эффективным с точки зрения точности решения задач в зонах локальной концентрации напряжений, но требует большего времени расчета. Оптимальным будет сочетание этих элементов [19]. При проведении расчетов используется методика, согласно которой значения перемещений в узле выражаются через перемещения в узлах четырех прилегающих к нему элементов. Для повышения точности решения в зонах локальной концентрации напряжений (возле углов вырезов) целесообразно использовать адаптивные сетки [17, 19].

Проекционно-итерационные схемы МКЭ успешно применяются к крайним задачам теории упругости, задачам НДС пластин с вырезами различной формы [19, 20], плоским задачам упругопластического деформирования структурированных сред, содержащих ансамбли пор, трещин, включений [21]. Эти же расчетные схемы используются при решении задач контактного взаимодействия протяженных оболочечных конструкций с седловыми опорами [20, 22], что дает значительную экономию (в десятки раз) времени компьютерного расчета по сравнению со временем в случае применения схем на основе традиционного МКЭ.

Полученные в указанных выше и других литературных источниках решения посредством проекционно-итерационных расчетных схем задач теории упругости, в частности, для пластин с отверстиями разной формы сравнивались с решениями таких задач с помощью известных аналитических методов, некоторые из которых подтверждены экспериментальными исследованиями с использованием методов фотоупругости [8]. Удовлетворительное их совпадение (расхождение до 1...4%) служит подтверждением приемлемости этих расчетных схем МКЭ, что в разных задачах существенно экономит компьютерное время расчета.

Учет пластического деформирования материала осуществляется с помощью вышеуказанных методов упругих решений. В этом случае задачи теории упругости для каждого приближения решаются с использованием проекционно-итерационных схем МКЭ. Существенная экономия компьютерного времени расчета для каждого приближения позволяет, в частности, увеличить количество приближений.

Численный анализ. На основе разработанной методики создана программа на языке “С++” для расчета НДС цилиндрических оболочек с вырезами. Исследовали оболочки ($L = 1,6$ м; $R = 1$ м, $h = 0,004$ м) из алюминиевого сплава Д16Т с двумя и тремя прямоугольными вырезами разного размера (рис. 2, а, б). Размер большего выреза составляет $0,4 \times 0,4$ м, меньшего – $0,2 \times 0,2$ м. Сжимающие нагрузки p изменялись от 60 до 90 МПа. Расстояние между центрами вырезов l варьируется от 0,6 до 2 м с шагом 0,2 м.

Диаграмма деформирования заимствована из [6], принято $\sigma_s = 200$ МПа.

Проекционно-итерационный вариант МКЭ реализован на восьми вложенных вдвое конечноэлементных сетках из прямоугольных эрмитовых элементов. Количество k_n приближений на n -м шаге ($n = 1, 2, \dots, 8$) проекционно-итерационного процесса выбиралось как наименьшее целое k , удовлетворяющее условию

$$\|z_n^{(k)} - z_n^{(k-1)}\| \leq \varepsilon_n, \quad k = 0, \dots, k_n, \quad (9)$$

где $z_n^{(k)}$ – приближенное решение n -й конечномерной задачи; ε_n – заданная точность вычислений на n -й сетке.

Приведем некоторые результаты численного анализа.

На рис. 3 показано распределение относительных напряжений в характерных сечениях оболочки с двумя вырезами (рис. 2, а) при $p = 80$ МПа и разной величиной l .

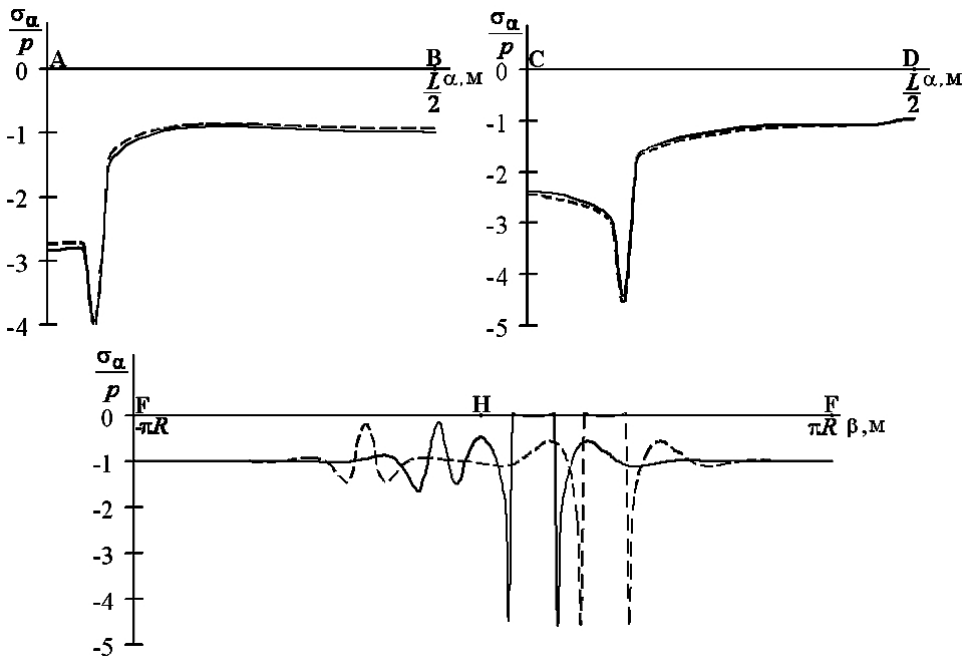


Рис. 3. Распределение относительных напряжений в характерных сечениях оболочки с двумя вырезами. (Сплошные линии – $l = 0,8$ м, штриховые – $l = 2$ м.)

