

<sup>1,2</sup> Л. С. Бозбей<sup>1,3</sup> А. О. Костиков, д-р техн. наук<sup>2,3</sup> В. И. Ткаченко, д-р. физ.-мат. наук<sup>1</sup> Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков,

e-mail: kostikov@ipmach.kharkov.ua

<sup>2</sup> Национальный научный центр

«Харьковский физико-технический институт» НАН Украины,

e-mail: bozbiei@kipt.kharkov.ua

<sup>3</sup> Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

УДК 536.25

**ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КОНВЕКТИВНАЯ ЯЧЕЙКА В СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОЙ, ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ЕЁ ПАРАМЕТРЫ***Розглянуто принцип формування конвективних структур у шарі в'язкої, нестисливої рідини при рівномірному підігріві знизу. Запропоновано і реалізовано енергетичний принцип використання елементарної конвективної комірки циліндричної форми. Визначено її параметри, а також теплофізичні властивості. Проведено експериментальні дослідження теплофізичних властивостей елементарної конвективної комірки, а також виконано числову обробку даних.***Ключові слова:** елементарна конвективна комірка, вільні межі, конвективні процеси, теплоперенесення, температурний градієнт.**Введение**

Ещё в далёком 1900 году французским физиком Андри Бенаром был проведен эксперимент по исследованию массопереноса в подогреваемом снизу слое спермацетового масла, где было обнаружено образование гексагональных ячеек. Впоследствии такого вида ячейки стали называть его именем [1, 2], хотя, как отмечал Рэлей в [3], Андри Бенар, кажется, не был знаком с работой Джеймса Томсона [4], где он описал аналогичные структуры в слоях мыльной воды, охлаждаемой сверху (сотовые структуры в эмульсиях).

Чаще всего упорядоченные структуры в виде ячеек Бенара встречаются в природе. Это могут быть, например, многослойные системы грануляции на Солнце [5], ячейки на облаках [6], однослойные структуры на поверхности соленых озёр [7], шестигранные колонны на островах и в пещерах [8], структуры ледовых пиков и впадин при неравномерном таянии грунтов [9], упорядоченные конвективные ячейки в верхней мантии Земли [10].

Если говорить, например, о грануляции на Солнце, то она наблюдается в конвективной зоне на расстоянии примерно  $2 \cdot 10^5$  км, образуя 20–27 слоев, состоящих из ячеек Бенара [11]. Исходя из наблюдений, предполагается существование трех различных масштабов грануляции: грануляция (с типичным диаметром 150–2500 км), мезогрануляция  $(5.0\text{--}10.0) \cdot 10^3$  км и супергрануляция (более  $2 \cdot 10^4$  км), Нижние слои грануляции конвективной зоны можно охарактеризовать как супергрануляция, т.к. размер гранул изменяется в пределах  $(2\text{--}4) \cdot 10^4$  км, а толщина –  $(3\text{--}8) \cdot 10^3$  км. [12, 13]. Время жизни гранул зависит от размеров и месторасположения в конвективной зоне: самые большие (супергранулы) существуют порядка 20–36 часов, самые маленькие, которые находятся в наружных слоях зоны, – порядка двух минут. Скорость потоков на оси таких ячеек направлена от центра Солнца. Значение типичной горизонтальной скорости в ячейках, измеренной по доплерграммам, определяется величиной 205 м/с. В других публикациях её значение находится в интервале от 170 до 360 м/с. [14]. Средняя плотность вещества, формирующего конвективные ячейки на Солнце в конвективном слое, порядка  $1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а распределение температуры в слое и характерные коэффициенты имеют следующие значения [12–14]:  $T_2 = 2 \cdot 10^6$  К,  $T_1 = 5 \cdot 10^3$  К – температура нижней и верхней поверхности слоя соответственно;  $g^* = 273,1$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободного падения;  $\nu = 635$  м/с<sup>2</sup> – кинематическая вязкость;  $\chi = 705,6$  м/с<sup>2</sup> – коэффициент температуропроводности;  $\beta = 3,24 \cdot 10^{-3}$  К<sup>-1</sup> – коэффициент объемного температурного расширения.

Известно, что решения, описывающие горизонтальные и вертикальные составляющие скорости внутри ячейки, в результате геометрических преобразований могут формировать такие структу-

ры, как конвективные горизонтальные валы, квадратные конвективные ячейки или правильные многоугольники (треугольники или гексагоны) [3, 15–17]. Эти структуры полностью заполняют объем конвективного слоя и таким образом обеспечивают максимальный перенос тепла между границами слоя.

Однако, на наш взгляд, основным принципом формирования многоугольных конвективных структур в температурно-напряженной среде должен быть энергетический принцип, а не геометрические построения. Этот принцип наглядно демонстрируется в экспериментах по образованию конвективных ячеек Бенара в слое вязкой жидкости: с увеличением температуры дна емкости наблюдается постепенное увеличение количества конвективных ячеек вплоть до полного заполнения ими всего объема. Другими словами, этот принцип гласит: чем больше температура дна емкости при соответствующем градиенте температуры, тем больше образуется конвективных ячеек, форма которых по мере заполнения объема емкости приближается к многоугольной (в т. ч. гексагональной), и тем эффективнее происходит теплообмен между подогреваемой нижней границей среды с верхней.

