УДК 539.3

МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК И ОСОБЕННОСТИ ИХ ПРОЧНОСТНЫХ-ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

С.О. Саркисян, Ш.И. Алваджян

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна, Гюмри, Армения

E-mail: slusin@yahoo.com, alvajyanshushan@mail.ru; тел. (374)91-60-57-15

При помощи метода гипотез двумерная краевая задача микрополярной теории упругости для анизотропной среды в области тонкого прямоугольника сводится к прикладной одномерной задаче. В зависимости от значений безразмерных физических параметров построены общие модели микрополярных анизотропных упругих тонких балок со свободным и стесненным вращениями, с «малой сдвиговой жесткостью», при которых полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Построены также соответствующие вариационные уравнения модели микрополярных анизотропных балок. На основе построенных моделей микрополярных анизотропных упругих тонких балок рассматривается конкретная задача об определении напряженно-деформированного состояния балки с шарнирно-опертыми граничными условиями. Получены окончательные численные результаты. На основе их анализа выявляются эффективные прочностные и жесткостные свойства микрополярного анизотропного материала балки.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время микрополярная (несимметричная, моментная) теория упругости трактуется как математическая модель упругих тел с внутренней структурой [1-3]. С этой точки зрения весьма актуально построение моделей для микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек. В работах [4-6] на основе метода гипотез, имеющего асимптотическое обоснование, построены общие теории микрополярных упругих изотропных тонких балок, пластин и оболочек.

В работе [7] изучено математическое поведение решения плоской задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала в тонкой прямоугольной области.

В данной работе развивается подход работ [4-6]: на основе асимптотических свойств решения плоской задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала [7] сформулированы гипотезы, и в зависимости от значений физических безразмерных параметров построены модели микрополярных упругих ортотропных тонких балок со свободным и стесненным вращениями, с «малой сдвиговой жесткостью».

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ортотропный микрополярноупругий параллелепипед с постоянной высотой $2h$, длиной a и постоянной толщиной, равной $2h_1 = 1$. Координатную плоскость x_1x_2 разместим в срединной плоскости параллелепипеда. Ось x_2 направлена по высоте, а ось x_1 – по длине параллелепипеда и делит высоту $2h$ пополам. Считаем, что в параллелепипеде по направлению оси x_3 наблюдается плоское напряженное состояние.

Основные уравнения плоской задачи микрополярной теории упругости для анизотропного (ортотропного) материала с независимыми полями перемещений и вращений имеют следующий вид [8].

Уравнения равновесия –

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}=0;\quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0;\quad \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0. \tag{1.1}$$

Физико-геометрические соотношения –

$$\gamma_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{11}-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{22};$$
$$\gamma_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{11}+\frac{A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{22};$$
$$\gamma_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3=\frac{A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{12}-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{21}; \tag{1.2}$$
$$\gamma_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3=-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{12}+\frac{A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{21};$$
$$\chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}=\frac{1}{B_{66}}\mu_{13},\ \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}=\frac{1}{B_{44}}\mu_{23}.$$

Здесь σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22} – силовые напряжения; μ_{13}, μ_{23} – моментные напряжения; $\gamma_{11},\gamma_{22},\gamma_{12},\gamma_{21}$ – деформации; χ_{13},χ_{23} – изгиб-кручение; u_1,u_2 - линейные перемещения; ω_3 – независимый поворот точек прямоугольника $(0\le x_1\le a,\ -h\le x_2\le h)$ вокруг оси x_3, величины A с соответствующими индексами, представляют собой упругие константы микрополярно-ортотропного материала.

На лицевых линиях прямоугольника $x_2=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия (задача изгиба):

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ. 2011. №4.
Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение (98), с. 196-204.

$$\sigma_{21}=\frac{1}{2}\left(X^{+}-X^{-}\right);$$
$$\sigma_{22}=\pm\frac{1}{2}\left(Y^{+}+Y^{-}\right); \qquad (1.3)$$
$$\mu_{23}=\pm\frac{1}{2}\left(M^{+}+M^{-}\right).$$

На кромках $(x_1=0,\ x_1=a)$ прямоугольника примем нижеследующие варианты граничных условий плоских задач микрополярной теории упругости:

$$\sigma_{11}=\varphi_1(x_2),\sigma_{12}=\varphi_2(x_2),\mu_{13}=\varphi_3(x_2) \text{ (задача 1);} \quad (1.4)$$

$$\sigma_{11}=\varphi_1(x_2),\mathrm{u}_2=0,\mu_{13}=\varphi_3(x_2) \quad \text{(задача 2);} \quad (1.5)$$

$$u_1=0,\quad u_2=0,\quad \omega_3=0 \quad \text{(задача 3).} \quad (1.6)$$

Иногда более удобно вместо формул для γ_{12} и γ_{21} из (1.2) рассматривать их сумму и разность, т.е.

