14. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems/ J. Bennell, G. Scheithauer, Yu. Stoyan, T. Romanova // J. Annals of Operations Research, Publisher Springer Netherlands. – 2010. – № 179(1). – P. 343–368.
15. Chernov, N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Yu. Stoyan, T. Romanova // Computational Geometry: Theory and Appl. – 2010. – № 43 (5). – P. 533–553.
16. Phi-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov // Advances in Operations Research. –2012. – 26 p.
17. Optimal clustering of a pair of irregular objects / J. Bennell, G. Scheithauer, Y. Stoyan et al. // J. Global Optimisation. – 2015. –№ 61 (3). – P. 497–524.
18. Pankratov, A. V. Placement of non-convex polygons with rotations into a non-convex polygon / A. V. Pankratov, Yu. G. Stoyan // Proc. Workshop Cutting Stock Problems. – 2005. Alutus, Miercurea-Ciuc, Romania. – P. 29–36.
19. Wachter, A. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming/ A. Wachter, L. T. Biegler // Mathematical Programming. – 2006. – № 106 (1). – P. 25–57.
20. Stoyan, Yu. Cutting and Packing problems for irregular objects with continuous rotations: mathematical modeling and nonlinear optimization / Yu. Stoyan, A. Pankratov, T. Romanova // J. Operational Research Society, – 2016. – № 67 (5). – P. 786–800.
21. Kallrath, J. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles / J. Kallrath, S. Rebennack // J. Global Optimisation. – 2014. – № 59 (2–3). – P. 405–437.

Поступила в редакцию 06.09.16

УДК 519.6

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАТОРІВ ЕРМІТОВОЇ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ НА СИСТЕМІ НЕПЕРЕТИННИХ ЛІНІЙ ІЗ ЗБЕРЕЖЕННЯМ КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ

[1] **І. В. Сергієнко**, акад. НАН України
[2] **О. М. Литвин**, д-р фіз.-мат. наук
[2] **О. О. Литвин**, канд. фіз.-мат. наук
[3] **О. В. Ткаченко**, канд. фіз.-мат. наук
[3] **О. Л. Грицай**

[1] Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ
[2] Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net
[2] ДП СКБ «Івченко-Прогрес», м. Запоріжжя, e-mail: avt2007@outlook.com

Побудовано та досліджено оператори інтерлінації функцій двох змінних із збереженням класу диференційовності, якому належить наближувана функція за умови, що сліди цих операторів і сліди їх частинних похідних за однією із змінних до фіксованого порядку співпадають на заданій системі ліній з відповідними слідами наближуваної функції.

Ключові слова: *збереження класу диференційовності, сліди функції, сліди похідних на лінії, Ермітова інтерлінація.*

Вступ

Нехай $f^{(0,s)}(x,y)=\dfrac{\partial^s f(x,y)}{\partial y^s}$. Оператори ермітової інтерлінації, що використовують для своєї побудови сліди наближуваної функції та її частинних похідних до заданого порядку $N \ge 1$ на заданій системі паралельних прямих

$$E_{MN}f(x,y)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=0}^{N} f^{(0,s)}(x,y_k)h_{k,s}(y)\frac{(y-y_k)^s}{s!},$$

$$f^{(0,s)}(x,y_k)=\left.\frac{\partial^s f(x,y)}{\partial y^s}\right|_{y=y_k},$$

$$h_{k,s}^{(p)}(y_\ell)=\delta_{k,\ell}\delta_{p,s}, \qquad p=0,1,\dots,N-s;$$

$$\left.\frac{\partial^p E_{MN} f(x,y)}{\partial y^p}\right|_{y=y_\ell} = f^{(0,p)}(x,y_\ell), \qquad k,\ell=1,2,\dots,M; \quad p,s=0,1,\dots,N,$$

