

## ОСОБЕННОСТИ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ВОЛНОВОДЕ С КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНОЙ ГОФРА

*Н.А. Азаренков, В.И. Ткаченко, И.В. Ткаченко*

*Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт",  
Харьков, Украина*

*E-mail: tkachenko@kipt.kharkov.ua*

Исследованы собственные аксиально-симметричные электромагнитные волны, распространяющиеся в гофрированном цилиндрическом волноводе, заполненном холодной магнитоактивной плазмой. Дисперсионное уравнение получено из условий удовлетворения граничным условиям решений уравнений Максвелла для плазменного волновода на гофрированной идеально проводящей металлической поверхности. Проанализирована, в том числе и численно, дисперсия гладкого магнитоактивного волновода при условии существования в нем симметричных электромагнитных волн. Показано, что при учете конечной величины гофра диагональные элементы бесконечной матрицы ограничены и записываются через функции Бесселя с явной зависимостью от величины гофра. Исходя из сходимости бесконечного определителя, получен функционал в виде бесконечного произведения, который несет в себе все основные дисперсионные свойства гофрированного плазменного волновода: при конечной величине глубины гофра ширина полос непрозрачности сравнима с частотой, а количество таких полос будет определяться степенью заполнения ими области существования собственных волн, ширина полос непрозрачности пропорциональна глубине гофра в степени, величина которой определяется количеством пересечений дисперсионных кривых на данной линии дисперсионной плоскости.

Теоретический и практический интерес к исследованию периодических вакуумных и плазмонных волноводов обусловлен возможностью их широкого использования в СВЧ-радиотехнике, например, в качестве фидерных линий в подвижных радиоустройствах [1], в ускорителях для создания линейных ускорителей электронов [2], а также при создании мощных генераторов и усилителей СВЧ-диапазона, принцип действия которых основан на использовании индуцированного черенковского излучения сильнооточных релятивистских электронных пучков [3]. Причем, плазменное заполнение и плавное изменение профиля волновода могут обеспечить более высокую их устойчивость к ВЧ-пробоям по сравнению с замедляющими системами других видов.

К настоящему времени достаточно полно теоретически и экспериментально изучены дисперсионные свойства слабо гофрированных вакуумных (см., например, [4,5]) и плазменных [6-8] волноводов. Однако учет конечности глубины гофрировки ограничивающего идеально проводящего волновода приводит к существенному изменению собственных частот системы, а также требует учета, в отличие от случая малой глубины гофра, бесконечного набора волн, который существует в таких волноводах.

Поэтому в настоящей работе исследуем особенности дисперсионных характеристик аксиально-симметричных электромагнитных волн, распространяющихся в магнитоактивной плазме, полностью заполняющей идеально проводящий металлический гофрированный волновод.

Предполагаем, что величина глубины гофра произвольна.

Поскольку в работе рассматриваются волновые процессы в плазме, расположенной в гофрированном идеально проводящем металлическом волноводе, то вполне естественно представить электромагнитные волны, существующие в плазме в виде бесконечных рядов по пространственным гармоникам. В указанных условиях решения уравнения Максвелла для компонент электрического и магнитного полей имеют вид:

$$\begin{aligned} E_r &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{3n}} \sum_{s=1}^2 \frac{\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2}{k_n^s} A_n^s J_1(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n} z} \\ E_\varphi &= -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{3n}} \sum_{s=1}^2 \frac{F_n^s}{k_n^s} A_n^s J_1(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n} z} \\ E_z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 A_n^s J_0(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n} z} \\ H_r &= \frac{\varepsilon_1}{k\varepsilon_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{F_n^s}{k_n^s} A_n^s J_1(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n} z} \\ H_\varphi &= -ik\varepsilon_3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{F_n^s}{k_n^s} A_n^s J_1(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n} z} \\ H_z &= \frac{i\varepsilon_1}{k\varepsilon_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{3n}} \sum_{s=1}^2 \frac{F_n^s}{k_n^s} A_n^s J_0(k_n^s r) \cdot e^{ik_{3n} z} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь:  $k_{3n} = k_3 + \frac{2\pi \cdot n}{a} = k_3 + nk_0$ ;