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=\frac{A_{88}-A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{12}+\frac{A_{77}-A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{21}; \quad (1.7)$$

$$\omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)-\frac{A_{88}+A_{78}}{2\left(A_{77}A_{88}-A_{78}^2\right)}\sigma_{12}+ \\ +\frac{A_{77}+A_{78}}{2\left(A_{77}A_{88}-A_{78}^2\right)}\sigma_{21}. \quad (1.8)$$

Функционал вариационного принципа (принцип Рейсснера) для краевых задач (1.1)–(1.4) микрополярной теории упругости ортотропного тела имеет вид:

$$I=\iint\limits_{(s)}\left(W(\gamma_{ij},\chi_{i3})-\sigma_{11}\left(\gamma_{11}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)-\right.$$
$$-\sigma_{22}\left(\gamma_{22}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)-\sigma_{12}\left(\gamma_{12}-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3\right)\right)-$$
$$-\sigma_{21}\left(\gamma_{21}-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3\right)\right)-\mu_{13}\left(\chi_{13}-\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}\right)-$$
$$\left.-\mu_{23}\left(\chi_{23}-\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}\right)\right)ds-\int\limits_0^a\left(\frac{1}{2}(X^{+}-X^{-})u_1+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(Y^{+}+Y^{-})u_2+\frac{1}{2}(M^{+}+M^{-})\omega_3\right)\Bigg|_{x_2=+h}dx_1- \quad (1.9)$$
$$-\int\limits_0^a\left(-\frac{1}{2}(X^{+}-X^{-})u_1+\frac{1}{2}(Y^{+}+Y^{-})u_2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(M^{+}+M^{-})\omega_3\right)\Bigg|_{x_2=-h}dx_1+$$
$$+\int\limits_{-h}^{+h}\left(\varphi_1 u_1+\varphi_2 u_2+\varphi_3\omega_3\right)\Big|_{x_1=0}dx_2-$$
$$-\int\limits_{-h}^{+h}\left(\varphi_1 u_1+\varphi_2 u_2+\varphi_3\omega_3\right)\Big|_{x_1=a}dx_2,$$

где

$$W\left(\varepsilon_{ij},\chi_{i3}\right)=\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{2A_{22}}\gamma_{11}^2+\frac{A_{77}}{2}\gamma_{12}^2+ \\ +A_{78}\gamma_{12}\gamma_{21}+\frac{A_{88}}{2}\gamma_{21}^2+\frac{B_{66}}{2}\chi_{13}^2+\frac{B_{44}}{2}\chi_{23}^2 \quad (1.10)$$

представляет собой плотность потенциальной энергии деформации.

Предполагается, что высота прямоугольника мала по сравнению с его длиной $(2h<<a)$. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкого прямоугольника состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю область прямоугольника, и пограничных слоев, локализирующихся вблизи торцов прямоугольника: $x_1=0$ и $x_1=a$. Построение прикладной одномерной модели микрополярных балок тесно связано с построением внутренней задачи.

Считая, что метод гипотез наряду с чрезвычайной наглядностью очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, построим модель микрополярных ортотропных балок на его основе. Сами гипотезы будем формулировать с учетом результатов асимптотического анализа краевых задач (1.1)–(1.6) в тонкой прямоугольной области [7].

2. МОДЕЛЬ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

Рассмотрим случай, когда следующие безразмерные физические параметры балки имеют значения [7]:

$$\frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,$$
$$\frac{A_{88}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1, \quad (2.1)$$
$$\frac{A_{77}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\ \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\sim 1,\frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\sim 1.$$

Как показывает асимптотический анализ краевых задач (1.1)-(1.6) в тонкой прямоугольной области [7], при выполнении условий (2.1) в асимптотических приближениях наблюдается свободное вращение (т.е. поворот ω_3 не зависит от компонент вектора перемещений u_1,u_2).

Результаты этого приближения позволяют распространить подход работы [6] при построении модели микрополярной изотропной балки на случай микрополярной анизотропии и в основу положить следующие достаточно общие предположения (гипотезы).

а). Нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси симметрии прямоугольника x_1, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной оси, свободно поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений u_1, u_2 и свободного поворота ω_3 по толщине прямоугольника:

$$u_2 = w(x_1), \quad u_1 = x_2\psi(x_1), \quad \omega_3 = \Omega_3(x_1), \tag{2.2}$$

где w – прогиб балки; Ω_3 – угол свободного поворота, а ψ – полный угол поворота нормального элемента.

В смысле перемещений данная гипотеза представляет собой известную классическую гипотезу Тимошенко для упругих балок, поэтому (2.2) назовем, как в работах [4-6], обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко для микрополярных балок.

Кинематическая гипотеза (2.2) дополняется следующими статическими гипотезами.

