Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

А.М. НАГІРНА

ЗАДАЧА ЛОКАЛІЗАЦІЇ ФУНКЦІЇ НА МНОЖИНІ РОЗМІЩЕНЬ

Представлення многогранника від-повідної комбінаторної структури у вигляді графа надає мож-ливість використання його струк-турних властивостей для розв'я-зання певного класу оптиміза-ційних комбінаторних задач.

Математичні моделі у вигляді графів широко використовуються при моделюванні різних явищ, процесів і систем. Більшість теоретичних і реальних прикладних задач можуть бути розв'язані за допомогою аналізу графових моделей [1].

У свою чергу, вивчення властивостей комбінаторних множин тісно пов'язано з теорією многогранників і графів. Многогранники відповідних комбінаторних структур можна представити у вигляді графів і використовувати їх структурні властивості для розв'я-зання оптимізаційних комбінаторних задач.

Враховуючи, що для конфігурації перестановок існує граф, який можна застосовувати в методі направленого структурування, то згідно властивостей конфігурації розміщень, можна побудувати граф розміщень [2].

Теорема 1 [3]. Граф $G(A(n,m))$ конфігу-рації розміщень $A(n,m)$ при $n > m$ і до-вільному векторі $\vec{A} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ еквіва-лентний графу $G(P_n)$ комбінаторної конфі-гурації перестановок P_n.

Число конфігурацій графа конфігурації розміщень $A(n,m)$, $m \le n$, утвореного із елементів $\{1, 2, ..., n\}$ можна розрахувати за формулою:

$$A_n^m = n!/(n-m)! \qquad (1)$$

Загальна схема алгоритму направленого структурування до комбінаторної конфігурації розміщень полягає у наступному.

Початкова множина розміщень замінюється на базову за допомогою вихідної перестановки u, яка нормалізує цільову функцію. Для кожної i-ої обмежуючої функції g_i [4]:

$$u_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ 2 & 1 & \ldots & \varphi_m \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Отримуємо індивідуальну множину розміщень A_i, відповідно для кожної функції обмеження граф розміщень $G(A(n,m))$ має стандартний вигляд.

Розв'язуємо задачу локалізації g_i, $i \in N_m$ і отримуємо допустиму множину розміщень для додаткового лінійного обмеження g_i. За допомогою оберненої перестановки до (2) визначаємо ту ж множину в базовій множині розміщень $G(A(n,m))$. Знаходимо переріз множин розміщень обмежуючих функцій та визначаємо множину розв'язків у базовій множині і впорядковуємо її в лексикографічному порядку. Точка розміщення найвищого (найнижчого) порядку буде екстремумом цільової функції. Розглянемо алгоритм на прикладі.

Приклад. Дано функцію $f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 8x_3$, елементи множини, що формують множину розміщень $A(1,2,3,4)$. Задано додаткові обмеження, що визначають область допустимих значень цільової функції: $g_1 = 7x_1 + 5x_2 + x_3 \le 30$, $g_2 = 6x_1 + 2x_2 + 9x_3 \ge 40$. Необхідно знайти максимум цільової функції на множині розміщень A_4^3.

Розв'язання. Задана цільова функція $f(x)$ нормалізована. Тому граф розміщень для нормалізованої функції має стандартний вигляд графа G конфігурації розміщень, число конфігурацій $A_4^3 = 24$.

Нормалізуємо g_1 за допомогою перестановки $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ до вигляду $g_1' = x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 30.$ Загальна структурна схема графа G розбивається на структурні схеми підграфів G_1, G_2, , G_3, G_4 і знаходиться значення функції у крайніх точках підграфів, які визначають мінімальне та максимальне значення на підграфах.

Розв'язуючи задачу локалізації необхідно врахувати, що елементи множини розміщень мають задовольняти умову $g_1' = x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 30$. Згідно рис. 1, підграф G_1 не задовольняє обмеження, а множини вершин підграфів G_2, G_3, G_4 необхідно розглянути детально.

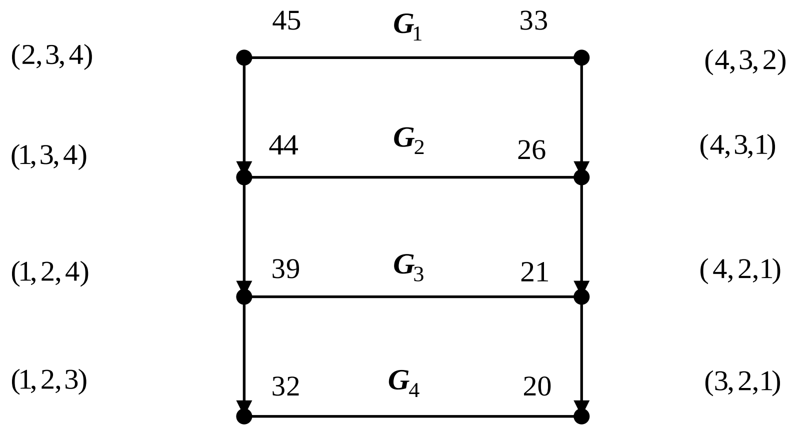

РИС. 1. Загальна структурна схема графа для g_1'

Для вершин підграфів G_2, G_3, G_4 значення g_1' будуть наступні.