Для реализации такого энергетического принципа формирования конвективных ячеек требуется введение понятия элементарной конвективной ячейки, из большого набора которых, при их плотной упаковке, могут формироваться многоугольные конвективные структуры [18, 19]. Так, например, выбор кубической конвективной ячейки со свободными границами в качестве элементарной ячейки оказался продуктивным при описания процессов формирования ленгмюровских циркуляций [20].

Целью данной работы является экспериментальное наблюдение и математическое описание элементарной конвективной ячейки в слое вязкой несжимаемой жидкости, определение ее характерных физических параметров.

### Экспериментальные сведения о некоторых параметрах ячеек Бенара

Одним из вопросов, возникающих при исследовании ячеек Бенара, является вопрос о величине аспектного числа, которое определяет отношение диаметра ячейки Бенара к глубине слоя жидкости. Экспериментальные данные этих величин, взятые из различных научных публикаций и полученные авторами в лабораторных условиях, приведены в таблице, где  $A_n = D/h$  – локальное аспектное число, равное отношению диаметра ячейки  $D$  к толщине слоя  $h$ . Погрешность приведенных экспериментальных данных составляет величину 5–10%.

*Геометрические размеры ячеек Бенара*

Источник	Диаметр $D$ , мм	Толщина $h$ , мм	$A_n$
М. Ван-Дайк [21], Е. L. Koschmieder [22]	6,25	1,9	3,3
Е. Д. Эйдельман [23]	3,0	1	3,0
Экспериментальные данные авторов	3,2	1,0	3,2

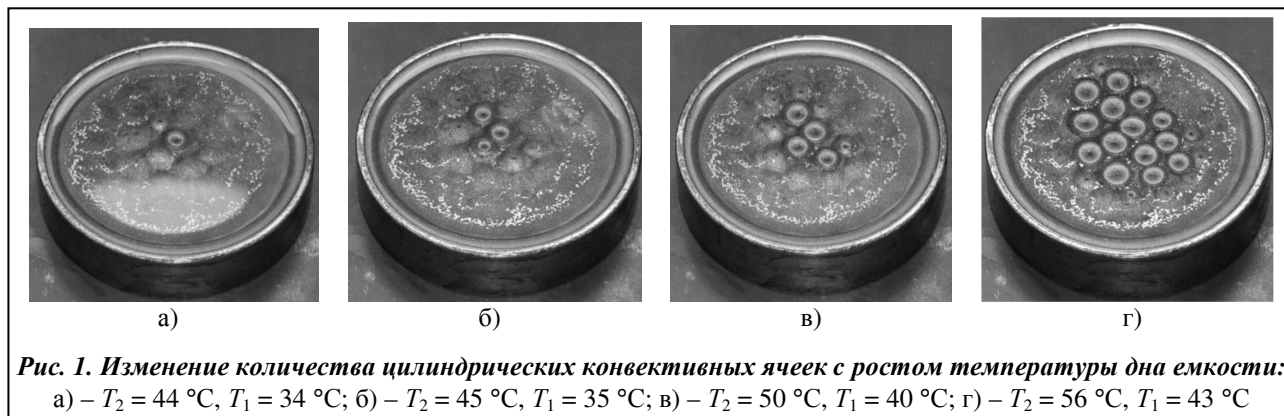
Условия проведения экспериментов были следующими. В цилиндрическую емкость радиусом 26 мм и высотой 2,5 мм наливалось масло толщиной слоя порядка 1 мм. Подогрев емкости осуществлялся снизу от электрической печи, температура масла на дне емкости поддерживалась на уровне  $120 \pm 1$  °С. Кинематическая вязкость масла при указанных температурах оценивалась величиной  $10 \text{ мм}^2/\text{с}$  [24].

В экспериментах было показано, что при достижении температуры дна емкости  $T \approx 120 \pm 1\%$  °С в вакуумном масле толщиной слоя порядка 1,0 мм возникали ячейки Бенара диаметром 3,2 мм.

### Зависимость количества конвективных ячеек в слое жидкости от температуры дна емкости

Для исследования зависимости количества конвективных ячеек от величины температуры дна емкости была проведена серия экспериментов, условия которых соответствуют тем, что описаны в экспериментах по определению локального аспектного числа ячеек Бенара (см. таблицу).

На рис. 1 показаны фотографии цилиндрических конвективных ячеек, количество которых с увеличением температуры дна емкости  $T_2$  от 44 до 120 °С нарастает, начиная от одной-двух ячеек и



заканчивая их плотной упаковкой поверхности масла с образованием многоугольников, в том числе гексагонов. Градиент температуры  $dT/dz$  с увеличением температуры дна емкости оставался на одном уровне  $10\text{--}13\text{ }^\circ\text{C}/\text{мм}$ . Для каждого случая на рисунке приведено также значение температуры верхней границы слоя масла  $T_1$ .