б). При определении деформаций, изгиба-кручения, силовых и моментных напряжений для силового напряжения σ_{21} сначала примем

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(x_1). \tag{2.3}$$

После этого σ_{21} определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования первого уравнения равновесия из (1.1), для которого необходимо условие – усредненная по высоте прямоугольника величина должна быть равна нулю.

в). Силовым напряжением σ_{22} в (1.2) будем пренебрегать относительно σ_{11}.

Отметим, что гипотеза (б) отличается от соответствующей гипотезы Тимошенко в классическом случае. Построенная ниже на основе гипотез (а), (б) и (в) теория микрополярных упругих тонких балок, как и в работах [4-6], будет асимптотически точной.

В соответствии с принятыми законами распределения перемещений и поворота (2.2), а также с предположением (б) для деформаций, изгиба-кручения, силовых и моментных напряжений из (1.1)-(1.6) получим следующие формулы:

$$\begin{gathered}\gamma_{21} = \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad \gamma_{12} = \Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \\ \gamma_{11} = x_2 K_{11}, \chi_{13} = \kappa_{13}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \chi_{23} = 0, \\ K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1};\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = x_2 \overset{1}{\sigma}_{11}(x_1), \sigma_{12} = A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}, \\ \sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(x_1) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_2^2}{2}\right)\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}(x_1)}{dx_1}, \\ \overset{1}{\sigma}_{11} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, \sigma_{22} = x_2\frac{Y^+ + Y^-}{2h}, \\ \mu_{23} = x_3\frac{M^+ + M^-}{2h}, \mu_{13} = B_{66}\kappa_{13}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Для приведения двумерной задачи (1.1)-(1.6) к прикладной одномерной, что уже выполнено для деформаций, изгиба-кручения, перемещений, поворота, силовых и моментных напряжений ((2.2), (2.4), (2.5)), в теории микрополярных ортотропных балок вместо компонент тензоров силового и моментного напряжений введем статически эквивалентные им интегральные по высоте прямоугольника характеристики – усилия (N_{12}, N_{21}) и моменты (M_{11}, L_{13}):

$$\begin{gathered}N_{12} = \int_{-h}^{h}\sigma_{12}dx_2, N_{21} = \int_{-h}^{h}\sigma_{21}dx_2, \\ M_{11} = \int_{-h}^{h}x_2\sigma_{11}dx_2, L_{13} = \int_{-h}^{h}\mu_{13}dx_2.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Тогда основная система уравнений изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений принимает вид:

Уравнения равновесия –

$$\begin{gathered}\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), \\ N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h(X^+ - X^-), \\ \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Соотношения упругости –

$$\begin{gathered}N_{12} = 2h\left[A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}\right], \\ N_{21} = 2h\left[A_{78}\Gamma_{12} + A_{88}\Gamma_{21}\right], \\ M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}K_{11}, \\ L_{13} = 2B_{66}h\kappa_{13}.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Геометрические соотношения –

$$\begin{gathered}\Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \\ \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \\ K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \\ \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Соотношения (2.7)-(2.9) представляют собой систему из 11-ти уравнений относительно 11-ти неизвестных функций:

$$w, \psi, \Omega_3, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}, K_{11}, \kappa_{13}, N_{12}, N_{21}, M_{11}, L_{13}.$$

«Смягченные» граничные условия на торцах балки ($x_1 = 0$, $x_1 = a$) имеют вид:

$$\begin{gathered}M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \psi = \psi^*, \ N_{12} = N_{12}^* \text{ или } w = w^*, \\ L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \Omega_3 = \Omega_3^*.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Отметим, что в модели (2.7)-(2.10) микрополярной ортотропной упругой тонкой балки полностью учтены поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

При равенстве упругих констант $A_{77} = A_{88} = A_{78}$ из (2.7)-(2.10) следует модель классической ортотропной упругой балки типа Тимошенко [9].

При

$$\begin{gathered}A_{77} = A_{88} = \mu + \alpha, \quad A_{78} = \mu - \alpha, \\ B_{66} = B_{44} = B, \quad \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = E\end{gathered}$$

из (2.7)–(2.10) получим модель изгибной деформации микрополярной изотропной балки [6]. Систему уравнений (2.7)–(2.9) микрополярной балки легко привести к системе уравнений относительно w, ψ и Ω_3:

$$
\begin{aligned}
&A_{78}\frac{d\psi}{dx_1}+A_{77}\frac{d^2w}{dx_1^2}+(A_{78}-A_{77})\frac{d\Omega_3}{dx_1}=-\frac{Y^+ +Y^-}{2h},\\
&A_{88}\psi+A_{78}\frac{dw}{dx_1}+(A_{88}-A_{78})\Omega_2-\\
&-\frac{h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}\frac{d^2\psi}{dx_1^2}=\frac{X^+ -X^-}{2},\\
&B_{66}\frac{d^2\Omega_3}{dx_1^2}-(A_{77}+A_{88}-2A_{78})\Omega_3+(A_{77}-A_{78})\frac{dw}{dx_1}+\\
&+(A_{78}-A_{88})\psi=-\frac{M^+ +M^-}{2h}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Функционал вариационного принципа прикладной одномерной теории микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением, который получается на основе (1.9) и (1.10) с использованием значений перемещений и поворота, деформаций, изгиба-кручения, силовых и моментных напряжений (2.2), (2.4)–(2.6) для ортотропного материала будет выражаться так:

$$
\begin{aligned}
I=&\int_0^a\left(W-M_{11}\left(K_{11}-\frac{d\psi}{dx_1}\right)-N_{12}\left[\Gamma_{12}-\left(\frac{dw}{dx_1}-\Omega_3\right)\right]-\right.\\
&\left.-N_{21}\left[\Gamma_{21}-(\psi+\Omega_3)\right]-L_{13}\left(k_{13}-\frac{d\Omega_3}{dx_1}\right)\right)dx_1-\\
&-\int_0^a\Big((X^+-X^-)h\psi+(Y^+ +Y^-)w+\\
&+(M^+ +M^-)\Omega_3\Big)dx_1+\int_{-h}^{+h}\left(\varphi_1x_2\psi+\varphi_2w+\varphi_3\Omega_3\right)\Big|_{x_1=0}dx_2-\\
&-\int_{-h}^{+h}\left(\varphi_1x_2\psi+\varphi_2w+\varphi_3\Omega_3\right)\Big|_{x_1=a}dx_2,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

где

$$
\begin{aligned}
W=&\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}\frac{h^3}{3}K_{11}^2+A_{77}h\Gamma_{12}^2+\\
&+2A_{78}h\Gamma_{12}\Gamma_{21}+A_{88}h\Gamma_{21}^2+B_{66}hk_{13}^2
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

– плотность потенциальной энергии деформации.

3. МОДЕЛЬ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Рассмотрим случай [7], когда безразмерные физические параметры имеют следующие значения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\ \frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\\
&\frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\ \frac{(A_{88}-A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\\
&\frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\sim 1,\qquad \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\sim 1,\\
&\frac{(A_{77}-A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\ \frac{(A_{88}+A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}<<1,\\
&\frac{(A_{77}+A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}<<1.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Основная особенность (3.1) заключается в том, что согласно асимптотическому анализу [7] краевых задач (1.1)-(1.8) поворот ω_3 в асимптотических приближениях выражается через компоненты вектора перемещений u_1 и u_2 формулой, идентичной соответствующей формуле плоской задачи классической теории упругости:

$$
2\omega_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}.
\tag{3.2}
$$

Это означает, что изучаемый вопрос находится в области микрополярной упругости со стесненным вращением или иначе – псевдоконтинуума Коссера.

Как видно из (1.8), модель стесненного вращения будет иметь место, когда $\frac{A_{88}+A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}$ и $\frac{A_{77}+A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}$ стремятся к нулю.

Имея в виду качественные стороны асимптотического решения граничных задач (1.1)-(1.8), в случае (3.1) [7], в основу построения прикладной одномерной модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стесненным вращением, как и в [6], положим предположения (а), (б), (в) и условие стесненного вращения (3.2).

Согласно указанным предположениям для перемещений, поворота, деформаций, изгиба-кручения, силовых и моментных напряжений имеем:

$$
\begin{aligned}
&u_2=w(x_1),\ u_1=x_2\psi(x_1),\\
&\Omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{dw(x_1)}{dx_1}-\psi(x_1)\right),\\
&\gamma_{12}+\gamma_{21}=\Gamma_{12}+\Gamma_{21}=\frac{dw}{dx_1}+\psi,\\
&\gamma_{11}=x_2K_{11},\quad K_{11}=\frac{d\psi}{dx_1},\\
&\chi_{13}=\kappa_{13},\quad \kappa_{13}=\frac{d\Omega_3}{dx_1},\\
&\gamma_{22}=0,\quad \chi_{23}=0;
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}=x_2\overset{1}{\sigma}_{11}(x_1),\overset{1}{\sigma}_{11}=\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}K_{11},\\
&\sigma_{12}+\overset{0}{\sigma}_{21}=\frac{A_{77}+A_{88}+2A_{78}}{2}(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}),\\
&\sigma_{22}=x_2\frac{Y^+ +Y^-}{2h},\\
&\sigma_{21}=\overset{0}{\sigma}_{21}(x_1)+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{x_2^2}{2}\right)\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}(x_1)}{dx_1},\\
&\mu_{13}=B_{66}\kappa_{13},\mu_{23}=x_2\frac{M^+ +M^-}{2h}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Основная система уравнений прикладной одномерной теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стесненным вращением, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации, выражается следующим образом:

Уравнения равновесия –

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-),$$

$$N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h(X^+ - X^-), \qquad (3.5)$$

$$\frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-).$$

Физические соотношения –

$$N_{12} + N_{21} = h(A_{77} + A_{88} + 2A_{78})(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}),$$

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}K_{11}, \qquad (3.6)$$

$$L_{13} = 2hB_{66}\kappa_{13}.$$

Геометрические соотношения –

$$\Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1},$$

$$\kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \Omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx_1} - \psi\right). \qquad (3.7)$$

К (3.5)-(3.7) необходимо присоединить граничные условия (2.10) (при $x_1 = 0$, $x_1 = a$).

