

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ПОДЗЕМНОМ ЗАХОРОНЕНИИ РАДИОАКТИВНЫХ ОТХОДОВ

А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, Д.В. Иванов, Д.А. Гюнтер
Стерлитамакский филиал Академии наук республики Башкортостан,
г. Стерлитамак, Россия; E-mail: ivanov_dv@list.ru

На основе асимптотического метода в нулевом и первом приближениях найдены расчетные формулы для полей концентрации и температурных полей, возникающих при закачке растворов радиоактивных веществ в пористые глубокозалегающие пласты. Получена формула для определения критического значения коэффициента Генри $K_{кр}$. Показано, что при $K < K_{кр}$ фронт загрязнения опережает температурный, а при $K > K_{кр}$ – отстает. Поскольку в реальных случаях $K > K_{кр}$, то возможен способ контроля над зоной заражения на основе измерений температуры в контрольных скважинах. Обнаружено, что при любых значениях K образуется зона очищенной воды. Определены параметры, от которых зависит размер этой зоны.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наиболее перспективным способом утилизации радиоактивных отходов является их закачка в подземные глубокозалегающие пористые пласты. Этот способ оптимален как по показателям надежности, так и по себестоимости. В связи с этим возникает важная задача по мониторингу зон, охваченных воздействием радиоактивных элементов, особенно с учетом того, что глубокозалегающие пласты, как правило, имеют выход на поверхность. Задача усложняется тем, что возможности экспериментальных методов в данном случае весьма ограничены и прогнозирование производится в основном расчетным путем.

При закачке радиоактивных отходов в глубокозалегающие пласты происходит нарушение естественного температурного поля пласта, которое обусловлено выделением энергии при распаде радионуклидов. При этом температурное поле связано с полем концентрации изотопов. В данной работе на основе решения асимптотическим методом краевых задач конвективной диффузии и теплопроводности предложен способ расчета зон заражения и метод прогнозирования распространения радиоактивных примесей при их закачке в непрерывном режиме.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

На рис. 1 приведена геометрия задачи о подземном захоронении радиоактивных отходов.

Через скважину малого (по сравнению с расстоянием до точки наблюдения) радиуса в пористый горизонтальный бесконечный пласт закачивается раствор с радиоактивными примесями. Все пласты – пористый, покрывающий и подстилающий – считаются однородными и анизотропными по теплофизическим свойствам. В поступающей в пласт жидкости (при $r \leq r_0$) поддерживаются постоянные температура и концентрация примеси. В общем случае температура и концентрация загрязнителя в пласте

изменяются в результате конвективного переноса в направлении r , теплопроводности и диффузии – вдоль r и z , за счёт тепловых источников и источников концентрации (в данном случае таким источником является радиоактивный распад загрязнителя). В окружающих средах в отличие от пласта отсутствует конвективный перенос, имеют место теплопроводность и диффузия вдоль направлений r и z . Скорость конвективного переноса примесей в пористой среде \vec{v} связана со скоростью фильтрации \vec{v}' соотношением $\vec{v} = \vec{v}'[m + (1-m)K]$, где K – коэффициент Генри, определяющий отношение плотности примеси в скелете и растворе.

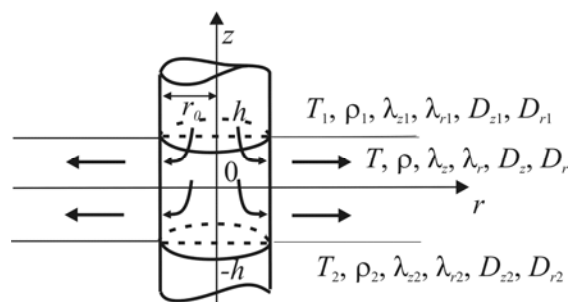


Рис. 1. Геометрия задачи

Математическая постановка задачи теплопереноса для всех областей включает уравнения теплопроводности с учётом радиоактивного распада в покрывающем и подстилающем пластах:

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_{1d}}{\partial \tau} - \lambda_{z1} \frac{\partial^2 T_{1d}}{\partial z_d^2} - \lambda_{r1} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial T_{1d}}{\partial r_d} \right) = \alpha L \rho_{1d},$$

$$\tau > 0, r_d > 0, z_d > h; \quad (1)$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_{2d}}{\partial \tau} - \lambda_{z2} \frac{\partial^2 T_{2d}}{\partial z_d^2} - \lambda_{r2} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial T_{2d}}{\partial r_d} \right) = \alpha L \rho_{2d},$$

$$\tau > 0, r_d > 0, z_d < -h, \quad (2)$$

а также уравнение конвективного переноса тепла с учётом радиоактивного распада в пористом пласте:

$$c \rho \frac{\partial T_d}{\partial \tau} - \lambda_z \frac{\partial^2 T_d}{\partial z_d^2} - \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial T_d}{\partial r_d} \right) + c_f \rho_f \frac{v'_0 r_0}{r_d} \frac{\partial T_d}{\partial r_d} = \alpha L \rho_d, \quad \tau > 0, r_d > 0, |z_d| < h. \quad (3)$$

Условия сопряжения включают в себя равенства температур и потоков тепла на границах раздела пластов:

$$T_d|_{z_d=h} = T_{1d}|_{z_d=h}, \quad T_d|_{z_d=-h} = T_{2d}|_{z_d=-h}, \\ \lambda_z \frac{\partial T_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h} = \lambda_{z1} \frac{\partial T_{1d}}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h}, \quad \lambda_z \frac{\partial T_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h} = \lambda_{z2} \frac{\partial T_{2d}}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h}.$$

В начальный момент времени и на бесконечности температура пластов равна естественной невозмущенной температуре Земли T_\oplus :

$$T_d|_{\tau=0} = T_{1d}|_{\tau=0} = T_{2d}|_{\tau=0} = T_\oplus, \\ T_d|_{r_d \rightarrow +\infty} = T_{1d}|_{r_d+z_d \rightarrow +\infty} = T_{2d}|_{r_d+|z_d| \rightarrow +\infty} = T_\oplus.$$

Температура загрязнителя в скважине считается постоянной

$$T_d|_{r_d=0} = T_0.$$

Функция плотности источников тепла, входящая в правые части уравнений (1)-(3), находится из решения соответствующей задачи массопереноса.

