УДК 533.9

К ТЕОРИИ ПУЧКОВЫХ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В ГЕНЕРАТОРАХ С ВИРТУАЛЬНЫМ КАТОДОМ

И.И. Магда, А.В. Пащенко, С.С. Романов, И.Н. Шапова,
Институт плазменной электроники и новых методов ускорения, ННТЦ ХФТИ, 61108, г. Харьков, ул. Академическая, 1, Украина, imagda@online.kharkiv.com;
В.Е. Новиков
НТЦ «Электрофизической обработки» НАНУ, 61002 г. Харьков, а.я. 8812, Украина

Рассмотрена самосогласованная нестационарная модель пучковой обратной связи в приборах с виртуальным катодом (ВК), использующая неустойчивость потока в катод-анодном промежутке и нелинейное взаимодействие частиц с колебаниями ВК. Нелинейные процессы в этих областях описываются на основе взаимодействия связанных генераторов Ван дер Поля - Дуффинга.

I. ВВЕДЕНИЕ

Обратные связи (ОС) по пучку и электромагнитному полю эффективно используются для повышения КПД и управления характеристиками реально существующих микроволновых приборов с ВК [1,2]. Во многих работах выполнены численные эксперименты, подтверждающие эффективность их применения, однако к настоящему времени не создано приемлемой аналитической теории ОС для таких систем.

Физические области взаимодействия частиц и полей в виркаторе на пролетном пучке в простейшем случае показаны на рис.1.

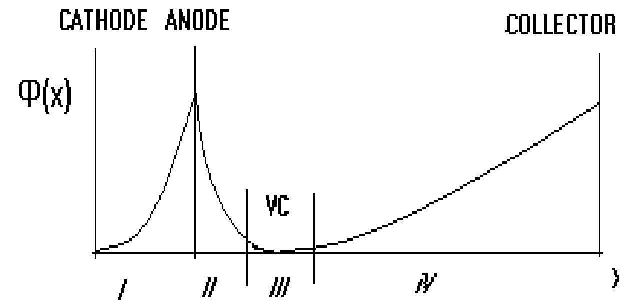

Рис.1. Характерные области виркатора: I - ускоряющий промежуток; II – область между анодом и ВК; III –область ВК; IV - область прошедшего электронного пучка

Области *I - III* содержат как прямой, так и отраженный от ВК пучки. В области *I* формируется электронный поток и ускоряется приложенной к катод-анодному промежутку разностью потенциалов $U(t)$. В области ВК (*III*) осуществляется отражение части прямого пучка, и возникают осцилляции электронов и полей. Характерный размер этой области в стационарном случае определяется близостью величин самосогласованного потенциала и эффективной температуры электронов вблизи ВК. В области *IV* распространяется прошедший через ВК пучок.

В рассматриваемом подходе предполагается, что обратные связи формируются потоками частиц (ПОС) и электромагнитными полями (ЭМОС), вносимыми из других областей. Они могут быть промоделированы введением в конкретную область эффективного потенциала. Также учитывается, что динамика сильноточного диода формируется неустойчивостью потока в катод-анодном промежутке. Ниже представлена самосогласованная модель ПОС в виркаторе, учитывающая нестационарность процессов в диоде со сверхкритическим током и области ВК. Эта модель основывается на анализе стационарных состояний диодного промежутка и их устойчивости.

2. ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ДИОДЕ И АНАЛИЗ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Замкнутые аналитические выражения для гидродинамических, полевых и спектральных характеристик потоков заряженных частиц в дрейфовом пространстве сильноточного пучка получены в работах [3-5].

Рассмотрим стационарные состояния в катод-анодном промежутке и их устойчивость. Исходными являются гидродинамические уравнения движения и непрерывности, а также уравнение Пуассона для электрического поля:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial \Phi}{\partial z}\ ;\ \frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}(nv)=0\ ;\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=qn, \qquad (1)$$

Единицами измерения плотности n, скорости v, координаты z и времени t являются характерные параметры для невозмущенного потока: n_0, v_0, длина диодного промежутка l и время пролета l/v_0. Безразмерный потенциал электрического поля $\Phi = mv_0^2/2e$. Качественно поведение возмущенной системы определяется одним параметром $q = 4\pi e^2 n_0 l^2/mv_0^2$.