які є операторами інтерполяції за однією змінною, мають порядок диференційовності, що повністю визначається диференціальними властивостями допоміжних (базисних) функцій $h_{k,s}(y)\dfrac{(y-y_k)^s}{s!}$, $k = 1, 2, \dots, M$; $s = 0, 1, \dots, N$ (поліномів алгебраїчних, тригонометричних, узагальнених, сплайнів тощо) та диференціальними властивостями вказаних слідів. Тобто якщо

$$f^{(0,s)}(x,y_k)\in C^{r-s}(R), \qquad s=0,1,\dots N, \quad r\ge N\,,$$

то

$$E_{MN} f(x,y)\in C^{r-N}(R^2) \Rightarrow E_{MN} f(x,y)\notin C^r(R^2)\,.$$

Це твердження, зокрема, виконується для функцій

$$f(x,y)=\left|x+y-1\right|^{2q+1}\in C^{2q}(R^2), \qquad f\notin C^{2q+1}(R^2), \qquad q=0,1,2,\dots,$$

$$f(x,y)=\left|x+y-1\right|^{2q+1}(x+y-1)\in C^{2q+1}(R^2), \qquad f\notin C^{2q+2}(R^2).$$

Таким чином, оператори $E_{M,N}f(x, y)$ не можна використовувати замість $f(x, y)$ без додаткового аналізу у тих задачах, де істотною є вимога, щоб функція $f(x, y)$ мала неперервні похідні порядку $r \ge 1$. Потрібні оператори такого типу вперше були побудовані в працях [1–3] для двох випадків – в дискретній та інтегральній формах. Зокрема, в дискретній формі оператор

$$L_{MN} f(x,y)=\sum_{k=1}^{M} h_{M,k,0}(y)\sum_{\ell=0}^{N}\lambda_{0,\ell} f\big(x+\beta_{0,\ell}(y-y_k),y_k\big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N} h_{M,k,s}(y)\sum_{\ell=0}^{N}\lambda_{s,\ell}\int_0^{x+\beta_{s,\ell}(y-y_k)} f^{(0,s)}(t,y_k)\frac{\big(x+\beta_{s,\ell}(y-y_k)-t\big)^{s-1}}{(s-1)!}\,dt$$

задовольняє такі умови:

$$f\in C^r(R^2)\bigcap f^{(0,s)}\in C^{r-s}(R), \qquad 0\le s\le N\le r \Rightarrow L_N f\in C^r(R^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q L_N f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=y_\ell}=\left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=y_\ell}, \qquad 0\le q\le N, \quad 1\le \ell\le M,$$

якщо невідомі $\lambda_{s,\ell}$, $\ell = 0, 1, \dots, N$ для кожного $s = 0, 1, \dots, N$ знаходяться шляхом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{\ell=1}^{N}\lambda_{s,\ell}(\beta_{s,\ell})^p=\delta_{p,s}, \qquad 0\le p\le N$$

за умов $-b\le\beta_{s,0}<\beta_{s,1}<\dots<\beta_{s,N}\le b,\ s=0,1,\dots,N;\ 1\le b\le\infty$, $h^{(p)}_{M,k,s}(y_\ell)=\delta_{k,\ell}\delta_{p,s}$, $k, \ell = 1, 2, \dots, M$, $p, s = 0, 1, \dots, N$.

Аналіз літературних джерел

Задача побудови операторів наближення функцій двох і більше змінних за допомогою їх слідів і слідів їх похідних до фіксованого порядку на системі заданих кривих ліній є однією з найскладніших задач теорії наближення[1–19]. Особливі труднощі при розв'язанні цієї задачі виникають у випадку, коли побудовані оператори повинні зберігати клас диференційовності $C^r(R^2)$, $r \ge 1$, якому належить наближувана функція і при цьому повинні виконуватись рівності між вказаними слідами і відповідними слідами наближуваної функції і оператора.

Загальна теорія побудови таких операторів може ґрунтуватися на використанні інтерлінації із збереженням класу диференційовності $C^r(R^2)$ [1–4].

Ця стаття є розширеним варіантом статті [4] і містить доведення теорем цієї статті. Випадок побудови операторів відновлення функцій двох змінних за допомогою їх сліду та слідів їх частинних похідних до заданого порядку із збереженням класу диференційовності наближуваної функції досліджувався в [2].