Математическая постановка задачи массопереноса для всех областей включает уравнения диффузии с учётом радиоактивного распада в покрывающем

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial \tau} - D_{z1} \frac{\partial^2 \rho_d}{\partial z_d^2} - D_{r1} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \rho_d}{\partial r_d} \right) = -\alpha \rho_d, \\ \tau > 0, r_d > 0, z_d > h \quad (4)$$

и подстилающем

$$\frac{\partial \rho_{2d}}{\partial \tau} - D_{z2} \frac{\partial^2 \rho_{2d}}{\partial z_d^2} - D_{r1} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \rho_{2d}}{\partial r_d} \right) = -\alpha \rho_{2d}, \\ \tau > 0, r_d > 0, z_d < -h \quad (5)$$

пластах, а также уравнение конвективной диффузии с учётом радиоактивного распада в пористом пласте:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} - D_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_d^2} - D_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \rho}{\partial r_d} \right) + \frac{v'_0 r_0}{r_d} \frac{\partial \rho}{\partial r_d} = -\alpha \rho, \quad \tau > 0, r_d > 0, |z_d| < h. \quad (6)$$

При этом условия сопряжения представляют равенства плотностей и потоков растворённого вещества на границах раздела пластов:

$$\rho_d|_{z_d=h} = \rho_{1d}|_{z_d=h}, \quad \rho_d|_{z_d=-h} = \rho_{2d}|_{z_d=-h}, \quad (7) \\ D_z \frac{\partial \rho_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h} = D_{z1} \frac{\partial \rho_{1d}}{\partial z_d} \Big|_{z_d=h}, \quad D_z \frac{\partial \rho_d}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h} = D_{z2} \frac{\partial \rho_{2d}}{\partial z_d} \Big|_{z_d=-h}.$$

Плотность загрязнителя на входе в пористый пласт считается постоянной

$$\rho_d|_{r_d=0} = [m + K(1-m)] \rho_0. \quad (8)$$

В начальный момент времени плотность загрязнителя равна нулю:

$$\rho_d|_{\tau=0} = 0, \quad \rho_{1d}|_{\tau=0} = 0, \quad \rho_{2d}|_{\tau=0} = 0. \quad (9)$$

Кроме того, на бесконечности выполняются условия регулярности

$$\rho_d|_{r_d \rightarrow +\infty} = 0, \quad \rho_{1d}|_{r_d+z_d \rightarrow +\infty} = 0, \quad \rho_{2d}|_{r_d+|z_d| \rightarrow +\infty} = 0. \quad (10)$$

Задачи тепло-, массопереноса обезразмерены с помощью соотношений:

$$T_1 = \frac{c \rho_l (T_{id} - T_\oplus)}{\rho_o L}, \quad \rho_l = \frac{\rho_d}{\rho_0}, \quad r = \frac{r_d}{h}, \quad z = \frac{z_d}{h}, \\ t = \frac{\lambda_{z1}}{c_1 \rho_{l1}} \frac{\tau}{h^2}, \quad At = \alpha h^2 \frac{c_1 \rho_{l1}}{\lambda_{z1}}, \quad Pt = \frac{c_1 \rho_{l1}}{\lambda_{z1}} v'_0 r_0, \\ {}^i_j \Lambda = \frac{\lambda_{zi}}{\lambda_{zj}}, \quad {}^f_o \chi = \frac{c_f \rho_f}{c \rho}, \quad {}^i_j \chi = \frac{c_i \rho_i}{c_j \rho_j}, \quad {}^i_j D = \frac{D_{zi}}{D_j}, \\ \phi_0 = \frac{c \rho_l (T_0 - T_\oplus)}{\rho_0 L}, \quad \gamma = \frac{1}{m + K(1-m)}, \\ \delta = \frac{c_1 \rho_{nl} D_{z1}}{\lambda_{z1}},$$

где Pt – аналог параметра Пекле. Уже при объемах закачки ~ 100 м³/сут. вклад конвективного переноса становится подавляющим над радиальной диффузией. Это позволяет пренебречь в уравнении (6) слагаемым, описывающим радиальную диффузию. Для простоты пренебрегается также соответствующими слагаемыми в уравнениях (4), (5).

Путем формальной замены коэффициента диффузии D_z на D_z/ε задача массопереноса (4)-(10) заменена на более общую, содержащую произвольный асимптотический параметр ε :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = -At \rho, \quad t > 0, r > 0, z > 1; \quad (11)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} - \delta^0 D \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \varepsilon \gamma \frac{Pt}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\varepsilon At \rho, \\ t > 0, r > 0, |z| < 1; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \delta^2 D \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z^2} = -At \rho_2, t > 0, r > 0, z < -1; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{z=1} = \varepsilon_0' D \frac{\partial \rho_1}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \varepsilon_0^2 D \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \Big|_{z=-1}; \quad (14)$$

$$\rho \Big|_{z=1} = \rho_1 \Big|_{z=1}, \quad \rho \Big|_{z=-1} = \rho_2 \Big|_{z=-1}; \quad (15)$$

$$\rho \Big|_{r=0} = 1/\gamma; \quad (16)$$

$$\rho \Big|_{t=0} = 0, \quad \rho_1 \Big|_{t=0} = 0, \quad \rho_2 \Big|_{t=0} = 0; \quad (17)$$

$$\rho \Big|_{r \rightarrow +\infty} = 0, \quad \rho \Big|_{r+z \rightarrow +\infty} = 0, \quad \rho \Big|_{r+|z| \rightarrow +\infty} = 0. \quad (18)$$

Аналогично путем формальной замены λ_z на λ_z/ε получена постановка параметризованной задачи теплопереноса:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \frac{\lambda_{z1}}{\lambda_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = {}^0 \chi At \rho_1$$

$$t > 0, r > 0, z > 1; \quad (19)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} - {}^2 \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - {}^2 \chi \frac{\lambda_{z2}}{\lambda_2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) = {}^0 \chi At \rho_2$$

$$t > 0, r > 0, z < -1; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon_0' \chi \frac{\text{Pt}}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \varepsilon_0' \chi \frac{\lambda_z}{\lambda_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \\ = {}^0 \chi \Lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \varepsilon At \rho \quad t > 0, r > 0, |z| < 1; \end{aligned} \quad (21)$$

$$T \Big|_{z=1} = T_1 \Big|_{z=1}, \quad T \Big|_{z=-1} = T_2 \Big|_{z=-1}; \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=1} = \varepsilon_0' \Lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \varepsilon_0^2 \Lambda \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=-1}; \quad (23)$$

$$T \Big|_{r=0} = \psi_0; \quad (24)$$

$$T \Big|_{t=0} = 0, \quad T_1 \Big|_{t=0} = 0, \quad T_2 \Big|_{t=0} = 0; \quad (25)$$

$$T \Big|_{r \rightarrow +\infty} = 0, \quad T_1 \Big|_{r+z \rightarrow +\infty} = 0, \quad T_2 \Big|_{r+|z| \rightarrow +\infty} = 0. \quad (26)$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАССОПЕРЕНОСА В НУЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Решение задачи (11)-(18) представляется в каждой из областей асимптотической формулой по параметру ε :

$$\rho = \rho_i^{(0)} + \varepsilon \rho_i^{(1)} + \dots + \varepsilon^n \rho_i^{(n)} + \theta_i^{(n)}. \quad (27)$$

Подстановка выражений (27) в (11) – (18) и группировка слагаемых по степеням параметра разложения ε приводит к тому, что множители при степенях ε содержат соседние коэффициенты разложения и в этом смысле являются зацепленными. Для решения

соответствующих уравнений осуществлена процедура расщепления.