Згідно табл. 1, умову $g_1' = x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 30$ будуть задовольняти наступні вершини: 10, 11, 12.

Побудуємо аналогічні таблиці для вершин підграфів G_3, G_4.

Аналізуючи табл. 2, обмеження $g_1' \leq 30$ будуть задовольняти вершини: 16, 17, 18.

ТАБЛИЦЯ 1

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_1'
7	1	3	4	44
8	3	1	4	36
9	1	4	3	42
10	4	1	3	30
11	3	4	1	30
12	4	3	1	26

ТАБЛИЦЯ 2

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_1'
13	1	2	4	39
14	2	1	4	35
15	1	4	2	35
16	4	1	2	23

17	2	4	1	29
18	4	2	1	21

Вершини 20, 21, 22, 23, 24 підграфа G_4 задовольняють умову обмеження (табл. 3).

ТАБЛИЦЯ 3

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_1'
19	1	2	3	32
20	2	1	3	28
21	1	3	2	30
22	3	1	2	22
23	2	3	1	24
24	3	2	1	20

Отже, допустима множина, що визначається обмеженням $g_1' \le 30$, буде складатися із наступних точок: $x^{10} = (4,1,3)$, $x^{11} = (3,4,1)$, $x^{12} = (4,3,1)$, $x^{16} = (4,1,2)$, $x^{17} = (2,4,1)$, $x^{18} = (4,2,1)$, $x^{20} = (2,1,3)$, $x^{21} = (1,3,2)$, $x^{22} = (3,1,2)$, $x^{23} = (2,3,1)$, $x^{24} = (3,2,1)$.

Користуючись перестановкою нормалізації $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ знаходимо базову множину A_1: $(3,1,4)$, $(1,4,3)$, $(1,3,4)$, $(2,1,4)$, $(1,4,2)$, $(1,2,4)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$, $(2,1,3)$, $(1,3,2)$, $(1,2,3)$.

Розглянемо обмежуючу функцію g_2. Перестановка нормалізації буде рівна $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, тоді $g_2' = 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 \ge 40$. Аналогічно попереднього обмеження, загальна структурна схема графа G розбивається на структурні схеми підграфів G_1, G_2, G_3, G_4 і знаходиться значення функції у крайніх точках підграфів, які визначають мінімальне та максимальне значення на підграфах.

Необхідно враховувати, що елементи множини розміщень мають задовольняти умову $g_2' = 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 \ge 40.$ Розглядаємо множини вершин підграфів G_1, G_2, G_3, G_4 (рис. 2).

Вершини підграфа G_1 повністю задовольняють умову $g_2' = 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 \geq 40$. Підграфи G_2, G_3, G_4, необхідно розглянути детально, аналогічно попереднього обмеження, оскільки вони мають вершини, які можуть як задовольняти умови, так і порушувати (табл. 4).

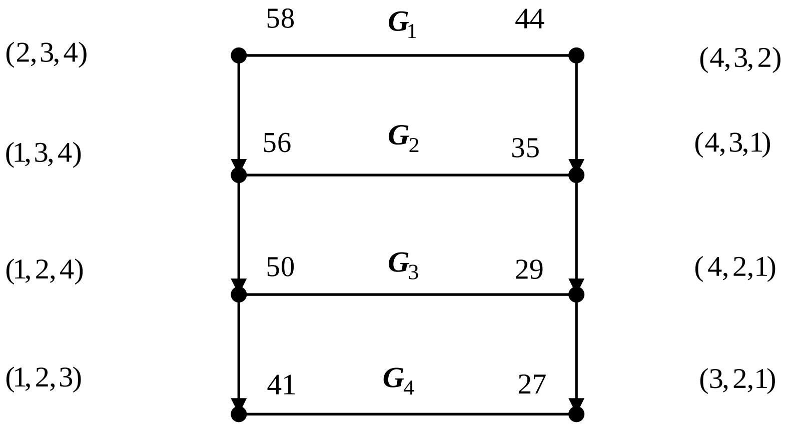

РИС. 2. Загальна структурна схема графа для g_2'

ТАБЛИЦЯ 4

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_1'
7	1	3	4	56
8	3	1	4	48
9	1	4	3	53
10	4	1	3	41
11	3	4	1	39
12	4	3	1	35

Як видно з табл. 1, умову $g_2' \geq 40$ будуть задовольняти наступні вершини підграфа G_2: 7, 8, 9, 10.