В працях [1–13] досліджувалися оператори відновлення функцій багатьох змінних за допомогою операторів, що зберігають клас диференційовності $C^r(R^2)$, якому належить наближувана функція, але загальний випадок операторів, що зберігають клас диференційовності у всіх точках площини, не досліджувався. Водночас практика поставляє приклади, у яких необхідно відновлювати поверхні за відомими слідами їх та їх частинних похідних або деякої системи диференціальних операторів (взагалі кажучи, нелінійних) на заданій кривій.

Найбільш відомим прикладом такої задачі є задача побудови системи координатних функцій для варіаційних методів розв’язання крайових задач, що точно задовольняють граничні умови на границі області інтегрування. Якщо область, у якій розв’язується крайова задача, є об’єднанням кількох відомих областей, то границя такої області може мати кутові точки, тобто буде диференційовною лінією складної форми, що є об’єднанням відрізків кількох відомих ліній.

Як приклад також відзначимо необхідність відновлення поверхонь лопаток авіадвигунів або лопаток гвинтів на атомних підводних човнах, форма яких знаходиться з умови найкращого обтікання поверхні газом або рідиною шляхом розв’язання відповідних крайових задач (тобто форма поверхні обтікання є невідомою). Такі задачі є важливою складовою процесу конструювання лопаток. Однією з найскладніших задач, які виникають при цьому, є збереження відповідної гладкості наближуваної поверхні (тобто належність відповідних функцій до заданого класу диференційовності) та ізогеометричних властивостей (опуклість, вгнутість тощо) [10].

Отже, актуальною є задача побудови і дослідження методів розв’язання таких задач на основі використання узагальнень операторів інтерлінації функцій із збереженням класу диференційовності [1–3].

Основні твердження роботи

1. Нижче узагальнимо цей результат на випадок, коли сліди наближуваної функції та сліди її частинних похідних за змінною y до фіксованого порядку N задаються на лініях $y = \gamma_k(x)$, $\gamma_k(x) \in C^r(R)$, $k = 1, 2, \dots, M$. Введемо до розгляду оператор

$$O_{M,N} f(x,y) = \sum_{k=1}^{M} h_{M,k,0}(y) \sum_{\ell=0}^{N} \lambda_{0,\ell} f\big(x + \beta_{0,\ell}(y - \gamma_k(x)), \gamma_k(x)\big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{N} h_{M,k,s}(y) \sum_{\ell=0}^{N} \lambda_{s,\ell} \int\limits_{x}^{x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(t, \gamma_k(t)) \frac{\big(x + \beta_{s,\ell}(y - \gamma_k(x)) - t\big)^{s-1}}{(s-1)!} dt,$$

де $\beta_{s,\ell} \in [-b, b]$ $s = 0, 1, \dots, N$, $\ell = 0, 1, \dots, N$,– задані різні числа (дійсні або комплексні), невідомі $\lambda_{s,\ell}$, $s = 0, 1, \dots, N$, $\ell = 0, 1, \dots, N$ для кожного значення s знаходяться шляхом розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell} (\beta_{s,\ell})^p = \delta_{s,p}, \qquad 0 \le p \le N.$$

Зауважимо, що ці системи мають єдиний розв’язок, оскільки їх детермінанти $\det\left[\beta_{s,\ell}^p\right]_{\ell=\overline{0,N}}^{p=\overline{0,N}} \ne 0$, $s = 0, 1, \dots, N$ є детермінантами Вандермонда.

Теорема 1. Оператори $O_{M,N} f$ мають властивості

$$f \in C^r(R^2) \Rightarrow O_{M,N} f \in C^r(R^2), \text{ якщо } \gamma_k(x) \in C^r(R),\ k = 1, 2, \dots, M$$

$$\left.\frac{\partial^q O_{M,N} f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_\ell(x)} = \left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_\ell(x)} = f^{(0,q)}(x, \gamma_\ell(x)),$$

$$0 \le q \le N, \quad N \le r, \quad \ell = 1, 2, \dots, M.$$

Доведення

Для доведення першої групи тверджень теореми 1 використаємо

$$F_s(x,y)=\int_x^{x+\beta_{s\ell}(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta_{s\ell}(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt\in C^r(R^2),$$

якщо $f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\in C^{r-s}(R)$.