В нулевом приближении плотность загрязнителя зависит только от r и t и является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial \rho_1^{(0)}}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 \rho_1^{(0)}}{\partial z^2} + At \rho_1^{(0)} = 0, \quad t > 0, r > 0, z > 1; \quad (28)$$

$$\frac{\partial \rho_2^{(0)}}{\partial t} - \delta^2 D \frac{\partial^2 \rho_2^{(0)}}{\partial z^2} + At \rho_2^{(0)} = 0, \quad t > 0, r > 0, z < -1; \quad (29)$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \gamma \frac{\text{Pt}}{r} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial r} + At \rho^{(0)} = \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial \rho_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - {}^2 D \frac{\partial \rho_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right)$$

$$t > 0, r > 0, |z| < 1; \quad (30)$$

$$\rho^{(0)} \Big|_{r=0} = 1/\gamma, \quad \rho^{(0)} = \rho_1^{(0)} \Big|_{z=1} = \rho_2^{(0)} \Big|_{z=-1}; \quad (31)$$

$$\rho^{(0)} \Big|_{t=0} = 0, \quad \rho_1^{(0)} \Big|_{t=0} = 0, \quad \rho_2^{(0)} \Big|_{t=0} = 0; \quad (32)$$

$$\rho^{(0)} \Big|_{r \rightarrow +\infty} = 0, \quad \rho_1^{(0)} \Big|_{r+z \rightarrow +\infty} = 0, \quad \rho_2^{(0)} \Big|_{r+|z| \rightarrow +\infty} = 0. \quad (33)$$

Для решения полученной краевой задачи использован метод интегральных преобразований. В пространстве изображений Лапласа-Карсона (28)-(33) заменяется на следующую задачу:

$$p \rho_1^{(0)u} - \delta \frac{\partial^2 \rho_1^{(0)u}}{\partial z^2} + At \rho_1^{(0)u} = 0, \quad r > 0, z > 1;$$

$$p \rho_2^{(0)u} - \delta^2 D \frac{\partial^2 \rho_2^{(0)u}}{\partial z^2} + At \rho_2^{(0)u} = 0, \quad r > 0, z < -1;$$

$$p \rho^{(0)u} + \gamma \frac{\text{Pt}}{r} \frac{\partial \rho^{(0)u}}{\partial r} + At \rho^{(0)u} = \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial \rho_1^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=1} - {}^2 D \frac{\partial \rho_2^{(0)u}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right);$$

$$r > 0, |z| < 1;$$

$$\rho^{(0)u} \Big|_{r=0} = 1/\gamma, \quad \rho^{(0)u} = \rho_1^{(0)u} \Big|_{z=1} = \rho_2^{(0)u} \Big|_{z=-1};$$

$$\rho^{(0)u} \Big|_{r \rightarrow +\infty} = \rho^{(0)u} \Big|_{r+z \rightarrow +\infty} = \rho^{(0)u} \Big|_{r+|z| \rightarrow +\infty} = 0,$$

решение которой представляется в виде:

$$\rho_1^{(0)u} = \rho^{(0)u} \exp\left(-\sqrt{(p+At)/\delta}(z-1)\right);$$

$$\rho_2^{(0)u} = \rho^{(0)u} \exp\left(\sqrt{{}^2 D(p+At)/\delta}(z+1)\right); \quad (34)$$

$$\rho^{(0)u} = \frac{1}{\gamma} \exp\left[-\left(p+At + \frac{1}{2}\sqrt{\delta(p+At)}(1+\sqrt{{}^2 D})\right)\frac{r^2}{2\gamma\text{Pt}}\right].$$

Для перевода (34) в пространство оригиналов использованы табличные формулы из [3]. Выражения для плотности радиоактивных примесей в пористом, покрывающем и подстилающем пластах соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned}
\rho^{(0)} &= \frac{1}{2\gamma} \exp\left(-\frac{At}{2\gamma Pt} r^2\right) \Phi\left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right) \left[\exp\left(-\frac{\sqrt{At\delta}(1+\sqrt{{}^2_i D})}{4\gamma Pt} r^2\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\delta}(1+\sqrt{{}^2_i D})}{8\gamma Pt\sqrt{t-r^2/2\gamma Pt}} r^2 - \sqrt{At\left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right)}\right) + \right. \\
&+ \left. \exp\left(\frac{\sqrt{At\delta}(1+\sqrt{{}^2_i D})}{4\gamma Pt} r^2\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\delta}(1+\sqrt{{}^2_i D})}{8\gamma Pt\sqrt{t-r^2/2\gamma Pt}} r^2 + \sqrt{At\left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right)}\right) \right], \quad t > 0, r > 0, |z| < 1; \quad (35) \\
\rho_1^{(0)} &= \frac{1}{2\gamma} \exp\left(-\frac{At}{2\gamma Pt} r^2\right) \Phi\left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right) \left\{ \exp\left(-\frac{\sqrt{At\delta}(1+\sqrt{{}^2_i D})}{4\gamma Pt} r^2 - \sqrt{\frac{At}{\delta}}(z-1)\right) \times \right. \\
&\times \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta(1+\sqrt{{}^2_i D}) r^2 + 4\gamma Pt(z-1)}{8\sqrt{\delta}\gamma Pt\sqrt{t-r^2/2\gamma Pt}} - \sqrt{At\left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right)}\right) + \exp\left(\frac{\sqrt{At\delta}(1+\sqrt{{}^2_i D})}{4\gamma Pt} r^2 + \sqrt{\frac{At}{\delta}}(z-1)\right) \times \\
&\times \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta(1+\sqrt{{}^2_i D}) r^2 + 4\gamma Pt(z-1)}{8\sqrt{\delta}\gamma Pt\sqrt{t-r^2/2\gamma Pt}} + \sqrt{At\left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right)}\right) \left. \right\}, \quad t > 0, r > 0, z > 1; \\
\rho_2^{(0)} &= \frac{1}{2\gamma} \exp\left(-\frac{At}{2\gamma Pt} r^2\right) \Phi\left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right) \left\{ \exp\left(-\frac{\sqrt{At\delta}(1+\sqrt{{}^2_i D})}{4\gamma Pt} r^2 + \sqrt{\frac{At}{\delta}}(z+1)\right) \times \right. \\
&\times \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta(1+\sqrt{{}^2_i D}) r^2 - 4\gamma Pt\sqrt{{}^2_i D}(z+1)}{8\sqrt{\delta}\gamma Pt\sqrt{t-r^2/2\gamma Pt}} - \sqrt{At\left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right)}\right) + \exp\left(\frac{\sqrt{At\delta}(1+\sqrt{{}^2_i D})}{4\gamma Pt} r^2 - \sqrt{\frac{At}{\delta}}(z+1)\right) \times \\
&\times \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta(1+\sqrt{{}^2_i D}) r^2 - 4\gamma Pt\sqrt{{}^2_i D}(z+1)}{8\sqrt{\delta}\gamma Pt\sqrt{t-r^2/2\gamma Pt}} + \sqrt{At\left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right)}\right) \left. \right\}, \quad t > 0, r > 0, z < -1.
\end{aligned}$$