Исходя из результатов экспериментов, приведенных на рис. 1, можно сделать вывод, что с увеличением температуры дна емкости количество конвективных ячеек увеличивается при незначительном возрастании градиента температуры. Наблюдаемые в эксперименте ячейки, до момента полного заполнения ими объема масла, на верхней поверхности масла образуют круги с диаметром порядка  $3,2\text{ мм}$ , и характеризуются раздельным взаимным расположением. Таким образом, локальное аспектное число ячеек составляет порядка  $3,2$ .

Добавление в масло алюминиевой пудры преобразует масло в суспензию, граничные условия для которой на твердой стенке из-за проскальзывания по пленке чистого масла можно рассматривать как свободные. Изменение характера граничных условий подтверждается результатами численной обработки экспериментальных результатов по формированию конвективных колец других авторов. Описано два независимых способа определения скорости массопереноса в ячейках разных диаметров. Для ячеек большого диаметра ( $17\text{ мм}$ ) максимальная скорость массопереноса на верхней границе измерялась по углу отклонения щупа. Измеренная таким способом скорость равнялась  $0,02\text{ см/с}$ . Для ячеек меньшего диаметра ( $2\text{ мм}$ ) скорость масла на поверхности ячейки измерялась оптическим методом и составляла величину от  $3,5$  до  $5,2\text{ мм/с}$  [25].

### Математическая модель описания конвективных процессов в вязких средах со свободными границами

В задаче Рэлея [3, 18–17] рассмотрен бесконечный в направлениях осей  $x$  и  $y$  слой вязкой жидкости толщиной  $h$ . Ось  $z$  направлена вверх, перпендикулярно границам слоя  $z = 0$  и  $z = h$ . Распределение температуры внутри слоя  $T_0(z)$  задано таким образом, что температура нижней границы больше температуры верхней:  $T_0(0) = T_2$ ,  $T_0(h) = T_1$  ( $T_2 > T_1$ ). Полагаем, что в состоянии равновесия распределение температуры в слое описывается линейной функцией от координаты  $z$

$$\bar{\nabla}T_0(z) = -\frac{\Theta}{h}\bar{e}_z, \quad (1)$$

где  $\Theta = T_2 - T_1$  – разность температур между нижней и верхней плоскостями;  $\bar{e}_z$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ .

Исходная система уравнения для безразмерных возмущений представляет собой уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска и имеет вид [15–17]

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\bar{\nabla}p + \Delta \bar{v} + RT\bar{e}_z, \quad (2)$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} - v_z = \Delta T, \quad (3)$$

$$\text{div}(\bar{v}) = 0, \quad (4)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\vec{\nabla}$  – оператор градиента,  $R = g\beta h^3 \Theta / (\nu \chi)$  – число Рэлея;  $g$  – ускорение свободного падения, направленное против оси  $z$ ;  $P = \nu / \chi$  – число Прандтля;  $\nu$  и  $\chi$  – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно;  $\beta$  – коэффициент объемного температурного расширения жидкости;  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ,  $p$ ,  $T$  – возмущения скорости, давления и температуры соответственно.

При приведении системы уравнений (2)–(4) к безразмерному виду использованы следующие единицы измерения: единица длины – толщина слоя  $h$ ; единица времени  $\tau = h^2 \nu^{-1}$ ; единица температуры  $\Theta$  (см. (1)).

Для определения «нормальных» возмущений в вязком подогреваемом снизу слое жидкости применима система уравнений (2)–(4) при условии, что она должна быть дополнена граничными условиями. В задаче со свободными граничными условиями на границах слоя  $z = 0$  и  $z = 1$  (здесь и далее обозначение  $z$  используется уже для безразмерной координаты) компонента скорости, перпендикулярная слою, касательные напряжения и возмущения температуры равны нулю. Согласно [15] условие равенства нулю касательных напряжений можно преобразовать с использованием уравнения неразрывности (4), в результате чего граничные условия приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} v_z|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad T|_{z=0} = 0, \\ v_z|_{z=1} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \Big|_{z=1} = 0, \quad T|_{z=1} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (2)–(4) и граничные условия (5) однозначно определяют спектр характеристических равновесных состояний слоя вязкой, несжимаемой, подогреваемой снизу жидкости, которые могут формировать такие структуры, как конвективные валы или правильные многоугольники [15–17].

Следует отметить, что наблюдательные данные по грануляции Солнца, по-видимому, указывают на то, что система уравнений, описывающих конвективный массоперенос солнечной материи в полях гравитации и температуры [14] в линейном приближении, в пренебрежении вращением Солнца и генерацией магнитного поля, может быть сведена к системе уравнений (2)–(4) и граничным условиям (5).

Таким образом, система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска (система уравнений (2)–(4) с граничными условиями (5)) может быть использована для исследования спектров конвективных возмущений и условий устойчивого существования слоя вязкой, несжимаемой жидкости, в технических объектах, технологических процессах, и природных явлениях.

### Теория элементарной конвективной ячейки со свободными границами

#### Исходные уравнения и граничные условия

Учитывая тот факт, что вид приведенных на рис. 1 конвективных ячеек имеет цилиндрическую форму, найдем решение задачи об устойчивости равновесия подогреваемого снизу слоя вязкой, несжимаемой жидкости, сформулированной в цилиндрической системе координат  $(r, \phi, z)$ , полагая граничные условия свободными.