$$\begin{aligned}
p_{1n} &= ((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2) - \varepsilon_2^2 k^2) / 2\varepsilon_1; \\
p_{2n} &= \varepsilon_3 ((\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2)^2 - \varepsilon_2^2 k^4) / \varepsilon_1; \\
(k_n^s)^2 &= p_{1n} \pm \sqrt{p_{1n}^2 - p_{2n}}; k = \omega/c; \\
F_n^s &= \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2) - (k_n^s)^2; \\
\varepsilon_1 &= 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_e}{\omega} \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2},
\end{aligned}$$

в выражении для  $k_n^s$  – верхний знак соответствует

$$s=1, \text{ нижний} - s=2; \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}; \quad \Omega_e^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}$$

ленгмюровская частота плазмы,  $\omega_e = \frac{eH_0}{m_e c}$  –

электронная циклотронная частота,  $n_0, m_e, H_0$  – равновесная плотность плазмы, масса электрона и напряженность постоянного внешнего магнитного поля соответственно;  $J_n(x)$  – функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка.

Полагаем зависимость радиуса гофрированного волновода от координаты  $z$  заданной уравнением:

$$R(z) = R_0(1 + \alpha \sin(k_0 z)), \quad \alpha \leq 1. \quad (2)$$

Решения (1) должны быть дополнены граничными условиями, которые в нашем случае заключаются в равенстве нулю тангенциальных компонент электрического поля:

$$E_\varphi \Big|_{r=R(z)} = 0 \quad (3)$$

и

$$E_z \Big|_{r=R(z)} + \frac{dR}{dz} E_r \Big|_{r=R(z)} = 0. \quad (4)$$

После применения граничных условий к решениям (1) можно получить бесконечную систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 A^s P^s = 0, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 A^s R^s = 0, \end{cases} \quad (5)$$

которую в матричном виде можно представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} P^1 & P^2 \\ p_n & p_n \\ R^1 & R^2 \\ r_n & r_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^s \\ A^s \end{bmatrix} = 0, \quad (6)$$

где:  $p, n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $X_n^s = k_n^s R_0$ ,

$$P_{pn}^s = \frac{F_n^s}{k_{3n}^s k_n^s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{1-l}(X_n^s) a_{n-p, l}^s(n),$$

$$R_{pn}^s = \left[ 1 + \frac{k_0(n-p)(\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2)}{k_{3n}^s (k_n^s)^2} \right] \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{-l}(X_n^s) a_{n-p, l}^s(n),$$

$$a_{p, l}^s(n) = (-1)^{l'} J_{p'-l'}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^s\right) \cdot \begin{cases} J_{p'+l'}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^s\right); p=2p', l=2l', \\ i \cdot J_{p'+l'+1}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^s\right); p=2p'+1, l=2l'+1. \end{cases}$$

Существование нетривиальных решений для амплитуд пространственных гармоник этой системы уравнений требует равенства нулю определителя квадратной блочной матрицы, состоящей из четырех квадратных блоков [9]:

$$\det \begin{bmatrix} P^1 & P^2 \\ R^1 & R^2 \\ p_n & p_n \end{bmatrix} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, решение задачи об исследовании дисперсионных характеристик симметричных электромагнитных волн идеально проводящего гофрированного по синусоидальному закону плазмонаполненного волновода сводится к исследованию бесконечного определителя (7).

## АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ГЛАДКОГО ВОЛНОВОДА

Анализ определителя (7) начнем со случая, когда глубина гофра равна нулю. В этом случае он преобразуется в квадратный:

$$\det \begin{bmatrix} P_{00}^1 & P_{00}^2 \\ R_{00}^1 & R_{00}^2 \end{bmatrix} = 0,$$

а его раскрытие приводит к дисперсионному уравнению:

$$D_{00} = \frac{F_0^1 J_1(X_0^1)}{X_0^1 J_0(X_0^1)} - \frac{F_0^2 J_1(X_0^2)}{X_0^2 J_0(X_0^2)} = 0. \quad (8)$$

Полученное дисперсионное уравнение соответствует граничным условиям:

$$E_\varphi \Big|_{r=R_0} = E_z \Big|_{r=R_0} = 0.$$

Можно показать, что одним из решений уравнения (8) являются следующие соотношения, определяющие дискретные значения продольного волнового числа  $k_3$  через параметры волновода:

$$k_3^{(1)} = \left( \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} k^2 - \frac{\varepsilon_1(\gamma_{0,k}^2 + \gamma_{0,m}^2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

$$k_3^{(2)}{}_{1,2} = \left( \varepsilon_1 k^2 \pm (\varepsilon_2^2 k^4 + \frac{\varepsilon_1 \gamma_{0,k}^2 \gamma_{0,m}^2}{\varepsilon_3 R_0^4})^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

где:  $\gamma_{0,1} < \gamma_{0,2} < \gamma_{0,3} < \gamma_{0,4} \dots < \gamma_{0,n} \dots$  – последовательность положительных нулей функции

$J_0(z)$ , расположенных в порядке возрастания с ростом индекса  $n$  [10].

К решениям (9)-(10) необходимо добавить решения, соответствующие равенству  $X_0^1 = X_0^2$ .

В отсутствие внешнего магнитного поля симметричная электромагнитная волна (9)-(10) разделяется на  $E$ - и  $H$ -волны с компонентами полей:  $E_r, H_\varphi, E_z$  и  $H_r, E_\varphi, H_z$  соответственно [11]. При этом дисперсии разделившихся волн описываются уравнениями:

$$\omega_{ik} = \left( k_3^2 c^2 + \Omega_e^2 + \frac{\gamma_{i,k}^2}{R_0} \cdot c^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

где:  $i=0$  соответствует быстрой  $E$ -волне, а  $i=1$  – быстрой  $H$ -волне ( $\beta_\Phi = \omega/k_3 c > 1$ ).

В конечном магнитном поле ( $\varepsilon_2^2 > 0$ ) волны не разделяются. На Рис.1 и 2 приведены два вида типичных дисперсионных зависимостей  $y = k_3 R_0$  от безразмерной переменной  $x = \omega/\Omega_e$  и параметров волновода:  $R = \Omega_e R_0/c$ ,  $H = \omega_e/\Omega_e$ .

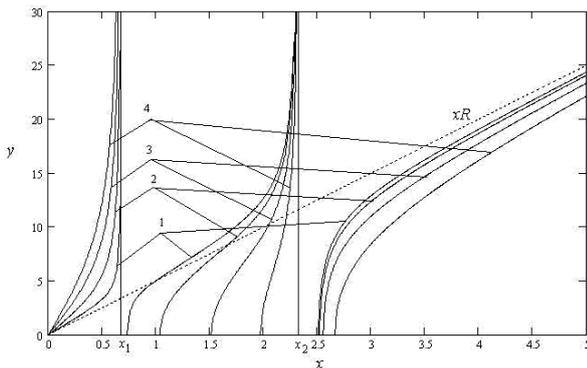


Рис.1. Дисперсионные кривые, полученные из уравнения (9)

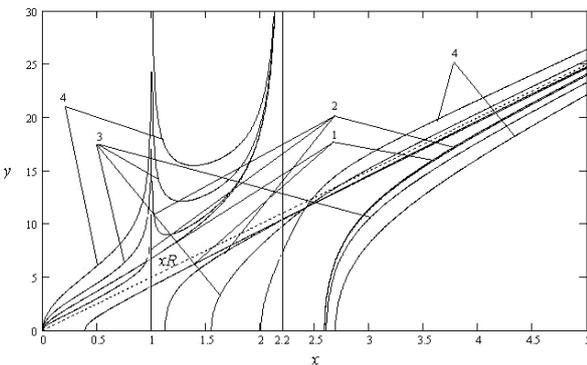


Рис.2. Дисперсионные кривые, полученные из уравнения (10)