Усреднение (11)-(18) по z в пределах несущего пласта согласно $\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho dz$ приводит к тому, что усредненная параметризованная задача совпадает с задачей (28)-(33) для нулевого приближения плотности загрязнителя. Поэтому из единственности решения следует, что $\langle \rho \rangle = \rho^{(0)}$, т.е. нулевое приближение описывает осредненное известным образом решение исходной задачи.

Если усреднить исходную непараметризованную задачу, то она также совпадает с задачей для нулевого приближения поля плотностей загрязнителя. Совпадение усредненных исходной и параметризованной задач существенно отличает используемую в данной работе параметризацию от произвольной, которая чаще всего приводит к зависимости осредненных значений от параметра асимптотического разложения.

Таким образом, получено решение задачи массопереноса в нулевом приближении, которое позволяет определить максимальные размеры зоны загрязнения, а также указать положение фронта

радиоактивных веществ в любой момент времени. Недостатком нулевого приближения является то, что оно не описывает распределения плотности загрязнителя по толщине пласта. Этот недостаток устранен с помощью первого приближения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАССОПЕРЕНОСА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Постановка задачи для первых коэффициентов после осуществления процедуры расщепления имеет вид:

$$\begin{aligned}
\bar{L} \rho^{(1)} &= \frac{{}^i D}{4} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \bar{L} \left(\frac{\partial \rho_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - {}^i D \frac{\partial \rho_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + \\
&+ \frac{{}^i D}{2} z \bar{L} \left(\frac{\partial \rho_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} + {}^i D \frac{\partial \rho_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + \\
&+ \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial \rho_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - {}^i D \frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right), \quad t > 0, r > 0, |z| < 1; \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial t} - \delta {}^i D \frac{\partial^2 \rho_2^{(1)}}{\partial z^2} + At \rho_2^{(1)} = 0, \quad t > 0, r > 0, z < -1; \quad (38)$$

$$\rho^{(1)}|_{z=1} = \rho^{(1)}|_{z=-1}, \quad \rho^{(1)}|_{z=-1} = \rho_2^{(1)}|_{z=-1}; \quad (39)$$

$$\rho^{(1)}|_{t=0} = 0, \quad \rho^{(1)}|_{t=0} = 0, \quad \rho_2^{(1)}|_{t=0} = 0; \quad (40)$$

$$\rho^{(1)}|_{r \rightarrow +\infty} = 0, \quad \rho^{(1)}|_{r+z \rightarrow +\infty} = 0, \quad \rho_2^{(1)}|_{r+|z| \rightarrow +\infty} = 0; \quad (41)$$

$$\rho^{(1)}|_{r=0} = 0, \quad (42)$$

где использован оператор $\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{Pt}{r} \frac{\partial}{\partial r} + At$.

Поскольку первый коэффициент разложения зависит от z , то условию (42) удовлетворить невозможно, поэтому на первом этапе решения оно должно быть ослаблено. Это возможно согласно следующим соображениям. Решение в нулевом приближении описывает средние значения и справедливо для больших и малых времен. Первое приближение является поправкой к нулевому. Поправка может быть найдена путём использования видоизменённых граничных условий в задаче для первых коэффициентов. Впрочем, согласно теории эти условия могут быть восстановлены с помощью пограничных функций. Область высокой точности расчётов при этом меняется. Для определения области высокой точности необходимо решение задачи для остаточного члена, на основании которого и делается заключение о точности первого приближения. Построение точного решения задачи для остаточного члена представляет существенные трудности, поэтому исследована задача, усредненная по толщине пласта.

Постановка усредненной задачи для остаточного члена представляется как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} &= -At\theta_1, \quad t > 0, \quad r > 0, \quad z > 1; \\ \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial t} + \gamma \frac{Pt}{r} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial r} + At \langle \theta \rangle - \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - {}^2D \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) &= \\ = - \varepsilon \left(\hat{L} \langle \rho^{(1)} \rangle - \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial \rho_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - {}^2D \frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) \right); & \\ t > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1; & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= \frac{{}^iD}{4\gamma} \sqrt{\frac{At}{\delta}} \exp\left(-\frac{At}{2\gamma Pt} r^2\right) \Phi\left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right) \left[\frac{2(1+\sqrt{{}^2D})}{\sqrt{\pi} \sqrt{At(t-r^2/2\gamma Pt)}} \left(\frac{(1-\sqrt{{}^2D}+{}^2D)\delta^2 r^4}{24\gamma^2 Pt^2(t-r^2/2\gamma Pt)} + \left(\frac{1}{6} - \frac{z^2}{2} - z \frac{1-\sqrt{{}^2D}}{1+\sqrt{{}^2D}} \right) \right) \right] \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(1+\sqrt{{}^2D})^2 \delta^2 r^4}{64\gamma^2 Pt^2(t-r^2/2\gamma Pt)} - At \left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right)\right) + \exp\left(\frac{\sqrt{At\delta}(1+\sqrt{{}^2D})}{4\gamma Pt} r^2\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{(1+\sqrt{{}^2D})\delta r^2}{8\gamma Pt \sqrt{t-r^2/2\gamma Pt}} + \sqrt{At \left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt}\right)}\right) \times \\ &\times \left(\sqrt{At\delta} \frac{1-\sqrt{{}^2D}+{}^2D}{3\gamma Pt} r^2 - (1+\sqrt{{}^2D}) \left(\frac{1}{6} - \frac{z^2}{2} - z \frac{1-\sqrt{{}^2D}}{1+\sqrt{{}^2D}} \right) \right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{At\delta}(1+\sqrt{{}^2D})}{4\gamma Pt} r^2\right) \times \quad (45) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \delta {}^2D \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} = -At\theta_2, \quad t > 0, \quad r > 0, \quad z < -1;$$

$$\langle \theta \rangle = \theta_1|_{z=1} = \theta_2|_{z=-1}, \quad \langle \theta \rangle|_{r=0} = -\varepsilon \langle \rho^{(1)} \rangle|_{r=0};$$

$$\langle \theta \rangle|_{t=0} = 0, \quad \theta_1|_{t=0} = 0, \quad \theta_2|_{t=0} = 0;$$

$$\langle \theta \rangle|_{r \rightarrow +\infty} = 0, \quad \theta_1|_{r+z \rightarrow +\infty} = 0, \quad \theta_2|_{r+|z| \rightarrow +\infty} = 0.$$