Исходя из экспериментальных результатов, приведенных на рис. 1, можно сделать вывод, что структура конвективных ячеек не зависит от азимутального угла  $\phi$ . Поэтому будем рассматривать задачу в осесимметричном приближении, т. е. полагаем везде  $d/d\phi = 0$ .

В этом случае, после действия оператора  $\text{rot}(\text{rot}(\dots))$  на уравнение (2) и записи проекции результата на ось  $z$ , уравнения (2)–(3) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z = \Delta \Delta v_z + R \Delta_{\perp} T, \quad (6)$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + v_z, \quad (7)$$

где  $\Delta = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$  – поперечный лапласиан.

Свободные граничные условия соответствуют требованию отсутствия на границах слоя при  $z = 0$  и  $z = 1$  касательных напряжений, т. е.  $\partial v_r / \partial z = 0$ . Нетрудно показать, проведя преобразования, аналогичные выполненным в [15] в декартовой геометрии, что и в случае цилиндрической системы координат граничные условия будут иметь вид (5).

### Решение исходной системы уравнений

Уравнения (6), (7) имеют частные решения, которые описывают временную динамику возмущений вертикальной скорости и температуры в осесимметричной цилиндрической ячейке

$$v_z(r, z, t) = v(z)J_0(k_r r) \exp(-\lambda t), \quad (8)$$

$$T(r, z, t) = \vartheta(z)J_0(k_r r) \exp(-\lambda t), \quad (9)$$

где  $\lambda$  – собственные числа, характеризующие затухание ( $\lambda > 0$ ), нарастание ( $\lambda < 0$ ) или стационарное состояние ( $\lambda = 0$ ) возмущений (5), (6);  $v(z)$  и  $\vartheta(z)$  – амплитуды возмущений вертикальной скорости и температуры соответственно;  $J_0(x)$  – функции Бесселя первого рода нулевого порядка от аргумента  $x$ ;  $k_r$  – радиальное волновое число, характеризующее зависимость возмущений от поперечной координаты  $r$ .

Для свободных граничных условий в цилиндрической ячейке, определяемых вытекающими из (5) выражениями

$$\begin{aligned} v|_{z=0} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad \vartheta|_{z=0} = 0, \\ v|_{z=1} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dz^2} \Big|_{z=1} = 0, \quad \vartheta|_{z=1} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

значения амплитуд возмущений вертикальной скорости  $v(z)$  и температуры  $\vartheta(z)$  можно представить простыми гармониками [15, 16], а сами частные решения записать в виде

$$\begin{aligned} v_z(r, z, t) = A \cdot \sin(n\pi z) J_0(k_r r) \exp(-\lambda t), \\ T(r, z, t) = B \cdot \sin(n\pi z) J_0(k_r r) \exp(-\lambda t), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  – натуральные числа;  $A$  и  $B$  – постоянные коэффициенты.

Выражение для радиальной скорости движения жидкости в конвективной ячейке  $v_r(r, z, t)$  можно получить из уравнения (4) с учетом (11)

$$v_r(r, z, t) = -An\pi k_r^{-1} \cos(n\pi z) J_1(k_r r) \exp(-\lambda t). \quad (12)$$

Таким образом, в разделе определены параметры цилиндрической конвективной ячейки со свободными границами.

### Определение радиального волнового числа для возмущения скорости

Решение (12) должно отвечать физически обоснованным граничным условиям: на оси ячейки ( $r = 0$ ) и на ее внешней границе ( $r = R_c$ ) радиальная скорость жидкости должна равняться нулю. Отсюда можно определить значение радиального волнового числа

$$k_{r,i} = \sigma_{1,i} R_c^{-1}, \quad (13)$$

где  $R_c$  – радиус конвективной ячейки;  $\sigma_{1,i}$  –  $i$ -й ноль функции Бесселя первого рода первого порядка ( $J_1(\sigma_{1,i}) = 0$ ),  $i = 1, 2, 3, \dots$ .

Необходимо отметить, что решение вида (8) приведено в [20, 26, 27], где на его основе были построены линии тока и анализировалось осесимметричное расположение концентрических конвективных валов. Однако в этих работах не отмечено использование физически обоснованных граничных условий, которые определяют радиальное волновое число полученных решений.

На рис. 2 изображены изолинии (в относительных единицах) проекций скоростей конвективной ячейки, описываемой решениями (8), (9) с учетом (11) при  $n = 1$ . Из рисунков следует, что в отличие от ячейки прямоугольной геометрии [15] максимальное значение модуля вертикальной ско-