Для перевірки цього достатньо знайти похідні $\frac{\partial^p F_s}{\partial y^p}$, $p = 0, 1, \ldots, s$ і впевнитися, що

$$\left.\frac{\partial^s F_s}{\partial y^s}\right|_{y=\gamma_k(x)}=f^{(0,s)}(x+\beta_{s\ell}(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x+\beta_{s\ell}(y-\gamma_k(x))))|_{y=\gamma_k(x)}\in C^{r-s}(R).$$

Користуючись формулою диференціювання визначеного інтеграла по параметру

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx=\beta'(t)f(\beta(t),t)-\alpha'(t)f(\beta(t),t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{df(x,t)}{dt}dx,$$

отримаємо потрібне твердження.

Доведення другої групи рівностей проводиться безпосередньо перевіркою із урахуванням властивостей $h_{M,k,s}(y)$ та рівностей для $\beta^p_{s,\ell}$, $\lambda_{s,\ell}$.

Як частинний випадок при $\gamma_k(x) = y_k$, $k = 1, 2, \ldots, M$ отримуємо $O_{M,N}f = L_{M,N}f$.

Теорема 1 доведена.

Оператори $O_{M,N}f(x, y)$ будемо називати операторами інтерлінації функцій із збереженням класу диференційовності дискретного типу.

2. Далі побудуємо і дослідимо оператори інтерлінації ермітового типу із автоматичним відновленням функції двох змінних в інтегральній формі за допомогою їх слідів та слідів їх похідних по одній змінній на заданій системі неперетинних ліній.

Введемо до розгляду оператор

$$D_{M,N}f(x,y)=\sum_{k=1}^{M}h_{M,k,0}(y)\int_{-b}^{b}G_{k,0}(\beta)f(x+\beta(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x))d\beta+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N}h_{M,k,s}(y)\int_{-b}^{b}G_{k,s}(\beta)\int_0^{x+\beta(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dtd\beta.$$

Теорема 2. Оператор $D_{M,N}f$ має властивості

$$f\in C^r(R^2)\Rightarrow D_{M,N}f\in C^r(R^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q D_{M,N}f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_\ell(x)}=\left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_\ell(x)}=f^{(0,q)}(x,\gamma_\ell(x)),$$

$$0\le q\le N,\quad N\le r,\quad \ell=1,2,\ldots,M,$$

якщо $\int_{-b}^{b}G_{k,s}(\beta)\beta^p d\beta=\delta_{s,p}$, $0\le s$, $p\le N$ $\gamma_k(x)\in C^r(R)$, $k = 1, 2, \ldots, M$.

Доведення

Якщо $f\in C^r(R^2)$, то $f(x+\beta(y,\gamma_k(x)),\gamma_k(x))\in C^r(R^2)$, тобто інтеграл $\int_{-b}^{b}G_{k,0}(\beta)f(x+\beta(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x))d\beta\in C^r(R^2)$, бо інтегрування по β не може зменшити порядок диференційовності.

Якщо $f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\in C^{r-s}(R)$, то

$$\Phi_s(x,y,\beta)=\int\limits_0^{x+\beta(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt\in C^r(R^3).$$

Тому $\int\limits_{-b}^{b}G_{k,s}(\beta)\Phi(x,y,\beta)d\beta\in C^r(R^2)$, $s = 1, 2, \ldots, N$.

Тобто перша група тверджень теореми 2 доведена.

Для доведення другої групи тверджень треба скористатися співвідношеннями

$$\Phi_{s,k}(x,y,\beta)=\int\limits_0^{x+\beta(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt\in C^r(R^2)\forall\beta\in[-b,b].$$

Тому

$$\Phi_{\beta,k}(x,y)=\int\limits_{-b}^{b}G_{k,s}(\beta)\Phi(x,y,\beta)d\beta\in C^r(R^2),\quad s=1,2,\ldots,N.$$

Тому, враховуючи, що $h_{M,k,s}(y)\in C^s(R)$ і те, що добуток функцій з неперервними похідними порядку r є функцією, яка теж належить класу $C^s(R^2)$, отримуємо, що $\sum\limits_{k=1}^{M}\sum\limits_{s=1}^{N}h_{M,k,s}(y)\Phi_{s,k}(x,y)\in C^r(R^2)$. Тобто друга група тверджень теореми 2 доведена.