Эту систему легко привести к системе уравнений относительно w и ψ:

$$(A_{77} + A_{88} + 2A_{78})\left(\frac{d\psi}{dx_1} + \frac{d^2w}{dx_1^2}\right) - B_{66}\left(\frac{d^4w}{dx_1^4} - \frac{d^3\psi}{dx_1^3}\right) =$$

$$= -\frac{2}{h}(Y^+ + Y^-) + \frac{1}{h}\frac{d(M^+ + M^-)}{dx_1},$$

$$(A_{77} + A_{88} + 2A_{78})\left(\psi_1 + \frac{dw}{dx_1}\right) + B_{66}\left(\frac{d^3w}{dx_1^3} - \frac{d^2\psi}{dx_1^2}\right) - \qquad (3.8)$$

$$-\frac{4h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{d^2\psi}{dx_1^2} =$$

$$= 2(X^+ - X^-) - \frac{1}{h}(M^+ + M^-).$$

Функционал вариационного принципа для прикладной одномерной теории микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением для ортотропного материала будет выражаться так:

$$I = \int_0^a \left(W - M_{11}\left(K_{11} - \frac{d\psi}{dx_1}\right) - \frac{N_{12} + N_{21}}{2}\left[(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) - \right.\right.$$

$$\left. - \left(\frac{dw}{dx_1} + \psi\right)\right] - \frac{N_{12} - N_{21}}{2}\left[2\Omega_3 - \left(\frac{dw}{dx_1} - \psi\right)\right] -$$

$$\left. - L_{13}\left(k_{13} - \frac{d\Omega_3}{dx_1}\right)\right)dx_1 - \int_0^a \left((X^+ - X^-)h\psi + \right. \qquad (3.9)$$

$$\left. + (Y^+ + Y^-)w + (M^+ + M^-)\Omega_3\right)dx_1 +$$

$$+ \int_{-h}^{+h} \left(\phi_1 x_2 \psi + \phi_2 w + \phi_3 \Omega_3\right)\Big|_{x_1=0} dx_2 -$$

$$- \int_{-h}^{+h} \left(\phi_1 x_2 \psi + \phi_2 w + \phi_3 \Omega_3\right)\Big|_{x_1=a} dx_2,$$

где

$$W = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{h^3}{3}K_{11}^2 +$$

$$+ \frac{A_{77} + A_{88} + 2A_{78}}{4}h(\Gamma_{12} + \Gamma_{21})^2 + B_{66}hk_{13}^2 \qquad (3.10)$$

– плотность потенциальной энергии деформации.

4. МОДЕЛЬ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК С «МАЛОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ»

Рассмотрим случай [7], когда

$$\frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \; \frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1,$$

$$\frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \; \frac{(A_{88} - A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1,$$

$$\frac{(A_{77} - A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \; \frac{(A_{77} + A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \qquad (4.1)$$

$$\frac{(A_{88} + A_{78})A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \; \frac{a^2(A_{77} - A_{78})}{B_{66}} << 1,$$

$$\frac{a^2(A_{88} - A_{78})}{B_{66}} << 1, \; B_{66} \sim B_{44}.$$

Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования краевых задач (1.1)-(1.8) в тонкой прямоугольной области [7] для (4.1) позволяют в основу соответствующей прикладной одномерной теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок положить следующие предположения (гипотезы) [6] (а), (б), (в), а в третьем уравнении равновесия (1.1) пренебрегать разностью силовых напряжений $(\sigma_{12} - \sigma_{21})$.

Главная особенность рассматриваемого случая состоит в том, что моментная часть задачи (с уравнениями и граничными условиями) отделяется как самостоятельная граничная задача. Согласно условию (4.1) и следуя работе [6], ниже построенную модель будем называть моделью микрополярных ортотропных упругих тонких балок с «малой сдвиговой жесткостью».

Основная разрешающая система уравнений и граничные условия модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок с «малой сдвиговой жесткостью», с полным учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций, будет выражаться следующим образом.