На рис. 4 изображена трансформация зон пластических деформаций для оболочки с двумя вырезами: $l = 1,2$ м; $p = 90$ МПа – рис. 4,а; $l = 0,8$ м, $p = 80$ МПа – рис. 4,б (приводятся проекции на плоскость развертки оболочки).

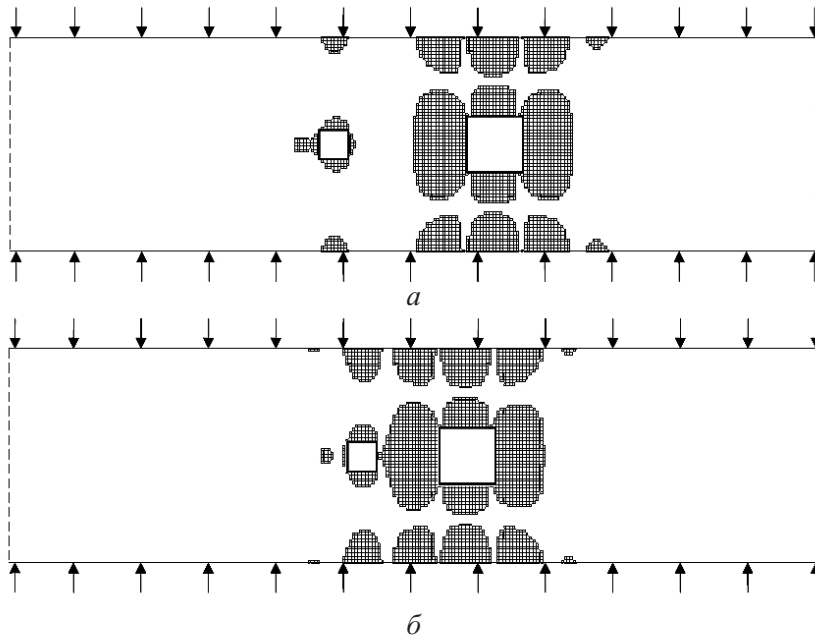


Рис. 4. Зоны пластических деформаций в оболочке с двумя вырезами. (Штриховкой отмечены зоны пластических деформаций.)

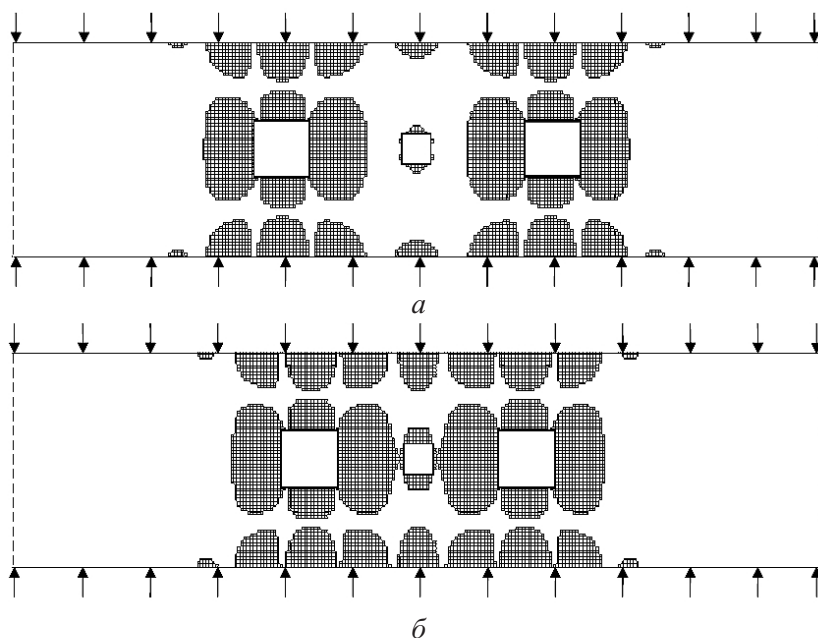


Рис. 5. Зоны пластических деформаций в оболочке с тремя вырезами.

На рис. 5 показано развитие зон пластических деформаций в оболочке с тремя вырезами: $l = 1$ м, $p = 80$ МПа – рис. 5,а; $l = 0,8$ м, $p = 85$ МПа – рис. 5,б.