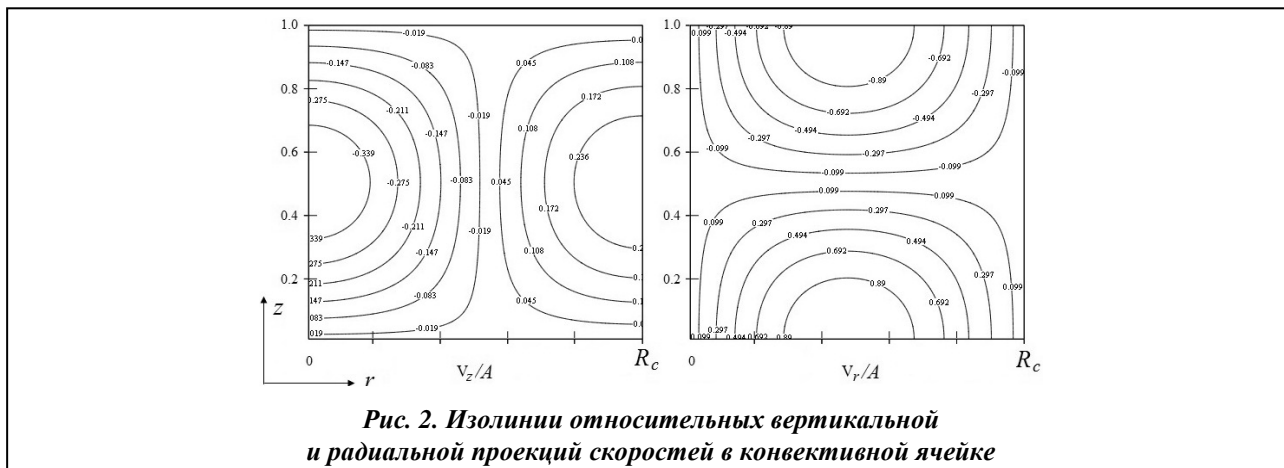


Рис. 2. Изолинии относительных вертикальной и радиальной проекций скоростей в конвективной ячейке

рости цилиндрической ячейки  $|v_z(r, z, t)|$  на оси больше его значения на внешней границе, а максимумы радиальной скорости  $|v_r(r, z, t)|$  на нижней и верхней границах ячейки равны и одинаково смещены к ее оси. Расчеты показывают, что изолинии распределения по координатам относительной температуры цилиндрической ячейки  $T/B$  соответствуют распределению относительной вертикальной скорости с обратным знаком.

### Определение собственных чисел цилиндрической конвективной ячейки

Для определения спектра собственных чисел решений (8), (9) необходима подстановка их в исходные уравнения (2), (3). Такая подстановка приводит к двум уравнениям, связывающим амплитуды возмущений  $A$  и  $B$

$$\begin{aligned} (\pi^2 n^2 + k_{r,i}^2) \lambda - (\pi^2 n^2 + k_{r,i}^2) A + R k_{r,i}^2 B &= 0, \\ A + [\lambda P - (\pi^2 n^2 + k_{r,i}^2)] B &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Для существования нетривиального решения системы уравнений (14) необходимо приравнять ее детерминант нулю. В результате получим квадратное уравнение относительно собственных чисел  $\lambda$ . Корни этого уравнения  $\lambda_{n,i}^\pm$  определяются следующими выражениями:

$$\lambda_{n,i}^\pm = \frac{P+1}{2P} (n^2 \pi^2 + k_{r,i}^2) \pm \left( \left( \frac{P-1}{2P} \right)^2 (n^2 \pi^2 + k_{r,i}^2)^2 + \frac{R k_{r,i}^2}{P(n^2 \pi^2 + k_{r,i}^2)} \right)^{1/2}. \tag{15}$$

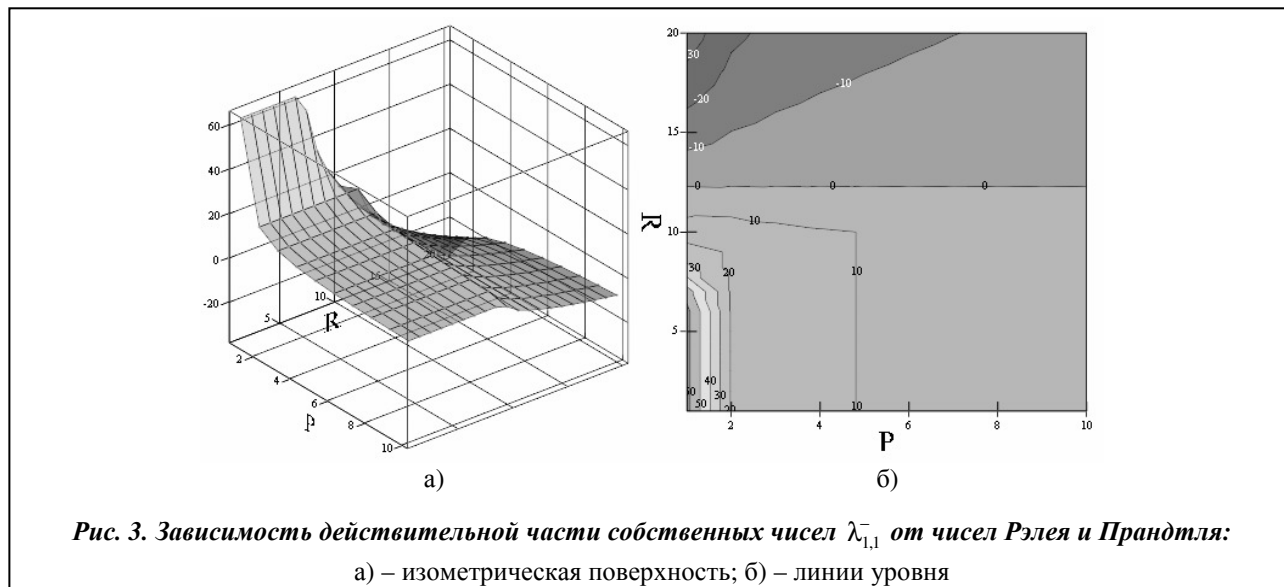
Спектр собственных чисел (15) оказывается дискретным не только по моде возмущений  $n$ , но и по радиальному волновому числу цилиндрической ячейки  $k_{r,i}$ , которое принимает дискретные значения, зависящие от радиуса ячейки  $R_c$  и корней функции Бесселя  $\sigma_{1,i}$ .

