Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 1, 126 – 134

Задача оптимальної зупинки для процесів з незалежними приростами

Георгій М. Шевченко, Анна Г. Мороз

(*Представлена С. Я. Махном*)

Анотація. У роботі розглядається задача оптимальної зупинки для процесів із незалежними приростами у випадках, коли функція виплат показникова $g(x) = (1 - e^{-x})^+$ або логарифмічна $g(x) = (\ln x)^+$. Для показникової функції виплат показано, що оптимальний момент зупинки є моментом першого перетину певного рівня. Для логарифмічної функції виплат доведено, що у класі моментів перетину рівня немає оптимального розв'язку.

2000 MSC. 60G40, 60G51, 33C65.

Ключові слова та фрази. Момент оптимальної зупинки, функції виплат, процеси з незалежними приростами.

1. Вступ

Розглянемо модель фінансового ринку з єдиним безризиковим активом. Ціновий процес для цього активу моделюється процесом з незалежними приростами $\{X_t,\ t \in T\}$, з початковим значенням $X_0 = x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Цей процес визначено на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з натуральною фільтрацією $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s,\ s \le t\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Модель ринку може бути дискретною, у цьому випадку параметрична множина $T \subset \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, або неперервною — $T \subset \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Безризикова відсоткова ставка стала і дорівнює $q \ge 0$.

Задача оптимальної реалізації довічного платіжного зобов'язання американського типу з функцією виплат g формулюється так: максимізувати очікувану дисконтовану виплату

$$\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau < \infty\})$$

Стаття надійшла в редакцію 23.02.2009

ISSN 1810 – 3200. © Інститут математики НАН України

у класі M всіх марковських моментів τ відносно $(\mathcal{F}_t)$ зі значеннями в $[0,\infty]$. Іншими словами, задача полягає у відшуканні функції "вартості"

$$V(x) = \sup_{\tau \in M} \mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau < \infty\}). \tag{1.1}$$

Оптимальним називатимемо такий момент зупинки τ^*, для якого

$$V(x) = \mathbf{E}(g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{\tau^* < \infty\}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Задачу оптимальної зупинки з функцією виплат $g(x) = (x^+)^\upsilon = (\max\{x, 0\})^\upsilon$ при $\upsilon = 1, 2, \ldots$ для дискретного часу було розв'язано у [1, 5], її розв'язок узагальнено на випадок довільних $\upsilon > 0$ в [3]. Також у [5] для випадкового блукання було розв'язано задачу з функцією виплат $g(x) = (1 - e^{-x})^+$. У даній роботі ми узагальнимо одержаний в [5] результат на випадок процесів з незалежними приростами і розглянемо задачу про оптимальну зупинку для процесів із незалежними приростами з функцією виплат $g(x) = (\ln x)^+$.

Так само, як і в [3], момент оптимальної зупинки шукатимемо у вигляді

$$\tau^* = \tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}, \tag{1.3}$$

де оптимальне значення параметра а залежить від вигляду функції $g(x)$.

2. Функції Аппелля

Для розв'язання задач оптимальної зупинки нам знадобиться поняття функцій Аппелля. Функції Аппелля є деяким узагальненням поліномів Аппелля [4].

Поліномами Аппелля, породженими випадковою величиною η, такою що $\mathbf{E}\,|\eta|^n < \infty$ для всіх $n \geq 1$, називаються поліноми вигляду

$$Q_k(y;\eta) = (-1)^k \frac{d^k}{du^k}\left(\frac{e^{-uy}}{\mathbf{E}e^{-u\eta}}\right)\Big|_{u=0}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Припустимо тепер, що η — невід'ємна випадкова величина, і

$$P(\eta < \varepsilon) > 0 \text{ для всіх } \varepsilon > 0. \tag{2.2}$$

Визначимо функції Аппелля порядку υ для $\upsilon < 0$ наступним чином:

$$Q_\upsilon(y;\eta) = \int_0^\infty u^{-\upsilon-1} \frac{e^{-uy}}{\mathbf{E}e^{-u\eta}} \frac{du}{\Gamma(-\upsilon)}, \quad y > 0,\ \upsilon < 0, \tag{2.3}$$

де $\Gamma(z)$ — гамма-функція. Згідно з цим визначенням, функція $Q_\upsilon(y;\eta)$ неперервна за параметрами υ та y. Відмітимо, що

$$\lim_{\upsilon\uparrow 0} Q_\upsilon(y;\eta) = 1 \tag{2.4}$$

і довизначимо $Q_\upsilon(y;\eta)$ при $\upsilon = 0$ за неперервністю, поклавши

$$Q_0(y;\eta) = 1 \text{ для всіх } y > 0. \tag{2.5}$$

Задамо тепер $Q_\upsilon(y;\eta)$ для дійсних $\upsilon > 0$ за допомогою наступного співвідношення:

$$Q_\upsilon(y;\eta) = Q_\upsilon(0;\eta) + \upsilon \int_0^\infty Q_{\upsilon-1}(z;\eta)\,dz, \quad y > 0,\ \upsilon > 0, \tag{2.6}$$

і покладемо

$$Q_\upsilon(0;\eta) = -\upsilon \mathbf{E}\left(\int_0^\eta Q_{\upsilon-1}(z;\eta)\,dz \right). \tag{2.7}$$

Неважко показати, що для означених таким чином функцій Аппелля виконуються властивості (див., наприклад, [3]):

$$\frac{d}{dy} Q_\upsilon(y;\eta) = \upsilon Q_{\upsilon-1}(y;\eta), \tag{2.8}$$

$$\mathbf{E} Q_\upsilon(y+\eta;\eta) = y^\upsilon. \tag{2.9}$$

Також, має місце наступна лема.