Решением системы (1) в стационарном состоянии являются: постоянство плотности тока и закон сохранения энергии потока

$$n^0(z)=1/v^0(z), \Phi^0(z)=v_0^2/2, \qquad (2)$$

Используя интегралы (2), решение задачи дает следующее уравнение:

$$\frac{1}{3}(v_0+C)^{3/2}=C(v_0+C)^{1/2}=\mp\sqrt{\frac{q}{2}}(z-z_m)\ . \qquad (3)$$

Постоянная интегрирования $C=-v_m$ имеет смысл минимальной скорости электронов в области дрейфа, которая достигается в плоскости $z = z_m$. Верхний знак в формуле (3) соответствует времени пролета электрона, удовлетворяющему неравенству $v_0 < v_m$; при $v_0 > v_m$ - знак плюс.

Постоянные C и z_m определены из граничных условий: $v_0(z=0) = 1$, $v_0(z=1) = v_l$. По уравнению для минимальной скорости электронов в области дрейфа

$$\left(v_l - v_m\right)^{1/2}\left(v_l + 2v_m\right) + \left(1 - v_m\right)^{1/2}(1 + 2v_m) = \left(9q/2\right)^{1/2}. \quad (4)$$

Координата плоскости, в которой скорость потока минимальна

$$z_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2q}}\left[\left(v_l - v_m\right)^{1/2}\left(v_l - 2v_m\right) - \left(1 - v_m\right)^{1/2}\left(1 + 2v_m\right)\right], \quad (5)$$

не больше половины длины диода. Максимальное значение достигается при $v_l = 1$.

Введем лагранжевы переменные τ и τ_0 (τ_0-момент влета частиц в катод-анодный промежуток), определяемые формулой $v_0(\tau) = dz/d\tau$. Тогда стационарная скорость потока $v_0(\tau) = \frac{q}{2}\left(\tau - \frac{1}{\sqrt{q\gamma}}\right)^2 + v_m$, где v_m – минимальная скорость частиц, а параметр γ находится из уравнения (v_l – скорость на выходе из диода)

$$q(\gamma, v_l) = \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{1}{3\gamma} + \frac{1}{3}\left(v_l + 2 - \frac{1}{\gamma}\right)\sqrt{2\gamma\,(v_l - 1) + 1}\right)^2. \quad (6)$$

В лагранжевых переменных уравнения стационарного состояния потока перепишем в виде

$$z = \frac{q}{6}\tau^3 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{\gamma}}\tau^2 + \tau\ ;\ v_m = 1 - \frac{1}{2\gamma}\ ;\ v_0(\tau) = \frac{q}{2}\tau^2 - \sqrt{\frac{q}{\gamma}}\tau + 1. \quad (7)$$

Если предполагать, что $v_m>0$ (режим прямого пучка), то, в соответствии с (7) $\gamma > 0.5$ (например, для дрейфового пространства: γ =0.5 и $v_0=v_l=1$ получаем q= 8/9).

На входе в дрейфовое пространство параметры электронного потока связаны соотношением

$$\left(1 - v_m\right)\left(1 + 2v_m\right)^2 = \frac{9}{2} q z_m^2.$$

На рис.2 приведены зависимости q от γ для разных значений v_l и, следовательно, разных значений потенциала на аноде. Максимуму кривых соответствует значение $q_l = 2\frac{\left(v_l + 1\right)^3}{9}$. При $v_l = 1$ предельный ток равен 16/9.

Заметим, что время пролета ускоряющего промежутка ($z = z_l$ =1) для стационарного случая определяется выражением

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{q\gamma}}\left(1 + \sqrt{1 + 2\gamma\left(v_l - 1\right)}\right). \quad (8)$$

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Чтобы получить спектр собственных частот, рассмотрим отклонение скорости потока от стационарного значения.

После линеаризации уравнений (1) имеем

$$-i\omega\,\tilde v(z) + \frac{d}{dz}\left[v^0(z)\,\tilde v(z)\right] = \frac{d}{dz}\Phi(z), \quad (9)$$

$$-i\omega\,\tilde n(z) + \frac{d}{dz}\left[n^0(z)\,\tilde v(z) + \tilde n(z)\,v^0(z)\right] = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = q\tilde n(z). \quad (11)$$

Объединяя (9)-(11), получаем следующее уравнение:

$$\left[v^0(z)\right]^3\frac{d^2u}{dz^2} + qu = C_1\left[v^0(z)\right]^2\exp\left(-i\omega\int_0^z\frac{dz}{v^0(z)}\right), \quad (12)$$

где

$$u = v^0(z)\,\tilde v(z)\exp\left(-i\omega\int_0^z\frac{dz}{v^0(z)}\right), \quad (13)$$