На Рис.1 приведены дисперсионные кривые, определяемые уравнением (9). Здесь асимптотами являются прямые  $x_1 = \sqrt{\frac{1+H^2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1+H^4}$  и

$x_2 = \sqrt{\frac{1+H^2}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1+H^4}$ . При общих значениях

параметров  $R = 5$ ,  $H = 2,2$  пронумерованные кривые соответствуют набору корней: 1 –  $\gamma_{1,k} = \gamma_{1,m} = 0$ ; 2 –  $\gamma_{1,k} = \gamma_{1,m} = \gamma_{1,1}$ ; 3 –  $\gamma_{1,k} = \gamma_{1,m} = \gamma_{1,2}$ ; 4 –  $\gamma_{1,k} = \gamma_{1,m} = \gamma_{1,3}$ .

В промежутках между кривыми 1-2; 2-3; 3-4 проходят дисперсионные кривые, определяемые корнями  $\gamma_{0,k}, \gamma_{0,m}$ , но на рисунке они не показаны.

На Рис.2 приведены дисперсионные кривые, соответствующие уравнению (10) при тех же параметрах, что и на Рис.1.

В дальнейшем нас будут интересовать «кроссинги», которые появляются из-за наличия гофрировки в системе. Поэтому исследуем дисперсионное уравнение гофрированного волновода (7).

### АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ГОФРИРОВАННОГО ВОЛНОВОДА

Определим сначала вид диагональных элементов блоков матрицы (6). Эти элементы определяются следующими выражениями:

$$P_{nn}^S = \frac{F_n^S}{k_{3n}^S} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{1-l}(X_n^S) a_{0,l}^S(n)$$

$$R_{nn}^S = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{-l}(X_n^S) a_{0,l}^S(n), \quad (12)$$

где:

$$a_{0,l}^S(n) = (-1)^l J_{l'}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^S\right) \cdot \begin{cases} J_{l'}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^S\right); & l = 2l', \\ i \cdot J_{l'+1}\left(\frac{\alpha}{2} X_n^S\right); & l = 2l'+1, \end{cases}$$

Для вычисления диагональных матричных элементов (12) рассмотрим производящую сумму:

$$S(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_l(x) J_l^2(y), \quad (13)$$

где:  $x = X_n^S$ ,  $y = \frac{\alpha}{2} X_n^S$ .

Сумма (13) может быть просто выражена через функции Бесселя [10]:

$$S(x, y) = J_0\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + (2y)^2}}{2}\right) \cdot J_0\left(\frac{x - \sqrt{x^2 + (2y)^2}}{2}\right). \quad (14)$$

При малых значениях  $\alpha$  диагональные матричные элементы могут быть представлены простыми выражениями, которые соответствуют гладкому волноводу:

$$P_{nn}^S = \frac{F_n^S}{k_{3n}^S} J_1(X_n^S) \text{ и } R_{nn}^S = J_0(X_n^S), \quad (15)$$

с той лишь разницей, что в спектре (15), в отличие от гладкого волновода, присутствуют «Флоке» моды – набор гармоник по продольному волновому числу.

Диагональные матричные элементы (12) могут быть вычислены из производящей суммы. При конечных значениях глубины гофра диагональные матричные элементы можно представить в виде:

$$P_{nn}^S = \frac{F_n^S}{k_{3n}^S} (S_1(x, y) + iS_2(x, y)),$$

$$R_{nn}^S = S(x, y) + iS_3(x, y), \quad (16)$$

$$\text{где: } S_1(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(x) J_l^2(y),$$

$$S_2(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(x) J_l(y) J_{l+1}(y),$$

$$S_3(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l+1} J_{2l+1}(x) J_l(y) J_{l+1}(y).$$