Таблиця для вершин підграфа G_3 (табл. 5).

ТАБЛИЦЯ 5

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_1'
13	1	2	4	50
14	2	1	4	46
15	1	4	2	44
16	4	1	2	32

17	2	4	1	37
18	4	2	1	29

Аналізуючи табл. 5, обмеження будуть задовольняти вершини: 13, 14, 15.

Одна вершина 19 підграфа G_4 задовольняє умову $g_2' \geq 40$ (табл. 6).

ТАБЛИЦЯ 6

№ вершини	x_1	x_2	x_3	g_1'
19	1	2	3	41
20	2	1	3	37
21	1	3	2	38
22	3	1	2	30
23	2	3	1	31
24	3	2	1	27

Отже, допустима множина, що визначається обмеженням $g_2' = 2x_1 + 6x_2 + +9x_3 \geq 40$, буде складатися із наступних точок: $x^1 = (2,3,4)$, $x^2 = (3,2,4)$, $x^3 = (2,4,3)$, $x^4 = (4,2,3)$, $x^5 = (3,4,2)$, $x^6 = (4,3,2)$, $x^7 = (1,3,4)$, $x^8 = (3,1,4)$, $x^9 = (1,4,3)$, $x^{10} = (4,1,3)$, $x^{13} = (1,2,4)$, $x^{14} = (2,1,4)$, $x^{15} = (1,4,2)$, $x^{19} = (1,2,3)$.

Користуючись перестановкою нормалізації $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ знаходимо базову множину A_2: $(3,2,4)$, $(2,3,4)$, $(4,2,3)$, $(2,4,3)$, $(4,3,2)$, $(3,4,2)$, $(3,1,4)$, $(1,3,4)$, $(4,1,3)$, $(1,4,3)$, $(2,1,4)$, $(1,2,4)$, $(4,1,2)$, $(2,1,3)$.

Оскільки за умовою задачі допустимий розв'язок має задовольняти одночасно дві умови: $g_1' = x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 30$, $g_2' = 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 \geq 40$, то необхідно знайти загальну множину допустимих розв'язків, яка є перерізом допустимої множини першого та другого обмежень: $A^* = A(g_1') \bigcap A(g_2') = \{(3,1,4);(1,4,3);(1,3,4);(2,1,4);(2,1,3);(1,2,4)\}$. Впорядкуємо елементи множини A^* в лексикографічному порядку: $A^* = \{(1,3,4);(1,4,3);(3,1,4);(2,1,4);(1,2,4);(2,1,3)\}$. Точка $(1,3,4)$ має найвищий порядок, тому цільова функція в цій точці набуває максимального значення, $f(x) = 50$.

Висновок. На обчислювальному прикладі розглянуто задачу локалізації функції на комбінаторній множині розміщень. Описано алгоритм знаходження розв’язків задачі з лінійною функцією цілі, з урахуванням додаткових обмежень на комбінаторній конфігурації розміщень.

Напрям подальшого дослідження буде полягати у виявленні структурних властивостей інших комбінаторних конфігурацій та подальшої їх адаптації на графах з метою знаходження нових алгоритмів та методів розв’язання складних задач комбінаторної оптимізації.

А.Н. Нагорная

ЗАДАЧА ЛОКАЛИЗАЦИИ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ РАЗМЕЩЕНИЙ

Представление многогранника соответственной комбинаторной структуры в виде графа дает возможность использовать его структурные свойства для решения определенного класса оптимизационных комбинаторных задач.

A.N. Nagornaja

PROBLEM OF LOCALIZATION OF FUNCTION ON THE SET PLACEMENTS

Representation of a polyhedron of corresponding combinatory structure in the form of the count gives the chance to use its structural properties for the solution of a certain class of optimizing combinatory tasks.

1. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
2. *Донец Г.А. Колечкина Л.Н.* Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 1. – С. 10 – 16.
3. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах // Управляющие системы и машины. – 2009. − № 4. – С. 36 − 42.
4. *Донец Г.А., Колечкина Л.Н.* Алгоритм поиска значений линейной функции на лексикографически упорядоченных перестановках // Теорія оптимальних рішень. – 2009. – № 8. – С. 3 − 8.

Одержано 27.03.2014