а C_1 - постоянная интегрирорвания, представляющая собой величину, пропорциональную фурье-компоненте полного тока. Уравнение (12) можно решить в лагранжевых переменных. Используя формулы (7), перепишем (12) в виде:

$$v^0(\tau)\frac{d^2u}{d\tau^2} - \frac{dv^0(\tau)}{d\tau}\frac{du}{d\tau} + qu = C_1\left[v^0(\tau)\right]^2 e^{-i\omega\tau}. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) представим в виде суммы двух слагаемых $u(\theta) = u_h + u_p$, первое из которых есть решение однородного уравнения, а второе - частное решение. Действуя известными способами, найдем решение уравнения (14)

$$u(\theta) = D_1(\theta - 1) + D_2\left[\theta(\theta - 1) + 1 - 2\gamma\right] + C\left[1 - 2\gamma - \frac{2}{\sigma}(\theta - 1) - (\theta - 1)^2\right]e^{-\theta\sigma}, \quad (15)$$

Причем лагранжева переменная обозначена как $\theta = \tau\sqrt{q\gamma}$, а параметр $\sigma = i\omega/\sqrt{q\gamma}$; $C = C_1/2q\gamma^2\sigma^2$; D_1, D_2 - постоянные интегрирования.

По известному возмущенному значению скорости могут быть найдены отклонения потенциала и плотности.

Перейдя в (9) от z к θ, получим формулу

$$\tilde\Phi(\theta) = \tilde\Phi(0) + \int_0^\theta\frac{du(x)}{dx}e^{\theta\sigma}dx, \quad (16)$$

Подстановка линеаризованной скорости (15) в (16) приводит к результату:

$$\tilde\Phi(\theta) = \tilde\Phi(0) - \frac{D_1}{\sigma}\left(1 - e^{\theta\sigma}\right) - D_2\left\{e^{\theta\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}(1 - 2\theta) + \frac{2}{\sigma^2}\right] - \left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{2}{\sigma^2}\right\} +$$
$$+ C\sigma\left[\left(-\frac{2}{\sigma^2} - 1 + 2\gamma\right)\theta + \frac{(\theta - 1)^3 + 1}{3}\right].$$

Возмущение плотности может быть теперь найдено по уравнению (11)

$$\tilde n(\theta) = \frac{\gamma}{\left[v^0(\theta)\right]^2}\left[\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} - \frac{1}{v^0(\theta)}\frac{dv^0(\theta)}{d\theta}\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\right]. \quad (17)$$

Итак, теперь имеем формулы для трех линеаризованных величин гидродинамических параметров: скорости, плотности и потенциала электрического поля.

4.ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Постоянные интегрирования в формуле (15) находим, удовлетворив граничным условиям:

$$\tilde v(z)\big|_{z=0} = 0, \tilde n(z)_{z=0} = 0, \tilde\Phi(z)\big\|_{z=0} = 0, \tilde\Phi(z)\big|_{z=1} = 0. \quad (18)$$

В соответствии с первым граничным условием на входе отсутствует возмущение скорости потока, поэтому согласно (13) $u(0)=0$. Из (15) находим первое уравнение для постоянных интегрирования:

$$D_1 - D_2(1-2\gamma) + 2C\left(\gamma - \frac{1}{\sigma}\right) = 0\,. \qquad (19)$$

Второе граничное условие в (18) обращает в нуль линеаризованную входную плотность, что дает второе уравнение:

$$\left(1+\frac{1}{\sigma\gamma}\right)D_1 + \left(\frac{2}{\sigma} - \frac{1}{\gamma\sigma} - 1\right)D_2 - \frac{2}{\gamma\sigma^2}C = 0. \qquad (20)$$

Как видно, третье граничное условие не приводит к уравнению, отличному от (19).

Чтобы удовлетворить последнему граничному условию, необходимо в (7) перейти от лагранжевой переменной τ к параметру θ и решить кубическое уравнение. Подставив в выражение для потенциала $\theta=\theta_1$, получим третье уравнение:

$$D_1\left(e^{\theta_1\sigma}-1\right) + D_2\left[2\theta_1 - \left(1-\frac{2}{\sigma}\right)e^{\theta_1\sigma} + 1 + \frac{2}{\sigma}\right] + C\sigma^2\left[\left(-1+2\gamma - \frac{2}{\sigma^2}\right)\theta_1 + \frac{(\theta_1-1)^3+1}{3}\right] = 0.$$

Полученные уравнения являются однородными, поэтому чтобы иметь ненулевые решения, определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, должен быть равен нулю.