Установлено, что эта задача имеет тривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\langle \rho^{(1)} \rangle|_{r=0} = 0; \quad (43)$$

$$\hat{L} \langle \rho^{(1)} \rangle - \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial \rho_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - {}^2D \frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) = 0. \quad (44)$$

Можно показать, что (44) выполняется тождественно. Таким образом, для того чтобы усредненная задача для остаточного члена имела тривиальное решение, достаточно выполнения условия (43). Это условие использовано вместо (42) в задаче для первого коэффициента разложения (36)-(42).

Построенное таким образом асимптотическое разложение обладает важным свойством, заключающимся в том, что среднее значение остаточного члена обращается в нуль. Это, естественно, повышает ценность решения для практических приложений. В силу этого целесообразно в асимптотических решениях выделить рассматриваемый класс решений. Асимптотическое приближение задачи (11)-(18), построенное при условии, что решение усредненной задачи для остаточного члена является тривиальным, назовем *точным в среднем асимптотическим решением*.

Задача для первых коэффициентов решена операционным методом. В качестве примера приведем выражение для первого коэффициента асимптотического разложения решения только для пористого пласта:

$$\times \operatorname{erfc} \left(\frac{\delta(1 + \sqrt{i^2 D})}{8\gamma Pt \sqrt{t - r^2/2\gamma Pt}} r^2 - \sqrt{\operatorname{At} \left(t - \frac{r^2}{2\gamma Pt} \right)} \left(\sqrt{\operatorname{At} \delta \frac{1 - \sqrt{i^2 D} + i^2 D}{3\gamma Pt}} r^2 + (1 + \sqrt{i^2 D}) \left(\frac{1}{6} - \frac{z^2}{2} - z \frac{1 - \sqrt{i^2 D}}{1 + \sqrt{i^2 D}} \right) \right) \right),$$

$r > 0, t > 0, |z| < 1.$

Решение нестационарной задачи (11)-(18) в асимптотическом приближении представляется суммой выражений (35), (45) в пласте и соответствующими – для окружающих сред:

$$\rho_i = \rho_i^{(0)} + \varepsilon \rho_i^{(1)}.$$

Полученное решение входит в функцию плотности источника тепла в задаче теплопереноса.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В НУЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Решение задачи теплопереноса (19)-(26) также отыскивается в виде асимптотических разложений по параметру ε с остаточным членом

$$T_i = T_i^{(0)} + \varepsilon T_i^{(1)} + \dots + \varepsilon^n T_i^{(n)} + \theta_i^{(n)}.$$

При решении задачи полагается, что температурное поле в окружающих породах обусловлено только теплообменом с пластом, в который осуществляется закачка. Фактически это означает пренебрежение вкладом энергии, выделяющейся при радиоактивном распаде, в температурное поле в покрывающем и подстилающем пластах. Это оправдано тем, что величина продифундировавшего в окружающую среду радиоактивного вещества пренебрежимо мала. Также можно пренебречь кондуктивным переносом тепла по сравнению с конвективным.

Постановка задачи в нулевом приближении получена после осуществления процедуры расщепления:

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} + \int_0^f \chi \frac{Pt}{r} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \frac{i}{2} \chi \left(\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - {}_2^i \Lambda \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) =$$

$$= \operatorname{At} \rho^{(0)}, t > 0, r > 0, |z| < 1; \quad (46)$$

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_1^{(0)}}{\partial z^2} = 0, t > 0, r > 0, z > 1; \quad (47)$$

$$\frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial t} - {}_2^i \Lambda \frac{i}{2} \chi \frac{\partial^2 T_2^{(0)}}{\partial z^2} = 0, t > 0, r > 0, z < -1; \quad (48)$$

$$T^{(0)} \Big|_{r=0} = \phi_0, T^{(0)} = T_1^{(0)} \Big|_{z=1} = T_2^{(0)} \Big|_{z=-1}; \quad (49)$$

$$T^{(0)} \Big|_{t=0} = 0, T_1^{(0)} \Big|_{t=0} = 0, T_2^{(0)} \Big|_{t=0} = 0; \quad (50)$$

$$T^{(0)} \Big|_{r \rightarrow +\infty} = 0, T_1^{(0)} \Big|_{r+z \rightarrow +\infty} = 0, T_2^{(0)} \Big|_{r+|z| \rightarrow +\infty} = 0. \quad (51)$$

Слагаемое в правой части уравнения (46) устанавливает изменение температуры в результате энергии, выделяющейся при радиоактивном распаде.

Решение задачи (46)-(51) найдено методом интегральных преобразований Лапласа-Карсона:

$$T^{(0)} = \phi_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{{}_1^i \chi \left(1 + \sqrt{{}_1^2 \Lambda_1^2 \chi} \right) r^2}{8 Pt \sqrt{t - r^2/2 {}_0^f \chi Pt}} \right) \Phi \left(t - r^2/2 {}_0^f \chi Pt \right) +$$

$$+ \frac{\operatorname{At}}{{}_0^f \chi Pt} \int_0^r \frac{d}{dt} \int_0^t r' \rho^{(0)}(r', \tau) \operatorname{erfc} \left(\frac{{}_1^i \chi \left(1 + \sqrt{{}_1^2 \Lambda_1^2 \chi} \right) (r^2 - r'^2)}{8 Pt \sqrt{t - \tau - (r^2 - r'^2)/2 {}_0^f \chi Pt}} \right) \Phi \left(t - \tau - \frac{r^2 - r'^2}{2 {}_0^f \chi Pt} \right) d\tau dr', |z| < 1; \quad (52)$$