Можно показать, что бесконечные суммы в (16) просто выражаются через производящую функцию:

$$S_1(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} S(x, y), \quad S_2(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} S(x, y), \text{ а сумма}$$

$$S_3(x, y) \text{ равна нулю: } S_3(x, y) = 0.$$

Для исследования дисперсионного уравнения симметричных электромагнитных волн идеально проводящего гофрированного по синусоидальному закону плазмонаполненного волновода рассмотрим бесконечный определитель (7). Поступая аналогично [12-16] преобразуем бесконечный определитель  $2n$ -го порядка (7) к определителю  $n$ -го порядка [9]:

$$\det \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{pk}^1 R_{kn}^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{pk}^2 R_{kn}^1 \right] = 0. \quad (17)$$

В приведенной выше записи диагональные элементы определителя (17) равны

$$P_{kk} = P_{kk}^1 R_{kk}^2 - P_{kk}^2 R_{kk}^1. \quad (18)$$

В отсутствие гофра ( $\alpha \rightarrow 0$ ) диагональный матричный элемент связан с дисперсионным уравнением (8):  $P_{00} = J_0(X_0^1) J_0(X_0^2) D_{00}$ .

Вынесем из (17) диагональные элементы в виде множителей. Тогда (17) преобразуется к виду:

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} P_{nn} \det \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{P_{nl}^1 R_{lm}^2 - P_{nl}^2 R_{lm}^1}{P_{nn}} \right] = 0, \quad (19)$$

где диагональными элементами нового определителя являются единицы.

Потребуем, чтобы вновь полученный определитель в (19) сходил. Бесконечный определитель сходится, если произведение диагональных элементов и сумма недиагональных элементов сходятся абсолютно [17]. Отсюда следует, что должно сходиться бесконечное произведение:

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \left( 1 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{P_{nl}^1 R_{lm}^2 - P_{nl}^2 R_{lm}^1}{P_{nn}} \right| \right) = P. \quad (20)$$

Просуммировав уравнение (20) сначала по  $m$ , а затем по  $l$ , получим:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{lm}^S = J_0(X_n^S) - i\alpha X_n^S \frac{k_0 (\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2)}{k_{3n} (k^S)^2} J_1(X_n^S), \quad (21)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} P_{nl}^S = \frac{F_n^S}{k_{3n} k_n^S} J_1(X_n^S). \quad (22)$$

В итоге, после подстановки (21)-(22) в (20) и

требования малости соотношений (18), числитель в бесконечном произведении (20) будет иметь вид:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (P_{nl}^1 R_{lm}^2 - P_{nl}^2 R_{lm}^1) = \alpha \frac{k_0 R_0 (\varepsilon_1 k^2 - k_{3n}^2)}{k_{3n}^2 k_n^1 k_n^2} \times \\ \times ((k_n^1)^2 - (k_n^2)^2) J_0(X_n^1) J_0(X_n^2) \equiv \Delta_n. \quad (23)$$

Из сходимости (20) нетрудно показать, что должно сходиться и частное произведение:

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Delta_n}{P_{nn}} \right| = P' < P, \quad (24)$$

где:  $P'$  – новая константа;

$$P_{nn} = \frac{G_n}{k_{3n}} \left\{ \frac{b_-}{b_+ + b_-} \left[ \frac{F_n^2 J_1(a_{n,-}^2)}{k_n^2 J_0(a_{n,-}^2)} - \frac{F_n^1 J_1(a_{n,-}^1)}{k_n^1 J_0(a_{n,-}^1)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{b_+}{b_+ + b_-} \left[ \frac{F_n^1 J_1(a_{n,+}^1)}{k_n^1 J_0(a_{n,+}^1)} - \frac{F_n^2 J_1(a_{n,+}^2)}{k_n^2 J_0(a_{n,+}^2)} \right] + \right. \\ \left. + i \frac{\sqrt{b_+ b_-}}{b_+ + b_-} \left[ \frac{F_n^1}{k_n^1} \left( \frac{J_1(a_{n,-}^1)}{J_0(a_{n,-}^1)} + \frac{J_1(a_{n,+}^1)}{J_0(a_{n,+}^1)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{F_n^2}{k_n^2} \left( \frac{J_1(a_{n,-}^2)}{J_0(a_{n,-}^2)} + \frac{J_1(a_{n,+}^2)}{J_0(a_{n,+}^2)} \right) \right] \right\}; \\ a_{n,\pm}^S = \frac{X^S}{2} b_{\pm}^S; \quad b_{\pm}^S = \sqrt{1 + \alpha^2} \pm 1; \\ G_n = \prod_{s=1}^2 J_0(a_{n,+}^s) J_0(a_{n,-}^s).$$