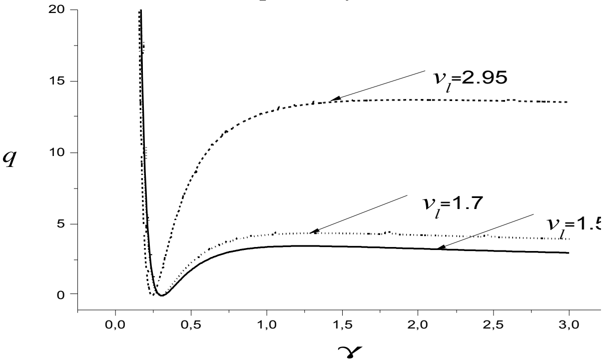

Рис. 2. Зависимость параметров q от γ при различных значениях v_l (потенциалах на аноде)

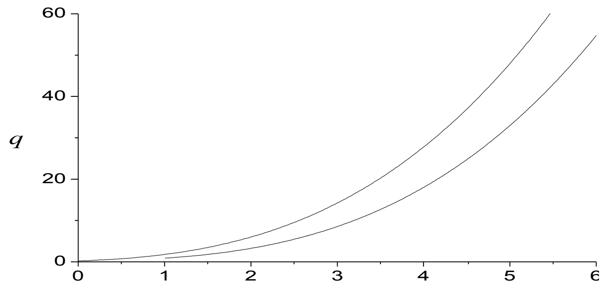

Рис. 3. Границы устойчивости потока в диоде на плоскости параметров (q, v_l)

Вычисления приводят к следующему уравнению для частотного спектра волн пространственного заряда, которые могут существовать в диоде в режиме без отражения частиц:

$$\left(2-\theta_1\sigma\right)e^{\theta_1\sigma} - 2 - \frac{\sigma}{2}\left(\sigma^2 - 2\gamma\sigma^2 + 2\right)\theta_1 + \sigma^3\frac{\left(\theta_1-1\right)^3+1}{6} = 0. \quad (21)$$

где лагранжевы угол пролета и частота, соответственно $\theta_1 = \tau_1\sqrt{q\gamma}$ и $\sigma = i\omega/\sqrt{q\gamma}$,

Выражение (21) используется для исследования устойчивости потока. Введем переменную $\beta = \theta_1\sigma$, которая является углом пролета для данной спектральной компоненты. Тогда уравнение (21) приводится к виду:

$$\left(2-\beta\right)e^{\beta} + \Gamma\beta^3 - \beta - 2 = 0\,, \qquad (22)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{2\theta_1^2}\left(2\gamma - 1 + \frac{\left(\theta_1-1\right)^3+1}{3\theta_1}\right). \qquad (23)$$

Неустойчивые решения соответствуют условию:

$$\mathrm{Re}\,\beta > 0\,. \qquad (24)$$

Решение (22), представляющее границу устойчивости потока в диоде, приведено на рис.3. Таким образом, получены выражения для частот и инкрементов колебаний *Imβ*, которые возбуждаются в катод-анодном промежутке при выполнении условия неустойчивости $q_b < q < q_l$, где $q_b = q(0.5, v_l)$ (см. рис.3).

Отметим, что пролетная неустойчивость сильноточного диода зависит от следующих параметров физической системы: приложенной к промежутку разности потенциалов, размеров промежутка и параметров пучка, связанных с обобщенным параметром *q,* см. (6). При этом область неустойчивости находится между кривыми, имеющими при v_l=1 значения q = 16/9 и 8/9, соответственно [4].

5. МОДЕЛЬ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ПУЧКУ

Параметры системы должны быть выбраны таким образом, чтобы реализовать ПОС между областями *I – III*. В этом случае сигнал ОС, формируемый отраженными частицами, на начальной стадии является «затравочным» для неустойчивости в катод-анодном промежутке. Усиленный этой неустойчивостью сигнал вносится прямым пучком в область *III* и дополнительно модулирует колебания ВК. Оптимальные условия ПОС соответствуют области неустойчивых режимов ВК - максимуму усиления в характерной для ВК области частот.