Для доведення третьої групи тверджень треба скористатися формулами

$$\frac{\partial^q}{\partial y^q}\int\limits_0^{x+\beta(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt=$$

$$=\begin{cases}\beta^q\int\limits_0^{x+\beta(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-q-1}}{(s-q-1)!}dt, & 1\le q\le s-1;\\ \beta^s f^{(0,s)}(x+\beta(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x+\beta(y-\gamma_k(x)))), & q=s;\\ \beta^s\frac{d^{q-s}}{dy^{q-s}}f^{(0,s)}(x+\beta(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x+\beta(y-\gamma_k(x)))), & s<q\le N.\end{cases}$$

Теорема 2 доведена.

Оператори $D_{M,N}f(x, y)$ будемо називати операторами інтерлінації функцій із автоматичним збереженням класу диференційовності в інтегральній формі.

Введемо до розгляду ядра $G_{k,s}(x, y, \beta)$, $0\le s\le N$, $1\le k\le M$ інтегральних операторів, залежні від трьох змінних x, y, β і побудуємо з їх допомогою такий інтегральний оператор, у якому функція $f(x, y)$ та її частинні похідні за змінною y входять під знак інтеграла

$$D_{M,N}f(x,y)=\sum_{k=1}^{M}h_{M,k,0}(y)\int\limits_{-b}^{b}G_{k,0}(x,y,\beta)f(x+\beta(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x))d\beta+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N}h_{M,k,s}(y)\int\limits_{-b}^{b}G_{k,s}(x,y,\beta)\int\limits_0^{x+\beta(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dtd\beta.$$

Теорема 3. Оператори $D_{M,N}f(x, y)$ мають властивості

$$f\in C^r(R^2)\Rightarrow D_{M,N}f\in C^r(R^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q D_{M,N}f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=\left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma_l(x)}=f^{(0,q)}(x,\gamma_l(x)),,$$

$$0\le q\le N,\quad N\le r,\quad l=1,2,\ldots,M,$$

 ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2016, Т. 19, № 3

якщо $\int_{-b}^{b} G_{k,s}(x,\gamma_k(x),\beta)\beta^p d\beta = \delta_{p,s}$, $0 \le s$, $p \le N$ $\gamma_k(x) \in C^r(R)$, $k = 1, 2, \ldots, M$.

Доведення

Якщо $G_{k,s}(x, y, \beta) \in C^r(R^2)$ $\forall\beta \in R[-b, b]$, то очевидно, що

$$\int_{-b}^{b} G_k(x,y,\beta) f(x, x+\beta(y-\gamma_k(x)))d\beta \in C^r(R^2), \quad k = 1, 2, \ldots, M.$$

Аналогічно отримаємо, що

$$\int_{-b}^{b} G_{k,s}(x,y,\beta)\overline{\Phi}_{s,k}(x,y,\beta)d\beta \in C^r(R^2), \quad s = 1, 2, \ldots, N.$$

Таким чином, перша група тверджень теореми 3 доведена.

Для доведення другої групи тверджень скористаємось формулою

$$\frac{\partial^q}{\partial y^q}\int_{-b}^{b} G_{k,s}(x,y,\beta)\overline{\Phi}_{s,k}(x,y,\beta)d\beta\Bigg|_{y=\gamma_k(x)} = \sum_{i=0}^{q} C_q^i \int_{-b}^{b} \frac{\partial^{q-i}}{\partial y^{q-i}} G_{k,s}(x,y,\beta)\frac{\partial^i}{\partial y^i}\Phi_{s,k}(x,y,\beta)d\beta\Bigg|_{y=\gamma_k(x)}.$$