На рис. 3 приведены графики поверхностей, описывающих зависимость действительной части собственных чисел  $\lambda_{n,i}^\pm$  от чисел Рэлея  $R$  и Прандтля  $P$  для основной моды  $n = 1$  при  $i = 1$ . При построении поверхностей были заданы следующие диапазоны изменения  $R$  и  $P$ :  $0,1 \leq P \leq 3,0$ ;  $-0 \leq R \leq 20$ , а значение радиуса ячейки  $R_c = 3$  выбрано в соответствии с экспериментальными данными, приведенными в таблице.

Следует отметить, что мнимые значения решений (15) дают осцилляции решений (8), (9), которые не приводят к росту их амплитуд.

Расчеты показывают, что действительная реальная часть собственных чисел  $\lambda_{n,i}^+$  положительна. Для таких собственных чисел решения (8), (9) экспоненциально затухают.

Действительная часть другого вида решений  $\lambda_{1,1}^-$  (см. рис. 3) имеет области как положительных, так и отрицательных значений. Отсюда следует, что в спектре собственных чисел  $\text{Re}(\lambda_{1,1}^-)$  существуют значения, равные нулю. Этот факт означает, что при  $\text{Re}(\lambda_{1,1}^-) = 0$  в ячейке, описываемой решениями (8), (9), наблюдаются устойчивые состояния конвективного массопереноса.



### Определение радиуса цилиндрической конвективной ячейки

Поскольку для исследуемого в работе масла характерное время оказывается порядка  $\tau = 0,1$  с, то, исходя из пропорциональности возмущенной вертикальной скорости экспоненциальному множителю  $\exp(-\lambda(t/\tau))$ , устойчивое существование цилиндрической ячейки возможно только при  $\text{Re}(\lambda_{1,1}^-) = 0$ . Отсюда для основной моды ( $n = 1$ ) можно записать неполное кубичное уравнение для определения радиуса ячейки  $R_c$

$$f(x) \equiv x^3 - Rx + R\pi^2 = 0, \quad (16)$$

где  $x = \pi^2 + (\sigma_{1,i} R_c)^2$ .

Будем рассматривать только действительные решения уравнения (16). В [15] показано, что минимальное значение числа Рэлея  $R_{\min}$ , при котором возможно устойчивое конвективное движение в рассматриваемом случае составляет  $27\pi^4/4$ . При  $R \geq R_{\min}$  уравнение (16) имеет три действительных решения [28]

$$\begin{aligned} x_{1,2}(R) &= -(a_+(R) + a_-(R))/2 \mp i\sqrt{3}(a_+(R) - a_-(R))/2, \\ x_3(R) &= a_+(R) + a_-(R), \end{aligned}$$

где  $a_{\pm}(R) = \sqrt[3]{-\pi^2 R/2 \pm \sqrt{Q(R)}}$ ,  $Q(R) = -(R - 27\pi^4/4)R^2/27$ .

Отметим также, что  $x_1 = x_2$  при  $R \equiv R_{\min}$ .

Радиус конвективной ячейки, исходя из решений уравнения (16), может быть определен одним из следующих выражений:

$$(R_c)_k = \sigma_{1,i} \sqrt{R/(x_k(R))^3}. \quad (17)$$

где  $k = 1, 2, 3$ ,  $x_k(R)$  – решения уравнения (16).

Для выбора из выражений (17) физически обоснованного значения радиуса конвективной ячейки будем исходить из следующего экспериментального факта: с увеличением толщины слоя радиус ячейки увеличивается. Поэтому, как показывают результаты численных расчетов, в выражении (17) следует использовать решение  $x_1(R)$ .

Качественная оценка тепловой мощности конвективной ячейки  $W$  при  $z = 0,5$ ,  $n = 1$ ,  $\lambda = 0$  показывает пропорциональность радиусу  $R_c$

$$W = \alpha C_p S_{\Sigma} (T_2 - T_1), \quad (18)$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности порядка единицы;  $C$  – удельная теплоемкость жидкости;  $S_{\Sigma} = 2\pi R_c \Delta$  – площадь нисходящего потока жидкости;  $\Delta \ll R_c$  – толщина граничного слоя жидкости, переносящего тепло.

Поскольку радиус ячейки соответствует толщине слоя (по этому принципу отобрано решение  $x_1(R)$ ), выражение для мощности (18) может быть приведено к величине, которая пропорциональна  $(x_1(R))^3$ .