“Моментная” часть задачи –

$$\frac{dL_{13}}{dx_1} = -(M^+ + M^-),$$

$$L_{13} = 2hB_{66}\kappa_{13}, \qquad (4.2)$$

$$\kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}.$$

Граничные условия (при $x_1 = 0$, $x_1 = a$):

$$L_{13} = L_{13}^* \quad \text{или} \quad \Omega_3 = \Omega_3^* \qquad (4.3)$$

"Силовая" часть задачи –

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-),$$

$$N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h(X^+ - X^-).$$

$$N_{12} = 2h\left[A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}\right],$$
$$N_{21} = 2h\left[A_{88}\Gamma_{21} + A_{78}\Gamma_{12}\right], \qquad (4.4)$$
$$M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}K_{11},$$
$$\Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3,$$
$$\Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad .$$
$$K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}.$$

Граничные условия (при $x_1 = 0$, $x_1 = a$):

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \psi = \psi^*, \quad N_{12} = N_{12}^* \text{ или } w = w^*. \qquad (4.5)$$

Систему уравнений микрополярной ортотропной балки (4.4) с учетом поперечного сдвига легко привести к системе уравнений относительно функций w и ψ:

$$A_{77}\frac{d^2w}{dx_1^2} + A_{78}\frac{d\psi}{dx_1} - \left(A_{77} - A_{78}\right)\frac{d\Omega_3}{dx_1} = -\frac{Y^+ + Y^-}{2h},$$
$$A_{88}\psi + A_{78}\frac{dw}{dx_1} + \left(A_{88} - A_{78}\right)\Omega_3 - \qquad (4.6)$$
$$-\frac{h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{d^2\psi}{dx_1^2} = \frac{X^+ - X^-}{2}.$$

Функционал вариационного принципа для прикладной одномерной теории микрополярных упругих тонких балок с «малой сдвиговой жесткостью» для ортотропного материала будет выражаться так:

для «моментной» части задачи –

$$I^M = \int_0^a \left(W^M - L_{13}\left(k_{13} - \frac{d\Omega_3}{dx_1}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(M^+ + M^-\right)\Omega_3\right)dx_1 + \qquad (4.7)$$
$$+ \int_{-h}^{+h}\varphi_3\Omega_3\Big|_{x_1=0}dx_2 - \int_{-h}^{+h}\varphi_3\Omega_3\Big|_{x_1=a}dx_2,$$

$$W^M = B_{66}hk_{13}^2; \qquad (4.8)$$

для «силовой» части задачи –

$$I^c = \int_0^a \left(W^c - M_{11}\left(K_{11} - \frac{d\psi}{dx_1}\right) - \right.$$
$$-N_{12}\left[\Gamma_{12} - \left(\frac{dw}{dx_1} - \Omega_3\right)\right] - \qquad (4.9)$$
$$-N_{21}\left[\Gamma_{21} - (\psi + \Omega_3)\right] - (X^+ - X^-)h\psi -$$
$$\left. -(Y^+ + Y^-)w\right)dx_1 + \int_{-h}^{+h}\left(\phi_1 x_2\psi + \phi_2 w\right)\Big|_{x_1=0}dx_2 -$$
$$-\int_{-h}^{+h}\left(\phi_1 x_2\psi + \phi_2 w\right)\Big|_{x_1=a}dx_2;$$

$$W^c = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{h^3}{3}K_{11}^2 + A_{77}h\Gamma_{12}^2 + \qquad (4.10)$$
$$+ 2A_{78}h\Gamma_{12}\Gamma_{21} + A_{88}h\Gamma_{21}^2.$$

5. ИЗГИБ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ БАЛКИ ПОД РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

На основе моделей микрополярных ортотропных упругих тонких балок со свободным вращением рассмотрим простейшую задачу об изгибе шарнирно-опертой микрополярной упругой балки под равномерно распределенной силовой нагрузкой с интенсивностью $q = q_0 \sin\frac{\pi x_1}{a}$.

Уравнения (2.7)–(2.9) микрополярной ортотропной балки со свободным вращением, выраженные через функции w, ψ и Ω_3 (2.11), в данном случае принимают вид:

$$A_{78}\frac{d\psi}{dx_1} + A_{77}\frac{d^2w}{dx_1^2} + \left(A_{78} - A_{77}\right)\frac{d\Omega_3}{dx_1} = -\frac{q}{h},$$
$$A_{88}\psi + A_{78}\frac{dw}{dx_1} + \left(A_{88} - A_{78}\right)\Omega_3 -$$
$$-\frac{h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{d^2\psi}{dx_1^2} = 0, \qquad (5.1)$$
$$B_{66}\frac{d^2\Omega_3}{dx_1^2} + \left(A_{78} - A_{88}\right)\psi + \left(A_{77} - A_{78}\right)\frac{dw}{dx_1} -$$
$$-\left(A_{77} + A_{88} - 2A_{78}\right)\Omega_3 = 0.$$

Для граничных условий шарнирного опирания из (2.10) имеем:

$$w(x_1) = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0 \text{ при } x_1 = 0; a. \qquad (5.2)$$

Представим решение граничной задачи (5.1), (5.2) в виде:

$$w(x_1) = w_0 \sin\frac{\pi x_1}{a},$$
$$\psi(x_1) = \psi_0 \cos\frac{\pi x_1}{a}, \qquad (5.3)$$
$$\Omega_3(x_1) = \Omega_3^{(0)} \cos\frac{\pi x_1}{a},$$