Таким образом, из бесконечного детерминанта (7) получен функционал, который содержит в себе основные свойства волнового спектра гофрированного плазменного волновода.

## АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО ИЗ БЕСКОНЕЧНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Прежде всего, необходимо отметить, что при малых значениях глубины гофра  $P_{nn}$  переходит в дисперсионные уравнения для Флоке-мод, которые связаны между собой через малый параметр  $\alpha$  и образуют полосы непрозрачности [12-16] в дисперсионной плоскости  $(\omega, k)$  вдоль линий  $1/K$ -кратного пересечения дисперсионных кривых (линия определяется равенством  $\omega = \Omega_K$ , а ее номер – числом  $K$ ). Число кратности  $1/K$  задается следующим образом: целая кратность ( $n \rightarrow \infty$ ,  $K = 1$ ) – линия, на которой пересекаются все дисперсионные кривые; половинная кратность ( $n/2 \rightarrow \infty$ ,  $K = 2$ ) – линия, на которой пересекаются дисперсионные кривые через одну;  $1/3$ -кратность ( $n/3 \rightarrow \infty$ ,  $K = 3$ ) – линия, на

которой пересекаются дисперсионные кривые через две;  $1/P$ -кратность ( $n/P \rightarrow \infty, K = P$ ) – линия, на которой пересекаются дисперсионные кривые через  $P-1$  и т.д. Ширина  $1/P$ -кратной полосы непрозрачности определяется из (24) и по величине пропорциональна  $\alpha^P$ .

При конечных значениях глубины гофра выражение (24) также справедливо. При этом, например, ширина первой полосы непрозрачности определяется из уравнения:

$$|P_{00}| = \pm i |\Delta_0|, \quad (25)$$

где в правой части уравнения следует выбирать знак, соответствующий затухающим решениям.

Выражение (25) также может быть получено из предположения о том, что в точке пересечения дисперсионных кривых бесконечной кратности все диагональные матричные элементы равны между собой и одного порядка малости:  $P_{nn} \approx 0$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а все элементы числителя также могут быть выражены через  $\Delta_0$ :  $\Delta_n \approx \Delta_0$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Нетрудно показать, что одними из решений  $P_{nn} \approx 0$  являются:

$$(k_{3n})_1 = \left( \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} k^2 - \frac{4\varepsilon_1(\gamma_{1,k}^2 + \gamma_{1,m}^2)}{b_+^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

$$(k_{3n})_2 = \left( \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} k^2 - \frac{4\varepsilon_1(\gamma_{1,l}^2 + \gamma_{1,i}^2)}{b_-^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

при условии выполнения соотношений:

$$\frac{\sqrt{1 + \alpha^2} - 1}{\sqrt{1 + \alpha^2} + 1} = \frac{\gamma_{1,l}}{\gamma_{1,k}} = \frac{\gamma_{1,i}}{\gamma_{1,m}}. \quad (28)$$

Уравнение (25) допускает существование двух первых полос непрозрачности шириной  $(\Delta\omega)_{\pm}$ :

$$(\Delta\omega)_{\pm} = -i \left| \Delta_0 \right| \left/ \left( \frac{d|P_{00}|}{d\omega} \right) \right|_{\omega = \Omega_1^{\pm}},$$