Виконуючи ці диференціювання і враховуючи, що

$$\int_{-b}^{b} \frac{\partial^{q-i}}{\partial y^{q-i}} G_{k,s}(x,y,\beta)\Bigg|_{y=\gamma_k(x)} \frac{\partial^i}{\partial y^i}\Phi_{s,k}(x,y,\beta)d\beta\Bigg|_{y=\gamma_k(x)} =$$

$$= \int_{-b}^{b} \frac{\partial^{q-i}}{\partial y^{q-i}} G(x,y,\beta)\Bigg|_{y=\gamma_k(x)} \beta^i \int_0^x f^{(0,s)}(t,\gamma_k(t))\frac{(x-t)^{s-i-1}}{(s-i-1)!}dt = \begin{cases} 0, & i = 0,1,\ldots,s-1, \\ f^{(0,s)}(x,\gamma_k(x)), & i = s, \end{cases}$$

отримаємо доведення теореми 3.

Зокрема, для $b = \infty$ напишемо оператори

$$D_{M,N} f(x,y) = \sum_{k=1}^{M} h_{M,k,0}(y)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-\gamma_k(x))^N}{(\beta-x)^2+(y-\gamma_k(x))^2} f(x+\beta(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x))d\beta +$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N} h_{M,k,s}(y)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^s}{\partial\beta^s}\frac{(y-\gamma_k(x))^N}{(\beta-x)^2+(y-\gamma_k(x))^2}\int_0^{x+\beta(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(\beta,\gamma_k(\beta))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dtd\beta.$$

$$D_{M,N} f(x,y) = \sum_{k=1}^{M} h_{M,k,0}(y)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-\gamma_k(x))^N}{(\beta-x)^2+(y-\gamma_k(x))^2} f(x+\beta(y-\gamma_k(x)),\gamma_k(x))d\beta +$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N} h_{M,k,s}(y)\frac{1}{\pi N!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^s}{\partial\beta^s}\frac{(y-\gamma_k(x))^N}{(\beta-x)^2+(y-\gamma_k(x))^2}\int_0^{x+\beta(y-\gamma_k(x))} f^{(0,s)}(\beta,\gamma_k(\beta))\frac{(x+\beta(y-\gamma_k(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!}dtd\beta.$$

Функції $h_{M,k,s}(x, y)$ повинні мати властивості

$$\frac{d^p}{dy^p} h_{M,k,s}(x,y)\Bigg|_{y=\gamma_\ell(x)} = \delta_{k,\ell}\delta_{s,p}, \quad 1 \le k \le M, \ 0 \le s, \ p \le N$$

Приклади ядер інтегральних операторів

Приклад 1. Нехай $b = 1$, $N \ge 1$. Для ядер поліноміального типу

$$G_{N,s}(\beta) = G_s(\beta) = \sum_{k=0}^{N} a_{s,k}\beta^k, \ s = 0, 1, \ldots, N$$

коефіцієнти $a_{s,k}$ знаходяться для кожного значення $s = 0, 1, \ldots, N$ із систем лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $(N + 1)$

$$\int_{-1}^{1} G_s(\beta)\beta^p dp = \delta_{s,p}, \quad s = 0, 1, \ldots, N.$$

Зокрема, у випадках $N = 1, 2$

$$N = 1: \qquad G_0(\beta) = \frac{1}{2}; \qquad G_1(\beta) = \frac{3}{2}\beta;$$

$$N = 2: \qquad G_0(\beta) = \frac{9}{8} - \frac{15}{8}\beta^2; \qquad G_1(\beta) = \frac{3}{2}\beta; \qquad G_2(\beta) = -\frac{15}{8} + \frac{45}{8}\beta^2.$$

Проведемо доведення перевіркою для $N = 1$. У цьому випадку

$$\int_{-1}^{1} G_0(\beta)\beta^i d\beta = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\beta^i d\beta = \frac{1}{2}\frac{\beta^{i+1}}{i+1}\Bigg|_{\beta=-1}^{\beta=1} = \frac{1}{2(i+1)}\left[1^{i+1} - (-1)^{i+1}\right] == \begin{cases} 1, i = 0, \\ 0, i = 1, \end{cases} = \delta_{0,i}, \quad i = 0{,}1.$$

Аналогічно

$$\int_{-1}^{1} G_1(\beta)\beta^i d\beta = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}\beta \cdot \beta^i d\beta = \frac{3}{2}\frac{\beta^{i+2}}{i+2}\Bigg|_{\beta=-1}^{\beta=1} = \frac{3}{2(i+2)}\left[1^{i+2} - (-1)^{i+2}\right] = \begin{cases} 0, i = 0, \\ 1, i = 1, \end{cases} = \delta_{1,i}, \quad i = 0{,}1.$$

Тобто, дійсно, $\int_{-1}^{1} G_0(\beta)\beta^i d\beta = \delta_{0,i}$, $i = 0{,}1$.