где $w_0, \psi_0, \Omega_3^{(0)}$ – постоянные. Подставим решение (5.3) в систему (5.1) и в результате получим алгебраические уравнения относительно $w_0, \psi_0, \Omega_3^{(0)}$:

$$A_{77}\frac{\pi^2}{a^2}w_0 + A_{78}\frac{\pi}{a}\psi_0 + \left(A_{78} - A_{77}\right)\frac{\pi}{a}\Omega_3^{(0)} = \frac{q_0}{h},$$
$$A_{78}\frac{\pi}{a}w_0 + \left(A_{88} + \frac{h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{\pi^2}{a^2}\right)\psi_0 +$$
$$+\left(A_{88} - A_{78}\right)\Omega_3^{(0)} = 0, \qquad (5.4)$$
$$\left(A_{77} - A_{78}\right)\frac{\pi}{a}w_0 + \left(A_{78} - A_{88}\right)\psi_0 -$$
$$-\left(B_{66}\frac{\pi^2}{a^2} + A_{77} + A_{88} - 2A_{78}\right)\Omega_3^{(0)} = 0.$$

После решения (5.4) найдем максимальные значения прогиба w и силового напряжение σ_{11} :

$$w_{\max} = w\left(x_1 = \frac{a}{2}\right) = w_0 = \frac{q_0}{h}\left(A_{77}A_{88} - A_{78}^2 + B_{66}A_{88}\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{\pi^2}{a^2}\left(B_{66}\frac{\pi^2}{a^2} + A_{77} + A_{88} + 2A_{78}\right)\right)\frac{1}{P},$$

$$\sigma_{11\max} = \sigma_{11}\left(x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = h\right) = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{\pi^2}{a^2}q_0\left(B_{66}A_{78}\frac{\pi^2}{a^2} + A_{77}A_{88} - A_{78}^2\right)\frac{1}{P},$$

где

$$P = \frac{h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{\pi^4}{a^4}\left(A_{77}A_{88} - A_{78}^2 + B_{66}A_{77}\frac{\pi^2}{a^2}\right) + B_{66}\left(A_{77}A_{88} - A_{78}^2\right)\frac{\pi^4}{a^4}.$$

Ниже в таблицах приведены прочностные и жесткостные характеристики микрополярной ортотропной балки с независимыми полями перемещений и вращений.

Таблица 1

Физические параметры материала балки: $A_{77} = 0.6$ МПа, $B_{66} = 300\ H$, $\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5.2$ МПа, интенсивность нагрузки q_0=50 Па							
	№	Размеры балки		Микрополярная ортотропная теория балок с независимыми полями перемещений и вращений (обобщенные гипотезы Тимошенко): $A_{88} = 0.8$ МПа, $A_{78} = 0.4$ МПа		Классическая ортотропная теория балок типа Тимошенко: $A_{77} = A_{88} = A_{78} = A = 0.6$МПа	
		a, м	*h,* м	$\sigma_{11}^{\max\, мик.}$, кПа	$w_{\max}^{мик.}$, 10^{-4} м	$\sigma_{11}^{\max\, клас.}$, кПа	$w_{\max}^{клас.}$, 10^{-4} м
δ= h/a=1/40	1	0,008	0,0002	0,324	0,041	24,317	1,543
	2	0,02	0,0005	0,353	0,106	24,317	3,858
	3	0,05	0,00125	0,529	0,334	24,317	9,645
	4	0,08	0,002	0,850	0,736	24,317	15,430
	5	0,1	0,0025	1,139	1,150	24,317	19,290
	6	0,2	0,005	3,295	5,678	24,317	38,580
δ= h/a=1/100	1	0,008	0,00008	0,330	0,102	151,982	23,760
	2	0,02	0,0002	0,359	0,267	151,982	59,396
	3	0,05	0,0005	0,542	0,845	151,982	148,490
	4	0,08	0,0008	0,881	1,881	151,982	237,600
	5	0,1	0,001	1,192	2,959	151,982	297
	6	0,2	0,002	3,739	15,850	151,982	594