которые расположены вдоль частотных линий  $\omega = \Omega_1^{\pm}$ :

$$\sqrt{2} \frac{\Omega_1^{\pm}}{\Omega_e} = \left( 1 + H^2 \pm \sqrt{1 + H^4 + \frac{2}{1 + 2g} H^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (29)$$

где:  $g = b_+^2 \frac{k_0^2 R_0^2}{8\pi^2}$

Очевидно, что при конечной величине глубины гофра ширина полос непрозрачности будет сравнима с частотой, а количество таких полос будет определяться степенью заполнения ими области существования собственных волн

гофрированного плазмонаполненного волновода.

Из уравнения (25) можно получить характеристики высших полос непрозрачности ( $K > 1$ ), однако изучение этого вопроса является предметом дальнейших исследований.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Г. Белов, С.Б. Раевский. О расчете гофрированных волноводов // *Изв. вузов, Радиофизика*. 1975, т.18, №10, с. 523-1527.
2. О.А. Вальднер, Н.П. Собенин, Б.В. Зверев, И.С. Щедрин. *Справочник по диафрагмированным волноводам*. М.: «Атомиздат», 1977, 376 с.
3. В.А. Балакирев, Н.И. Карбушев, А.О. Островский, Ю.В. Ткач. *Теория черенковских усилителей и генераторов на релятивистских пучках*. Киев. «Наукова Думка», 1993, с.208.
4. Ю.А. Илларионов, С.Б. Раевский, В.Я. Сморгонский. *Расчет гофрированных и частично заполненных волноводов*. М.: «Сов. Радио», 1980. 200 с.
5. *Гибкие волноводы в технике СВЧ* / Под ред. Э.А. Альховского. М.: «Радио и связь», 1986. 128 с.
6. А.О. Островский, В.В. Огневенко. Дисперсия аксиально-симметричного плазменного волновода с синусоидально-гофрированными идеальнопроводящими стенками в сильном магнитном поле // *Радиотехника и электроника*. 1979, т.24, №12, с.2470-2474.
7. А.О. Островский. Дисперсия и картина поля аксиально-симметричной Е-волны в цилиндрическом волноводе с синусоидально-гофрированными проводящими стенками // *Вопросы атомной науки и техники. Серия «Ядерно-физические исследования»*. 1980, в.2, с.25-28.
8. Н.Е. Белов, Н.И. Карбушев, А.А. Рухадзе, С.Ю. Удовиченко. К теории релятивистского карсинотрона в условиях большого пространственного заряда // *Физика плазмы*. 1983, т.9, в.4. с.785-790.
9. Ф.Р. Гантмахер. *Теория матриц*. М.: «Наука», 1967, 576 с.
10. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, параболического цилиндра, ортогональные многочлены* / Серия «Справочная математическая библиотека», М.: «Наука», 1966, 296 с.
11. А.Н. Кондратенко. *Плазменные волноводы*. М.: «Атомиздат», 1976, 232 с.
12. V.I. Lapshyn, A.F. Stoyanov, V.I. Tkachenko, I.V. Tkachenko. Fractal properties of dispersion characteristics of sinusoidally rippled plasma waveguides // *Problems of Atomic Science and Technology. Series "Plasma Physics" (10)*. 2005, №1, p.137-139.
13. V.I. Lapshyn, A.F. Stoyanov, V.I. Tkachenko, I.V. Tkachenko. Calculation of dispersion characteristics of planar rippled plasmafilled waveguide // *Eureka-2004, Proc. of International Young Scientist Conference on Theoretical and Experimental Phys-*