Для анализа условий возникновения элементарной конвективной ячейки рассмотрим зависимость решения  $x_1(R)$  от числа  $R$ . Это решение имеет максимальное значение  $\sqrt{R/3}$  при  $R_{\min} = 27\pi^4/4$  и с ростом  $R$  уменьшается. Отметим, что минимальное значение числа Рэлея соответствует минимальному числу Рэлея основной моды [13].

Из выражений (17) и (18) следует, что с увеличением числа Рэлея от  $R_{\min}$  до бесконечности радиус элементарной конвективной ячейки увеличивается, а тепловая мощность уменьшается  $\propto (x_1(R))^3$ . Таким образом, максимальная мощность ячейки достигается при ее минимальном радиусе. Величину минимального радиуса можно определить подстановкой полученных значений  $x_1(R_{\min})$  и  $R_{\min}$  в выражение (17)

$$R_c = \sigma_{1,i} 2^{1/2} \pi^{-1} \approx 0,45\sigma_{1,i}. \quad (19)$$

Для первого нуля функции Бесселя  $\sigma_{1,1} \approx 3,83$  радиус ячейки равен  $R_c \approx 1,72$ , что в пересчете на диаметр количественно соответствует экспериментальным данным, приведенным в таблице.

Таким образом, для основной моды возмущений ( $n = 1$ ) максимальная мощность ячейки достигается при минимальном значении ее радиуса. Величина радиуса цилиндрической конвективной ячейки может принимать дискретные значения, определяемые нулями функции Бесселя первого рода первого порядка ( $J_1(\sigma_{1,i}) = 0$ ).

### Обоснование размера ячейки и формирования многоугольных структур

Из проведенных экспериментов (см. рис. 1) следует, что с ростом температуры дна емкости количество цилиндрических конвективных ячеек минимального диаметра увеличивается от одной-двух вплоть до заполнения ими всей поверхности емкости.

На наш взгляд, явление зарождения одной ячейки и последующее появление вблизи такой же второй обусловлено тем, что они переносят больше тепла в единицу времени между поверхностями слоя жидкости, чем в случае простого увеличения диаметра ячейки до значения, определяемого вторым нулем функции Бесселя  $\sigma_{1,2}$ . Во втором случае, как показано в [22, 27, 28], в жидкости могут быть созданы концентрические конвективные валы, вращающиеся навстречу. Однако для образования такой структуры необходимо обеспечение специальных граничных условий и, кроме того, они неустойчивы к разбиению на гексагональные конвективные ячейки меньшего диаметра [15].

Преимущество образования двух одинаковых ячеек подтверждается тем фактом, что мощность конвективного потока жидкости (18) прямо пропорциональна радиусу так же, как и периметру ячейки. А так как радиус прямо пропорционален корню функции Бесселя  $\sigma_{1,i}$  и  $2\sigma_{1,1} \approx 7,664 > \sigma_{1,2} \approx 7,016$ , то формирование двух одинаковых цилиндрических ячеек с радиусом, соответствующим первому корню, энергетически более выгодно, чем одной ячейки, но большего радиуса, который соответствует второму корню.

Исходя из приведенного выше утверждения, можно сформулировать принцип замощения (покрытия) поверхности жидкости многоугольными структурами [29]. Так как увеличение температуры дна емкости приводит к росту числа элементарных цилиндрических ячеек, то должен наступить момент, когда они начнут соприкасаться и в результате плотной упаковки образовывать многоугольники, которые покроют (без пробелов и перекрытий) поверхность жидкости. При этом структура многоугольников с минимальными радиусами конвективных ячеек, а значит, большим суммарным периметром ячеек обеспечивает максимальный перенос тепла. В идеальном случае такими многоугольниками являются гексагоны. Дальнейшее увеличение температуры дна емкости, как показывают эксперименты, разрушает существующий порядок, и слой жидкости переходит в стадию хаотического конвективного движения.

### Выводы

В работе показано, что с увеличением температуры дна емкости с горизонтальным слоем масла толщиной 1 мм наблюдается появление цилиндрических конвективных ячеек в количестве от



одной-двух до полного заполнения ими объема масла. При этом разность температур между границами слоя масла остается на уровне 10–13 °С/мм. Появляющиеся при нагреве дна емкости ячейки характеризуются раздельным взаимным расположением. На верхней поверхности масла они образуют одинаковые круги диаметром порядка 3,2 мм. Для свободных граничных условий получены аналитические решения, описывающие цилиндрическую конвективную ячейку. Для такой ячейки найдено пространственное распределение возмущений скорости и температуры, а также рассчитан ее диаметр, величина которого соответствует экспериментальным данным. Следуя результатам экспериментов, а также исходя из свойств полученных решений, цилиндрическую конвективную ячейку можно рассматривать как элементарную, из большого количества которых формируются конвективные структуры. Таким образом, в работе также сформулирован энергетический принцип образования конвективных структур в слое вязкой, несжимаемой жидкости, подогреваемой снизу. Дано энергетическое обоснование принципа замощения (покрытия) поверхности жидкости цилиндрическими ячейками.