Зоны возникают локально у краев вырезов и торцов оболочки, сливаясь при увеличении нагрузки p и уменьшении величины l . Варианты взаимовлияния отверстий будут различаться при изменении параметров оболочки и вырезов.

С помощью программы расчета можно определить нагрузки, при которых зоны пластических деформаций начинают сливаться и становятся общими для заданных геометрических параметров конструкции и вырезов. Использование проекционно-итерационных схем реализации МКЭ в этих задачах позволило сэкономить компьютерное время расчета в 36–45 раз (в зависимости от класса задач) по сравнению с таковым на основе традиционного МКЭ (на одной сетке).

Зоны пластических деформаций приводят к уменьшению жесткости. Образование совместных для вырезов зон значительно снижает сопротивляемость элементов оболочечных конструкций с вырезами действующим нагрузкам. Это может быть использовано при прогнозировании их несущей способности при пластическом деформировании.

Заключение. На основе проекционно-итерационных схем реализации МКЭ, позволяющих существенно уменьшить компьютерное время расчета (по сравнению с традиционным МКЭ), разработаны методы и алгоритмы расчета НДС оболочечных конструкций, содержащих несколько прямоугольных вырезов, при пластическом деформировании материала. Варьирование параметрами вырезов, их количеством, расстоянием между ними позволяет изучить возникновение и трансформацию зон пластических деформаций в

процессе нагружения для различных диаграмм деформирования. Слияние зон приводит к снижению жесткости, что используется при прогнозировании несущей способности оболочечных конструкций с вырезами при пластическом деформировании.

Резюме

Побудовано розрахункові схеми визначення напружено-деформованого стану на основі використання проєкційно-ітераційних схем реалізації методу скінченних елементів для оболочкових конструкцій, що містять декілька прямокутних вирізів при пластичному деформуванні матеріалу. Варіювання параметрами вирізів, їх кількістю, відстанню між ними дозволяє вивчити виникнення і трансформацію зон пластичних деформацій в процесі навантаження для різних діаграм деформування. Злиття зон призводить до зниження жорсткості, що використовується при прогнозуванні несівної здатності оболочкових конструкцій з вирізами.

1. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов В. Н. и др.* Методы расчета оболочек. В 5 т. – Т. 1. Теория оболочек, ослабленных отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с.
2. *Преображенский И. Н., Цурпал И. А.* Вырезы в несущих конструкциях. – М.: Машиностроение, 1984. – 112 с.
3. *Hudramovich V. S.* Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, No. 12. – P. 1323 – 1355.
4. *Конюхов С. Н., Мащенко А. Н., Паппо-Корыстин В. Н. и др.* Ракеты и космические аппараты конструкторского бюро “Южное” / Под. общ. ред. С. Н. Конюхова. – Киев: Изд. компания “КИТ”, 2004. – 260 с.
5. *Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Клименко Д. В. и др.* Конечно-элементный анализ упругопластического напряженно-деформированного состояния отсеков ракетных конструкций с вырезами // *Техн. механика.* – 2011. – № 4. – С. 52 – 61.
6. *Лебедев А. А., Ковальчук Б. И., Гигиняк Ф. Ф., Ламашевский В. П.* Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / Под общ. ред. А. А. Лебедева. – Киев: Издательский дом “Ин-Юре”, 2003. – 538 с.
7. *Гудрамович В. С.* Устойчивость упруго-пластических оболочек. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
8. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
9. *Ильюшин А. А.* Труды. В 4 т. – Т. 2. Пластичность: 1946–1966. – М.: Физматлит, 2004. – 479 с.
10. *Биргер И. А.* Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести // *Усп. механики деформируемых сред.* – М.: Наука, 1975. – С. 51 – 73.

11. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
12. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 474 с.
13. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
14. Kluge R. Ein Projektions-Iterationsverfahren bei Fixpunktproblemen und Gleichungen mit monotonen Operatoren // Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. – 1969. – **11**, No. 8-9. – S. 599 – 609.
15. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
16. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. В 2 кн. – М.: МЦНМО, 2011. – Кн. 1. – 620 с.; кн. 2. – 433 с.
17. Шайдулов В. В. Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
18. Hart E. L. Projection-iterative version of the pointwise relaxation method // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 1. – P. 76 – 88.
19. Hudramovich V. S., Hart E. L., and Ryabokon' S. A. Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates // J. Eng. Math. – 2013. – **78**, Issue 1. – P. 181 – 197.
20. Гудрамович В. С., Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов в задачах упругопластического деформирования пластин с отверстиями // Упругость и неупругость: Материалы международного симпозиума, посвященного 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. – М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011. – С. 144 – 147.
21. Гарт Э. Л., Гудрамович В. С. Численный анализ упруго-пластического деформирования структурированных сред // Доп. НАН України. – 2012. – № 5. – С. 49 – 56.
22. Hudramovich V. S. Contact mechanics of shell structures under local loading // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 7. – P. 708 – 729.

Поступила 04. 10. 2012