Таблица 2

Физические параметры материала балки: $A_{77} = 1.6$ МПа, $B_{66} = 300H$, $\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 7.2$ МПа, интенсивность нагрузки q_0=50 Па							
	№	Размеры балки		Микрополярная ортотропная теория балок с независимыми полями перемещений и вращений (обобщенные гипотезы Тимошенко): $A_{88} = 1{,}8$ МПа, $A_{78} = 0{,}4$ МПа		Классическая ортотропная теория балок типа Тимошенко: $A_{77} = A_{88} = A_{78} = = A = 1{,}6$ МПа	
		a, м	*h,* м	$\sigma_{11}^{\max\, мик.}$, кПа	$w_{\max}^{мик.}$, 10^{-4} м	$\sigma_{11}^{\max\, клас.}$, кПа	$w_{\max}^{клас.}$, 10^{-4} м
δ= h/a=1/40	1	0,008	0,0002	0,060	0,011	24,317	1,105
	2	0,02	0,0005	0,101	0,032	24,317	2,763
	3	0,05	0,00125	0,350	0,151	24,317	6,907
	4	0,08	0,002	0,799	0,450	24,317	11,050
	5	0,1	0,0025	1,198	0,780	24,317	13,810
	6	0,2	0,005	4,067	4,820	24,317	27,630
δ= h/a=1/100	1	0,008	0,00008	0,061	0,028	151,982	17,140
	2	0,02	0,0002	0,101	0,081	151,982	42,840
	3	0,05	0,0005	0,356	0,390	151,982	107,10
	4	0,08	0,0008	0,826	1,100	151,982	171,40
	5	0,1	0,001	1,257	2,030	151,982	214,20
	6	0,2	0,002	4,758	13,930	151,982	428,40

Из данных табл. 1, 2 легко заметить, что с точки зрения прочностных $\left(\sigma_{11}^{\max}\right)$ и жесткостных $\left(w_{\max}\right)$ характеристик применение микрополярного ортотропного материала наиболее рационально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые построены статические теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений; со стесненным вращением; с «малой сдвиговой жесткостью». На основе построенных теорий микрополярных балок изучена конкретная задача и выявлены эффективные прочностные и жесткостные свойства микрополярного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Н. Савин. *Основы плоской моментной теории упругости.* Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1965, 162 с.
2. В.И. Ерофеев. *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. М.: Изд-во МГУ, 1999, 328 с.
3. П.А. Белов, С.А. Лурье. Континуальная модель микрогетерогенных сред // *Прикладная математика и механика.* 2009, т. 73, в. 5, с. 833-848.
4. С.О. Саркисян. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // *Известия НАН Армении. Механика.* 2011, т. 64, №1, с.58-67.
5. С.О. Саркисян. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // *Физическая мезомеханика*. 2011, №1, с. 55-66.
6. С.О. Саркисян. Математические модели микрополярных упругих тонких балок // *Доклады НАН Армении*. 2011, т. 111, №2.
7. Ш.И. Алваджян. Построение уравнений и граничных условий статической задачи изгиба ортотропных микрополярных упругих тонких балок асимптотическим методом // *Сборник научных трудов Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды»*. 2010, т. 1, с. 71-75.

8. D. Iesan. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids // *Archives of Mechanics.*1973, v. 5, № 3, p.547-561.

9. Б.Л. Пелех. *Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально изотропных пластин.* Киев: «Наукова думка», 1977, с.183.

Статья поступила в редакцию 30.05.2011 г.

МОДЕЛІ СТАТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ АНІЗОТРОПНИХ МІКРОПОЛЯРНИХ ПРУЖНИХ ТОНКИХ БАЛОК І ОСОБЛИВОСТІ ЇХ МІЦНОСТНО-ТВЕРДОСТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

С.О. Саркісьян, Ш.І. Алваджян

За допомогою методу гіпотез двомірне крайове завдання теорії пружності для анізотропного середовища в області тонкого прямокутника зводиться до прикладного одномірного завдання. В залежності від значень безрозмірних фізичних параметрів построєні загальні моделі мікрополярних анізотропних пружних тонких балок із вільним та утрудненим обертанням з «малою зсувною твердістю», при яких повністю враховуються поперечні зсувні і споріднені їм деформації. Побудовані також відповідні варіаційні рівняння моделі мікрополярних анізотропних балок. На основі побудованих моделей мікрополярних анізотропних пружних тонких балок розглядається конкретне завдання визначення напружено-деформованого стану балки з шарнірно-упертими граничними умовами. Отримані кінцеві числові результати. На основі їх аналізу виявляються ефективні міцністні та твердістні властивості мікрополярного анізотропного матеріалу балки.

MODELS OF STATIC DEFORMATION OF ANISOTROPIC MICROPOLAR ELASTIC THIN BEAM AND SINGULARITIES OF THEIR STRENGHT-HARDNESS CHARACTERISTICS

S.O. Sarkisyan, Sh.I. Alvadgyan

By the method of hypothesis the two-dimension edge problem of micropolar theory of elasticity for anisotropic medium in the region of thin rectangle is reduced to the applied one-sized problem; in dependence on values of nondimensional physical parameters the general models of micropolar anisotropic elastic thin beams with free and constrained rotation with “low shear hardness” are formed. Transverse shearing strains and similar deformation are completely taken into account. Corresponding variation equations of micropolar anisotropic beams model are constructed. On the base of obtained model the actual problem of determination of strained-deformed state of the beam with hinge boundary conditions is examined. The final calculated results are obtained. On the base of obtained results analysis effective strength and hardness characteristics of micropolar anisotropic material of the beam are revealed.