$$T_1^{(0)} = \phi_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{{}_1^i \chi \left(1 + \sqrt{{}_1^2 \Lambda_1^2 \chi} \right) r^2 + 4 Pt (z - 1)}{8 Pt \sqrt{t - r^2/2 {}_0^f \chi Pt}} \right) \Phi \left(t - r^2/2 {}_0^f \chi Pt \right) +$$

$$+ \frac{\operatorname{At}}{{}_0^f \chi Pt} \int_0^r \frac{d}{dt} \int_0^t r' \rho^{(0)}(r', \tau) \operatorname{erfc} \left(\frac{{}_1^i \chi \left(1 + \sqrt{{}_1^2 \Lambda_1^2 \chi} \right) (r^2 - r'^2) + 4 Pt (z - 1)}{8 Pt \sqrt{t - \tau - (r^2 - r'^2)/2 {}_0^f \chi Pt}} \right) \Phi \left(t - \tau - \frac{r^2 - r'^2}{2 {}_0^f \chi Pt} \right) d\tau dr', z > 1;$$

$$T_2^{(0)} = \phi_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{{}_1^i \chi \left(1 + \sqrt{{}_1^2 \Lambda_1^2 \chi} \right) r^2 - 4 Pt \sqrt{{}_2^1 \Lambda_2^2 \chi} (z + 1)}{8 Pt \sqrt{t - r^2/2 {}_0^f \chi Pt}} \right) \Phi \left(t - r^2/2 {}_0^f \chi Pt \right) +$$

$$+ \frac{\operatorname{At}}{{}_0^f \chi Pt} \int_0^r \frac{d}{dt} \int_0^t r' \rho^{(0)}(r', \tau) \operatorname{erfc} \left(\frac{{}_1^i \chi \left(1 + \sqrt{{}_1^2 \Lambda_1^2 \chi} \right) (r^2 - r'^2) - 4 Pt \sqrt{{}_2^1 \Lambda_2^2 \chi} (z + 1)}{8 Pt \sqrt{t - \tau - (r^2 - r'^2)/2 {}_0^f \chi Pt}} \right) \Phi \left(t - \tau - \frac{r^2 - r'^2}{2 {}_0^f \chi Pt} \right) d\tau dr', z < -1.$$

Можно показать, что усредненная по z в пределах несущего пласта параметризованная задача совпадает с задачей (46)-(51) для нулевого приближения температуры. Поэтому из единственности решения следует $\langle T \rangle = T^{(0)}$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Математическая постановка задачи для первых коэффициентов разложения имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} + \frac{f}{o} \chi \frac{Pt}{r} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} - \frac{i}{o} \chi \left(\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - {}^2_i \Lambda \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) \right] = \frac{i}{o} \Lambda \left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{6} \right) \left({}^o_i \chi \text{At} \int_{-1}^1 \widehat{L}_1 \rho(z') dz' + \widehat{L}_1 \left(\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} - {}^2_i \Lambda \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) \right) + \\ & + z \frac{{}^i \Lambda_o \chi}{2} \text{At} \left(\int_0^1 \widehat{L}_1 \rho(z') dz' - \int_{-1}^0 \widehat{L}_1 \rho(z') dz' \right) - {}^i \Lambda_o \chi \text{At} \int_0^z dz' \int_0^{z'} \widehat{L}_1 \rho(z'') dz'' + z \frac{{}^i \Lambda_o \chi}{2} \widehat{L}_1 \left(\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=1} + {}^2_i \Lambda \frac{\partial T_2^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=-1} \right) + \\ & + \frac{{}^i \Lambda_o \chi}{2} \text{At} \int_{-1}^1 dz' \int_0^{z'} dz'' \int_0^{z''} \widehat{L}_1 \rho(z''') dz''', \quad t > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1; \end{aligned} \quad (55)$$

$$T^{(1)} \Big|_{z=1} = T_1^{(1)} \Big|_{z=1}, \quad T^{(1)} \Big|_{z=-1} = T_2^{(1)} \Big|_{z=-1}; \quad (56)$$

$$T^{(1)} \Big|_{t=0} = T_1^{(1)} \Big|_{t=0} = T_2^{(1)} \Big|_{t=0} = 0; \quad (57)$$

$$T^{(1)} \Big|_{r \rightarrow +\infty} = 0, \quad T_1^{(1)} \Big|_{r+z \rightarrow +\infty} = 0, \quad T_2^{(1)} \Big|_{r+|z| \rightarrow +\infty} = 0; \quad (58)$$

$$T^{(1)} \Big|_{r=0} = 0, \quad (59)$$

где использован оператор $\widehat{L}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{f}{o} \chi \frac{Pt}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad r > 0, \quad z > 1; \quad (53)$$

$$\frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial t} - {}^2_i \Lambda \frac{\partial^2 T_2^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad t > 0, \quad r > 0, \quad z < -1; \quad (54)$$

Аналогично задаче массопереноса получено дополнительное интегральное условие для точного в среднем решения:

$$\langle T^{(1)} \rangle \Big|_{r=0} = 0. \quad (60)$$

Решение задачи (53)-(58) с условием (60) найдено операционным методом. Приведем выражение только для пористого пласта:

$$\begin{aligned} T^{(1)} = & \frac{{}^i \Lambda_o}{2} \left[\left(\frac{1}{6} - \frac{z^2}{2} \right) \left(1 + \sqrt{{}^2_i \Lambda_i^2 \chi} \right) - z \left(1 - \sqrt{{}^2_i \Lambda_i^2 \chi} \right) \right] \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{T^{(0)}(r, \tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau + z \frac{{}^i \Lambda_o \chi}{2} \text{At} \left(\int_0^1 \rho(z') dz' - \int_{-1}^0 \rho(z') dz' \right) + \\ & + \frac{1}{{}^f_o \chi Pt} \int_0^r dt \int_0^t \frac{r'}{\sqrt{\pi(t-\tau - (r^2 - r'^2)/2^f_o \chi Pt)}} \left[\frac{{}^i \Lambda_o \chi \left(1 + ({}^2_i \Lambda_i^2 \chi)^{3/2} \right) (r^2 - r'^2)}{24^f_i \chi Pt (t-\tau - (r^2 - r'^2)/2^f_o \chi Pt)} T^{(0)}(r', \tau) - q_1(r', \tau) \right] \times \\ & \times \exp \left(- \frac{\left[\left(1 + \sqrt{{}^2_i \Lambda_i^2 \chi} \right) (r^2 - r'^2) \right]^2}{64^f_i \chi^2 Pt^2 (t-\tau - (r^2 - r'^2)/2^f_o \chi Pt)} \right) \Phi \left(t - \tau - \frac{r^2 - r'^2}{2^f_o \chi Pt} \right) d\tau dr' + {}^i \Lambda_o \chi \text{At} \int_0^z dz' \int_0^{z'} \left(\rho^{(0)} - \rho(z'') \right) dz'' - \\ & - \frac{1}{{}^f_o \chi Pt} \int_0^r dt \int_0^t r' q_2(r', \tau) \text{erfc} \left(\frac{\left(1 + \sqrt{{}^2_i \Lambda_i^2 \chi} \right) (r^2 - r'^2)}{8^f_i \chi Pt \sqrt{t-\tau - (r^2 - r'^2)/2^f_o \chi Pt}} \right) \Phi \left(t - \tau - \frac{r^2 - r'^2}{2^f_o \chi Pt} \right) d\tau dr', \quad r > 0, \quad |z| < 1, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} q_1(r, t) = & \frac{{}^i \Lambda_o}{4} \text{At} \left(1 + \sqrt{{}^2_i \Lambda_i^2 \chi} \right) \rho^{(0)}(r, t) + \frac{{}^i \Lambda_o}{4} \text{At} \left(1 - \sqrt{{}^2_i \Lambda_i^2 \chi} \right) \left(\int_0^1 \rho(z') dz' - \int_{-1}^0 \rho(z') dz' \right) - \\ & - \frac{{}^i \Lambda_o}{2} \text{At} \left(\int_0^1 dz' \int_0^{z'} \rho(z'') dz'' + \sqrt{{}^2_i \Lambda_i^2 \chi} \int_0^1 dz' \int_0^{z'} \rho(z'') dz'' \right), \quad q_2(r, t) = \frac{{}^i \Lambda_o \chi}{6} \text{At} \widehat{L}_1 \rho^{(0)}(r, t) - \frac{{}^i \Lambda_o \chi}{2} \text{At} \int_{-1}^1 dz' \int_0^{z'} dz'' \int_0^{z''} \widehat{L}_1 \rho(z''') dz'''. \end{aligned}$$

Решение задачи теплопереноса (19)-(26) в асимптотическом приближении представляется суммой выражений (52), (61) в пласте и соответствующими – для окружающих сред:

$$T_i = T_i^{(0)} + \varepsilon T_i^{(1)}.$$

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

При распространении радиоактивных отходов в пористом пласте образуются следующие зоны, определяемые физическими процессами, протекающими в жидкости и в скелете: зона загрязнения, зона

теплового возмущения и зона чистой воды, появляющаяся в результате оседания радионуклидов на скелете пласта. Предлагаемая математическая модель позволяет определить и сопоставить размеры указанных зон, что важно для практических приложений.

На основе решений (35), (52) установлены формулы для радиусов зоны радиоактивного заражения $R_p = \sqrt{2v'_0 r_0 \tau / ((1-m)K + m)}$ и зоны теплового возмущения $R_T = \sqrt{2c_f \rho_f v'_0 r_0 \tau / c \rho_n}$. Положение фронта закачиваемой жидкости в пренебрежении радиусом скважины находится согласно формуле $R_w = \sqrt{2v'_0 r_0 \tau / m}$. Если коэффициент Генри K равен нулю, то фронт закачиваемой жидкости совпадает с фронтом загрязнения $R_w = R_p$; при ненулевых же значениях K фронт радиоактивного загрязнения отстает от фронта закачиваемой жидкости, и образуется кольцевая зона с очищенной от примесей водой, размеры которой определяются по формуле:

$$\Delta R = R_w - R_p = \sqrt{2v'_0 r_0 \tau / m} \left(1 - \left((m^{-1} - 1)K + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Таким образом, подземные пористые пласты могут служить естественными фильтрами для очищения воды от различных примесей.

Из анализа области определения функции (52) получено соотношение

$$\left(\int_0^f \chi [(1-m)K + m] - 1 \right) r'^2 < R_T^2 - r^2,$$

на основе которого установлено, что при значениях коэффициента Генри, меньших некоторого критического $K < K_{кр}$, определяемого из равенства $\int_0^f \chi [(1-m)K + m] - 1 = 0$, фронт загрязнения опережает температурный, а при $K > K_{кр}$ — отстает. При этом критическое значение коэффициента Генри $K_{кр} = c_s \rho_s / c_f \rho_f$ не зависит от пористости. Поскольку коэффициенты Генри пористых пластов, как правило, многократно превышают соответствующие критические значения, то в реальных случаях температурный фронт значительно опережает фронт загрязнения. Отмеченное утверждение позволяет разработать метод прогнозирования распространения радиоактивных отходов в подземных глубоководных пластах на основе анализа кривых термокаротажа контрольных скважин.

Полученные выше результаты использованы для расчетов полей концентрации и температурных полей, возникающих при закачке радиоактивных растворов в пористые пласты.

На рис. 2 показаны графики зависимостей плотности радиоактивных примесей в пористом пласте для различных коэффициентов Генри. В расчетах принято: толщина пласта 20 м, время наблюдения $\tau = 3$ года, период полураспада $T_{1/2} = 1$ год., пористость $m = 0,15$, объемы закачки $V = 1500$ м³/сут.

Из рисунка видно, что распределение радиоактивных примесей в пласте существенно зависит от коэффициента Генри K .

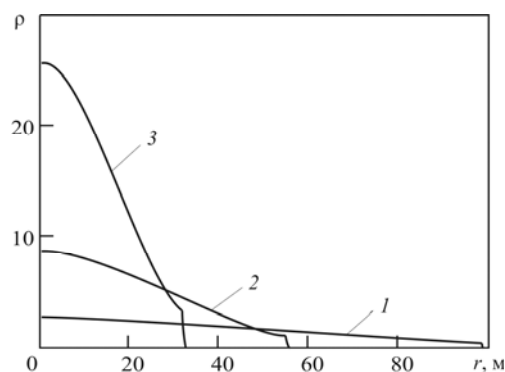


Рис. 2. Зависимость плотности радиоактивных примесей от радиальной координаты в пористом пласте для различных коэффициентов Генри: 1 — $K=3$; 2 — $K=10$; 3 — $K=30$

При больших значениях K радионуклиды вследствие осаждения на скелет в основном сосредоточены вблизи скважины, при этом их плотность превышает начальную плотность в закачиваемой жидкости в десятки раз, что может привести к подземному взрыву и выбросу загрязнителя на поверхность. Напротив, при малых значениях K происходит незначительное осаждение на скелет, что приводит к образованию больших зон заражения.

На рис. 3 приведены зависимости температуры в первом приближении в пористом пласте от радиальной координаты для радионуклидов с разными периодами полураспада.