Проведемо доведення для $N = 2$. У цьому випадку

$$\int_{-1}^{1} G_0(\beta)\beta^i d\beta = \int_{-1}^{1} \left[\frac{9}{8} - \frac{15}{8}\beta^2\right]\beta^i d\beta = \left[\frac{9}{8}\frac{\beta^{i+1}}{i+1} - \frac{15}{8}\frac{\beta^{i+3}}{i+3}\right]_{\beta=-1}^{\beta=1} = \begin{cases} 1, i = 0, \\ 0, i = 1{,}2, \end{cases} = \delta_{0,i}, \quad i = 0{,}1{,}2.$$

Аналогічно доводиться, що

$$\int_{-1}^{1} G_1(\beta)\beta^i d\beta = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}\beta \cdot \beta^i d\beta = \frac{3}{2}\frac{\beta^{i+2}}{i+2}\Bigg|_{\beta=-1}^{\beta=1} = \frac{3}{2(i+2)}\left[1^{i+2} - (-1)^{i+2}\right] = \begin{cases} 0, i = 0{,}2 \\ 1, i = 1, \end{cases} = \delta_{1,i}, i = 0{,}1{,}2,$$

та

$$\int_{-1}^{1} G_2(\beta)\beta^i d\beta = \int_{-1}^{1} \left[\frac{9}{8} - \frac{15}{8}\beta^2\right]\beta^i d\beta = \left[\frac{9}{8}\frac{\beta^{i+1}}{i+1} - \frac{15}{8}\frac{\beta^{i+3}}{i+3}\right]_{\beta=-1}^{\beta=1} = \begin{cases} 0, i = 0{,}1 \\ 1, i = 2, \end{cases} = \delta_{2,i}, \quad i = 0{,}1{,}2.$$

Приклад 2. Нехай $b = \infty$, $N \geq 1$. Для ядер вигляду

$$G_s(\beta) = e^{-\beta^2} \sum_{k=0}^{N} a_{s,k}\beta^k$$

коефіцієнти $a_{s,k}$ знаходяться для кожного значення $s = 0, 1, \ldots, N$ із систем лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $(N + 1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_s(\beta)\beta^p d\beta = \delta_{s,p}, \quad p, s = 0, 1, \ldots, N,$$

тобто

$$\sum_{k=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\beta^{k+p} d\beta \;\; a_{s,k} = \delta_{s,p}, \quad p, s = 0, 1, \ldots, N.$$

Наприклад, для $N = 1$, $b = \infty$

ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2016, Т. 19, № 3

$$G_0(\beta)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta\right)^{-1}e^{-\beta^2};\qquad G_1(\beta)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}\beta^2 d\beta\right)^{-1}e^{-\beta^2}\beta.$$

Для доведення знайдемо інтеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty}G_0(\beta)\beta^i d\beta=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta\right)^{-1}e^{-\beta^2}\beta^i d\beta=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta\right)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}\beta^i d\beta=\begin{cases}1, i=0,\\ 0, i=1,\end{cases}=\delta_{0,i},\quad i=0{,}1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}G_1(\beta)\beta^i d\beta=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}\beta^2 d\beta\right)^{-1}e^{-\beta^2}\beta^{i+1}d\beta=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}\beta^2 d\beta\right)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}\beta^{i+1}d\beta=\begin{cases}0, i=0,\\ 1, i=1,\end{cases}=\delta_{1,i},\quad i=0{,}1.$$

Тобто твердження для цього випадку доведені.