Таким образом, возникает физическая ситуация, соответствующая взаимодействию колебаний в катод-анодном промежутке и колебаний в области ВК, которое существенно зависит от степени ПОС, определяемой прозрачностью анода. Это взаимодействие может быть представлено динамикой двух связанных нелинейных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - 2\gamma_1\left(1-\frac{\varphi_1^2}{\varphi_{nl}^2}\right)\frac{d\varphi_1}{dt} + \left(\omega_1^2 + \alpha_1\varphi_1^2\right)\varphi_1 = k_1\varphi_2\,; \qquad (25)$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - 2\gamma_2\left(1-\frac{\varphi_2^2}{\varphi_{nl}^2}\right)\frac{d\varphi_2}{dt} + \left(\omega_2^2 + \alpha_2\varphi_2^2\right)\varphi_2 = k_2\varphi_1\,,$$

где φ_1 и φ_2 - потенциалы колебаний в области ВК и ускоряющего промежутка: k_1 и k_2 - прозрачности анода для прямого и отраженного пучка.

Известно, что по своей природе колебания в ускоряющем промежутке и в области ВК широкополосны. Используемая при анализе модель адекватно отражает нелинейную природу исходных объектов и их итоговые широкополосные спектры.

Далее рассматривается симметричный случай k_1

= $k_2 = k$. Здесь ω_1, γ_1, ω_2, γ_2 – частоты и инкременты соответствующих колебаний. Для колебаний в ускоряющем промежутке инкременты и частоты определялись из уравнения (22). Частота колебаний ВК предполагалась порядка электронной плазменной частоты пучка в области ВК.

На рис.4 преведены результаты решения системы (25) на плоскости *(φ_1, φ_2)* для разных прозрачностей анода. Как видно, при малой прозрачности (слабой ПОС) кривые на плоскости *(φ_1, φ_2)* имеют сложный характер и заполняют практически всю плоскость. С ростом прозрачности происходит синхронизация колебаний, разность фаз стабилизируется, и нелинейная система в целом генерирует в узкой области частот (максимального инкремента).

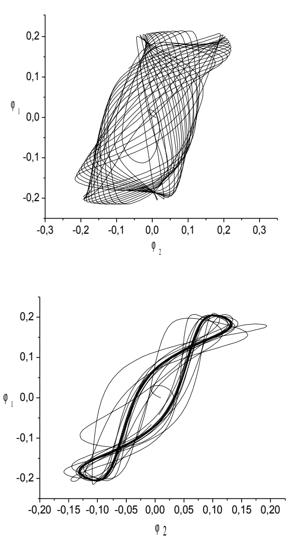

Рис. 4. Колебания двух связанных осцилляторов на плоскости (φ_1, φ_2)

Качественный анализ взаимодействующих осцилляторов и полей, проведенный для случая вакуумных пучковых систем [6], соответствует выводам нашей модели. Показано, что электронные колебания, воспринимающие дополнительную энергию, могут уменьшать свое затухание вплоть до отрицательных значений. Для нашего случая это соответствует возбуждению и росту амплитуды пролетных колебаний диода, приводящих к увеличению мощности и сужению спектра генерации виркатора.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены модели обратной связи и способы их организации. Рассмотрена устойчивость потока в ускоряющем промежутке. Найдены границы устойчивости в зависимости от параметров системы и частотные характеристики неустойчивости, связанной с особенностями динамики объемного заряда в диоде.

Предложен механизм обратной связи по пучку основанный на использовании неустойчивости в ускоряющем промежутке. Функционирование обратной связи промоделировано двумя связанными по пучку нелинейными осцилляторами Ван дер Поля Дуффинга. Показана синхронизация колебаний ВК и колебаний в ускоряющем промежутке в результате ПОС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.П.Гадецкий, И.И.Магда, С.И.Найстетер, Ю.В.Прокопенко, В.И. Чумаков // *Физика плазмы.* 1993, т.19, в.4, с.530.
2. С.Д.Коровин, И.В.Пегель, С.Д.Полевин, В.В.Ростов // *Вакуумная электроника*: Сб. обзоров. Нижний Новгород, 2002, с.149.
3. А В.Пащенко, Б.Н.Руткевич // *Физика плазмы*. 1977, т.3, с.774.
4. А.В.Пащенко, Б.Н.Руткевич // *Радиоэлектроника и техника.* 1979, т.24, с.152.
5. А.В.Пащенко, Б.Н.Руткевич, В.Д.Федорченко, Ю.П.Мазалов // *ЖТФ.* 1983, т.53, в.1, с.75.
6. Л.А.Вайнштейн // *Радиотехника и электроника*. 1990, т.35, №4, с.837.