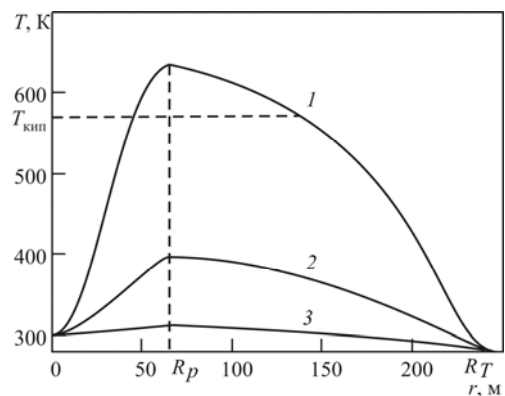


Рис. 3. Зависимость температуры от радиальной координаты в пористом пласте при $K > K_{кр}$ для различных периодов полураспада: 1 — $T_{1/2} = 1$ год, 2 — $T_{1/2} = 2$ года, 3 — $T_{1/2} = 30$ лет

В расчетах принято: толщина пласта 20 м, время наблюдения $\tau = 3$ года, объемы закачки $V = 1500$ м³/сут, температура закачиваемой жидкости $T_0 = 300$ К, естественная температура пласта $T_{\oplus} = 280$ К, начальная плотность радиоактивных примесей в закачиваемой жидкости $\rho_0 = 10^{-3}$ кг/м³, коэффициент Генри $K = 10$, что превышает критическое значение. На графике выделяются две харак-

терные зоны. Первая зона от $r=0$ до $r=R_p$ – радионуклидная зона, в которой температура определяется радиоактивным распадом загрязнителя и возрастает с увеличением расстояния до оси скважины. В интервале от $r=R_p$ до $r=R_T$ расположена зона температурных возмущений, свободная от радиоактивных примесей, в которой температура обусловлена главным образом конвективным выносом тепла из радионуклидной области.

На рис. 4 приведены аналогичные температурные зависимости для случая, когда коэффициент Генри $K = 0.1$ меньше критического.

В отличие от предыдущего в данном случае зона температурных возмущений меньше радионуклидной зоны $R_T < R_p$. Во второй зоне от $r=R_T$ до $r=R_p$ температурное поле обусловлено только распадом радионуклида, температурные возмущения вследствие конвективного переноса возмущений температуры из скважины локализованы только в первой зоне $r < R_T$.

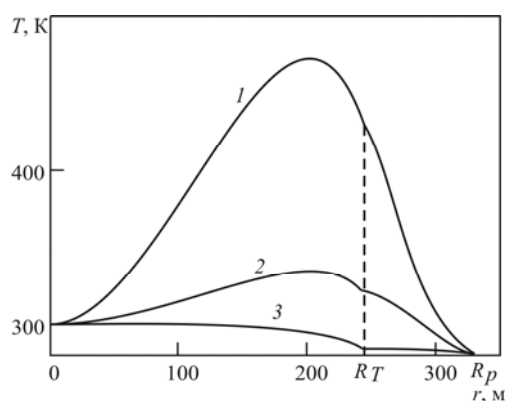


Рис. 4. Зависимость температуры от радиальной координаты в пористом пласте при $K < K_{кр}$. Обозначения те же, что и на рис. 3

Сравнение рис. 3 и 4 показывает, что температурные возмущения в первом случае (см. рис. 3)

оказываются существенно больше, что объясняется преобладающим локализованным выделением тепла вблизи радионуклидного фронта.

Горизонтальная пунктирная линия на рис. 3 соответствует температуре кипения воды при пластовом давлении в 100 атм. Поэтому при закачке высококонцентрированных радиоактивных отходов, приводящих к существенному температурному эффекту, необходимо учитывать фазовые переходы.

Итак, на основе асимптотического метода получено приближенное асимптотическое решение задачи о подземном захоронении отходов, которое позволяет обеспечить расчет температурных полей и полей концентрации радиоактивных примесей в подземных горизонтах с высокой точностью при любых расстояниях от нагнетательной скважины и тем самым уточнить прогноз радиоактивных загрязнений для обеспечения экологической безопасности.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Рыбальченко, М.К. Пименов, П.П. Костин и др. *Глубинное захоронение жидких радиоактивных отходов*. М.: «ИздАТ», 1994, 256 с.
2. А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, И.Н. Михайличенко, А.Г. Крупинов. Расчет полей концентрации при подземном захоронении растворенных радиоактивных веществ // *Экологические системы и приборы*. 2006, № 5, с. 27 – 33.
3. В.А. Диткин, А.П. Прудников. *Справочник по операционному исчислению*. М: «Высшая школа», 1965, 465 с.
4. А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, Д.А. Гюнтер, Д.В. Иванов «Точное в среднем» асимптотическое решение задачи о подземном захоронении радиоактивных отходов // *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, в. 2(28), 2007.
5. А.Б. Васильева, В.Д. Бутузов. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*. М.: «Наука», 1978, 208 с.

МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНІХ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛО- ТА МАСОПЕРЕНОСУ ПРИ ПІДЗЕМНОМУ ПОХОВАННІ РАДІОАКТИВНИХ ВІДХОДІВ

О.І. Філіппов, П.Н. Михайлов, Д.В. Іванов, Д.О. Гюнтер

На основі асимптотичного методу в нульовому та першому наближенні знайдені розрахункові формули для полів концентрації та температурних полів, що виникають при закачуванні розчинів радіоактивних речовин в пористі пласти глибокого залягання. Одержана формула для визначення критичного значення коефіцієнта Генрі $K_{кр}$. Показано, що при $K < K_{кр}$ фронт забруднення випереджує температурний фронт, а при $K > K_{кр}$ - відстає. Оскільки в реальних випадках $K > K_{кр}$, то можливий спосіб контролю над зоною зараження на основі вимірювання температури в контрольних свердловинах. Виявлено, що при будь-яких значеннях K утворюється зона очищеної води. Визначені параметри, від котрих залежить розмір цієї зони.

MODELING HEAT AND MASS MOVEMENT AT UNDERGROUND DISPOSAL OF LIQUID RADIOACTIVE WASTE

A.I. Filippov, P.N. Mikhailov, D.V. Ivanov, D.A. Guenter

The formulae for temperature and concentration fields appearing during liquid radioactive waste disposal in porous deeplying layers are found by the asymptotic method in zero and first approximations. The formula for critical value of Henry's parameter is determined, and the front of radioactive pollution outstrips temperature front at $K < K_{cr}$ and it lags behind at $K > K_{cr}$. There is an opportunity of the forecast for radioactive pollution expanding based on temperature measurement in porous layer through control wells. At any values of K there is a zone of the cleared water. Parameters on which the size of this zone depends are determined.