- ics. 19-21 May 2004.- Lvov. p.62.
14. V.I. Lapshyn, A.F. Stoyanov, V.I. Tkachenko, I.V. Tkachenko. Fractal properties of dispersion characteristics of sinusoidally rippled plasma waveguide // *10 Міжнародна конференція - школа по фізиці плазми і керованому термоядерному синтезу*. Алушта (Крим), Україна. 2004, p.149.
15. V.I. Lapshyn, I.V. Tkachenko, V.I. Tkachenko. Peculiarities of E-waves Propagation in Rippled Plasma Waveguides // *Problems of Atomic Science and Technology. Ser. "Plasma Physics" (9)*. 2003, №1, p.89-91.
16. V.I. Tkachenko, I.V. Tkachenko. Dispersion Properties of a Radially Rippled Cylindrical Plasma Waveguide // *11-th International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion & 2-nd Alushta International Workshop on the Role of Electric Fields in Plasma Confinement in Stellarators and Tokamaks*. September 11-16, 2006, Alushta (Crimea), Ukraine. Book of Abstracts, p.182.
17. Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. *Курс современного анализа*. Ч. I. М.: «Государственное изд.-во физ.-мат. литературы», 1963, 343 с.  
Статья поступила в редакцию 09.06.2008 г.

## **FEATURES OF DISPERSIVE CHARACTERISTICS OF AXI-SYMMETRIC ELECTROMAGNETIC WAVES OF MAGNETOACTIVE PLASMA TAKING PLACE IN THE IDEALLY CONDUCTING WAVEGUIDE WITH FINIT DEPTH OF A RIPPLE**

*N.A. Azarenkov, V.I. Tkachenko, I.V. Tkachenko*

Own axi-symmetric electromagnetic waves propagation in the rippled cylindrical wave guide, filled by cold magnetoactive plasma are investigated. The dispersion equation is received from boundary conditions on a rippled ideally conducting metal surface of Maxwell's equations for a plasma waveguide. A dispersion relation of magnetoactive waveguide under condition of existence of symmetric electromagnetic waves is analyzed. It is shown, that at the account of finite size of the ripple the diagonal elements of an infinite matrix are limited and defines through the Bessel's functions with obvious dependence on the depth of the ripple. Proceeding from convergence of an infinite determinant, it is received function as an infinite product which has all basic dispersive properties of a rippled plasma waveguide: at a finite ripple depth the width of the forbidden band is comparable to frequency, and the amount of such bans are determined by a degree of a filling with them of area of own waves existence, the width of forbidden band is proportional to the ripple depth in a degree which value is determined by the amount of crossings of dispersive curves on the given line of a dispersive plane

## **ОСОБЛИВОСТІ ДИСПЕРСІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ МАГНІТОАКТИВНОЇ ПЛАЗМИ, ЩО ПЕРЕБУВАЄ В ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНОМУ ХВИЛЕВОДІ З КІНЦЕВОЮ ГЛИБИНОЮ ГОФРА**

*М.О. Азаренков, В.І. Ткаченко, І.В. Ткаченко*

Досліджено власні аксіально-симетричні електромагнітні хвилі, що поширюються в гофрованому циліндричному хвилеводі, заповненому холодною магнітоактивною плазмою. Дисперсійне рівняння отримане з умов задоволення граничним умовам рішень рівнянь Максвелла для плазмового хвилеводу на гофрованій ідеально провідній металевій поверхні. Проаналізовано, у тому числі і чисельно, дисперсію гладкого магнітоактивного хвилеводу за умови існування в ньому симетричних електромагнітних хвиль. Показано, що при врахуванні скінченної величини гофри діагональні елементи нескінченної матриці обмежені і записуються через функції Бесселя з явною залежністю від величини гофри. Виходячи зі збіжності нескінченного визначника, отриманий функціонал у вигляді нескінченного добутку, що несе в собі всі основні дисперсійні властивості гофрованого плазмового хвилеводу. При скінченій величині глибини гофра ширина смуг непрозорості порівняна з частотою, кількість таких смуг буде визначатися ступенем заповнення ними області існування власних хвиль, а ширина смуг непрозорості пропорційна глибині гофра в степені, величина якої визначається кількістю перетинань дисперсійних кривих на даній лінії дисперсійної площини.