Приклад 3. Нехай $b=\infty$, $N\ge 1$. Шукаємо ядра $G_{k,s}(x, y, \beta)$ для кожного значення $s = 0, 1, \ldots, N$ і для кожного значення $k = 0, 1, \ldots, M$ у вигляді

$$G_{k,s}(x,y,\beta)=\frac{1}{\pi N!}\frac{\partial^s}{\partial y^s}\left[\frac{\left(y-\gamma_k(x)\right)^{N+1}}{\left(y-\gamma_k(x)\right)^2+\left(x-\beta\right)^2}\right].$$

Зокрема, для $N = 1$ отримаємо

$$G_{k,0}(x,y,\beta)=\frac{1}{\pi}\frac{\left(y-\gamma_k(x)\right)^2}{\left(x-\beta\right)^2+\left(y-\gamma_k(x)\right)^2},$$

$$G_{k,1}(x,y,\beta)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\left(y-y_k\right)^2}{\left(x-\beta\right)^2+\left(y-\gamma_k(x)\right)^2}.$$

Якщо ввести позначення $Y = y - \gamma_k(x)$, то маємо

$$G_{k,s}(x,Y,\beta)=\frac{1}{\pi N!}\frac{\partial^s}{\partial Y^s}\frac{Y^{N+1}}{Y^2+\left(x-\beta\right)^2}.$$

Такі ядра досліджувались у роботі [3].

Висновки

Написані вище оператори дозволяють відновлювати наближено функції $f(x, y)$, якщо їх сліди та сліди їх похідних за змінною y до порядку N включно відомі на системі неперетинних кривих, заданих явно відповідними рівняннями. Вони дозволяють будувати оператори інтерполяції з потрібними інтерполяційними властивостями на вказаній системі ліній шляхом заміни слідів $f^{(0,s)}(x, \gamma_k(x))$ відповідними інтерполяційними або апроксимаційними.

Література

1. *Литвин, О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин, О. М.* Інтерлінація функцій / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 1993. – 235 с.
3. *Сергієнко, І. В.* Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів і суміжні питання / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака, О. М. Литвин. – К.: Наук. думка, 2012. – 404 с.
4. *Ермітова* інтерлінація функцій двох змінних на заданій системі неперетинних ліній із збереженням класу $C^r(R^2)$ / О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. В. Ткаченко, О. Л. Грицай // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 53–59.
5. *Никольский, С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
6. *Бесов, О. В.* Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский – М.: Наука, 1975. – 480 с.
7. *Стейн, И.* Сингулярные интегралы и диференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 342 с.
8. *Владимиров, В. С.* Обобщённые функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 318 с.

9. *Хермандер, Л.* Диференциальные операторы с постоянными коэффициентами / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1986. – 455 с.
10. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М.: Наука, 1966. – 724 с.
11. *Рвачев, В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев – Киев: Наук. думка, 1982. – 550 с.
12. *Шилов, Г. Е.* Математический анализ. Второй спец. курс / Г. Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 327 с.
13. *Квасов, Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами / Б. И. Квасов. – М.: Физматлит, 2006. – 360 с.
14. *Математическая* энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова: В 5 т. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – Т. 5. – 1215 с.
15. *Литвин, О. М.* Інтерполяція функцій та їх нормальних похідних на гладких лініях в R^n / О. М. Литвин // Доп. АН УРСР. – 1984. – № 7. – С. 15–19.
16. *Литвин, О .М.* Точний розв'язок задачі Коші для рівняння $\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=g(x,t)$ / О. М. Литвин // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 3. – С. 12–17.
17. *Литвин, О. М.* Побудова функцій n змінних із заданими нормальними похідними на R^m ($1 \le m \le n-1$) із збереженням класу $C^r(R^n)$ / О. М. Литвин // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – № 5. – С. 13–17.
18. *Відновлення* функцій двох змінних із збереженням класу $C^r(R^2)$ за допомогою їх слідів та слідів їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин та ін. // Доп. НАН України. – 2014. – №2. – С. 50–55.
19. *Побудова* та дослідження оператора наближення функцій двох змінних із збереженням класу диференційовності за слідами їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин та ін. // Пробл. машиностроения. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 50–57.

Поступила в редакцию 16.08.16