### Литература

1. *Benard, H.* Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. Description générale des phénomènes / H. Benard // *Revue générale des Sciences pures et appliquées.* – 1900. – Vol. 11, № 24. – P. 1261–1271.
2. *Benard, H.* Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. Procédés mécaniques et optiques d'examen lois numériques des phénomènes / H. Benard // *Revue générale des Sciences pures et appliquées.* – 1900. – Vol. 11, № 24. – P. 1309–1328.
3. *Strutt, J. W. (Lord Rayleigh).* On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side / J. W. Strutt (Lord Rayleigh) // *Phil. Mag.* – 1916. – Vol. 32. – P. 529–546.
4. *Thomson, J.* On a changing tessellated structure in certain liquid / J. Thomson // *Proc. Glasgow Philos. Soc.* – 1882. – Vol. 13. – P. 464–468.
5. <http://www.ivanov-portal.ru/astron/30.htm>
6. *Шишкин, Н. С.* Образование ячеистых структур в слоях жидкости или газа / Н. С. Шишкин // *Усп. физ. наук.* – 1991. – Т. 31, № 4. – С. 462–490.
7. <http://lifeglobe.net/blogs/details?id=860>
8. <http://p-i-f.dreamwidth.org/351593.html>
9. *A model for sorted patterned-ground regularity / R. J. Ray, W. B. Krantz, T. N. Caine and R. D. Gunn // J. Glaciology.* – 1983. – Vol. 29, №. 102. – P. 317–337.
10. *Рычкова, Е. В.* Численная модель тепловой конвекции в верхней мантии Земли под литосферой континентов / Е. В. Рычкова, С. А. Тычков // *Вычисл. технологии.* – 1997. – Т. 2, № 5. – С. 66–81.
11. <http://en.wikipedia.org/wiki/Supergranulation>
12. *Пикельнер, С. Б.* Динамика солнечной атмосферы / С. Б. Пикельнер // *Усп. физ. наук.* – 1966. – Т. 88, – № 3. – С. 505–523.
13. <http://opensky.library.ucar.edu/collections/SOARS-000-000-000-268>.
14. *Rieuton, M.* The Sun's Supergranulation / M. Rieuton, F. Rincon // *Living Rev. Solar Phys.* – 2010. – Vol. 7, № 2. – P. 84.
15. *Гершуни, Г. З.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. – М.: Наука, 1972. – 393 с.
16. *Chandrasekhar, S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability / S. Chandrasekhar. – Oxford: University Press, 1970. – 657 p.
17. *Гетлинг, А. В.* Формирование пространственных структур конвекции Рэлея–Бенара / А. В. Гетлинг // *Усп. физ. наук.* – 1991. – Т. 161, № 9. – С. 1–80.
18. *Бозбей, Л. С.* Элементарная конвективная ячейка в слое несжимаемой, вязкой жидкости / Л. С. Бозбей // *Современные проблемы машиностроения: Тез. докл. конф. молодых ученых и специалистов ИПМаш НАН Украины.* – Харьков, ноябрь 2013 г. – С. 29.
19. *Бозбей, Л. С.* Элементарная конвективная ячейка и ее теплофизические свойства // Л. С. Бозбей, А. О. Костинов, В. И. Ткаченко // *Физико-технические проблемы энергетики и пути их решения 2014 (ФТП ЭПР-2014): Материалы науч.-техн. конф.* – Харьков, 25–26 июня 2014 г. – ХНУ им. В. Н. Каразина, 2014. – С. 6.
20. *Неклюдов, И. М.* Описание ленгмюровских циркуляций упорядоченным набором конвективных кубических ячеек / И. М. Неклюдов, Б. В. Борц, В. И. Ткаченко // *Прикл. гидромеханика.* – 2012. – Т. 14 (86), № 2. – С. 29–40.
21. *Ван-Дейк, М.* Атлас течения жидкости и газов / М. Ван-Дейк. – М.: Мир, 1986. – 184 с.

22. *Koschmieder, E. L.* Bénard Cells and Taylor Vortices: monograph on mechanics / E. L. Koschmieder. – Cambridge: University Press, 1993. – 350 p.
23. *Эйдельман, Е. Д.* Влияние толщины слоя жидкости на соотношение размеров ячейки конвекции / Е. Д. Эйдельман // Журн. техн. физики. –1996. – Т. 68, № 11. – С. 7–11.
24. *Eckert, K.* Square cells in surface-tension-driven Bernard convection: experiment and theory / K. Eckert, M. Bestehorn, A. E. Theiss // J. Fluid Mech. – 1998. – Vol. 356. – P. 155–197.
25. *Experimental study of liquid movement in free elementary convective cells* / L. S. Bozbei, B. V. Borts, U. G. Kazarinov et al. // Energetika. – 2015. – Vol. 61, № 2. – P. 45–56.
26. *Royal Society Mathematical Tables. Vol. 7. Bessel functions.* – Cambridge: University Press, 1960. – 140 p.
27. *Zierep, J.* Über rotationssymmetrische Zellularkonvektionsströmungen / J. Zierep // Z. Angew. Math. Mech. – 1958. – Bd. 39, № 7/8. – P. 329–333.
28. *Zierep, J.* Eine rotationssymmetrische Zellularkonvektionsströmung / J. Zierep // Beitr. Phys. Atmos. – 1958. – Vol. 30. – P. 215–222.
29. *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

*Поступила в редакцию 01.08.16*