Лема 2.1. *Нехай виконується* (2.2) *і* $\mathbf{E}(\eta^n) < \infty$ *для всіх* $n \ge 1$. *Тоді для всіх* $\upsilon > 0$ *існує таке* a_υ, *що*

- $Q_\upsilon(y;\eta) \le 0$ *для* $0 < y < a_\upsilon$, $Q_\upsilon(a_\upsilon;\eta) = 0$,
- $Q_\upsilon(y;\eta)$ *зростає для* $y \ge a_\upsilon$.

Доведення цієї леми наведено в [3]. □

3. Деякі факти про розподіл максимуму

Розглянемо незалежну від X_t показникову випадкову величину θ з параметром q, тобто

$$P(\theta > t) = e^{-qt}. \tag{3.1}$$

Позначимо
$$M_\theta = \sup_{0\le t<\theta} (X_t - x), \tag{3.2}$$
а у випадку $q = 0$
$$M_\infty = \sup_{0\le t<\infty} (X_t - x), \tag{3.3}$$
причому $\mathbf{E}(X_1^+) < \infty$ і $\mathbf{E}(X_1 - x) < 0$.

Лема 3.1. *Якщо $q \ge 0$, тоді для всіх $\varepsilon > 0$ виконується*
$$P(M_\theta < \varepsilon) > 0. \tag{3.4}$$

Лема 3.2. *Нехай $\upsilon > 0$, і виконуються умови:*

1. *якщо $q = 0$ то $\mathbf{E}(X_1) < 0$, $\mathbf{E}((X_1^+)^{\upsilon+1}) < \infty$;*
2. *якщо $q > 0$ то $\mathbf{E}((X_1^+)^\upsilon) < \infty$.*

Тоді $\mathbf{E}(M_\theta^\upsilon) < \infty$.

Доведення лем 3.1 та 3.2 наведено в [3]. □

Лема 3.3. 1. *Нехай $\tau_a = \inf\{t \ge 0 : X_t \ge a\}$, $a \ge x$. Тоді для всіх $u \le 0$ виконується*
$$\mathbf{E}(\mathbf{I}\{\tau_a < \infty\} e^{uX_{\tau_a}} e^{-q\tau_a}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{I}\{M_\theta + x \ge a\} e^{u(M_\theta + x)})}{\mathbf{E}(e^{uM_\theta})}. \tag{3.5}$$

2. *При виконанні умов леми 3.2 для всіх $a \ge x$ і всіх υ справедлива рівність*
$$\mathbf{E}(\mathbf{I}\{\tau_a < \infty\} X_{\tau_a}^\upsilon e^{-q\tau_a}) = \mathbf{E}(\mathbf{I}\{M_\theta + x \ge a\} Q_\upsilon(M_\theta + x; M_\theta)). \tag{3.6}$$

3. *Нехай виконані умови леми 3.2 і початкова умова $x \ge 1$. Тоді для всіх $a \ge x$ має місце наступна рівність*
$$\mathbf{E}(\mathbf{I}\{\tau_a < \infty\} \ln X_{\tau_a} e^{-q\tau_a})$$
$$= \mathbf{E}\left(\mathbf{I}\{M_\theta + x \ge a\} \int_0^\infty \frac{e^{-u(M_\theta + x)}}{u}\Big(1 - \frac{1}{\mathbf{E}e^{-uM_\theta}}\Big)\, du\right). \tag{3.7}$$

Доведення. Доведення пунктів 1, 2 наведено в [3]. Доведемо п. 3.

Обчислимо похідну зліва $\frac{\partial_-}{\partial \upsilon} Q_\upsilon(y;\eta)|_{\upsilon=0}$ за означенням:

$$\frac{\partial_-}{\partial \upsilon} Q_\upsilon(y;\eta)\Big|_{\upsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \upsilon} \int\limits_0^\infty u^{-\upsilon-1} \frac{e^{-uy}}{\mathbf{E} e^{-u\eta}} \frac{du}{\Gamma(-\upsilon)} \Bigg|_{\upsilon=0}$$

$$= \lim_{\upsilon\to 0-} \frac{1}{\upsilon} \int\limits_0^\infty u^{-\upsilon-1} \frac{e^{-uy}}{\mathbf{E} e^{-u\eta}} \frac{du}{\Gamma(-\upsilon)} - Q_0(y;\eta)$$

$$= \lim_{\upsilon\to 0-} \frac{1}{\upsilon} \int\limits_0^\infty u^{-\upsilon-1} \frac{e^{-uy}}{\Gamma(-\upsilon)} \Big(\frac{1}{\mathbf{E} e^{-u\eta}} - y^{-\upsilon} \Big)\, du$$

$$= \lim_{\upsilon\to 0-} \frac{1}{\upsilon} \int\limits_0^\infty u^{-\upsilon-1} \frac{e^{-uy}}{\Gamma(-\upsilon)} \Big(\frac{1}{\mathbf{E} e^{-u\eta}} - 1 \Big)\, du$$

$$+ \lim_{\upsilon\to 0-} \frac{1}{\upsilon} \int\limits_0^\infty u^{-\upsilon-1} \frac{e^{-uy}}{\Gamma(-\upsilon)} (1 - y^{-\upsilon})\, du$$

$$= \int\limits_0^\infty u^{-1} e^{-uy} \Big(1 - \frac{1}{\mathbf{E} e^{-u\eta}} \Big)\, du + 0$$

$$= \int\limits_0^\infty u^{-1} e^{-uy} \Big(1 - \frac{1}{\mathbf{E} e^{-u\eta}} \Big)\, du.$$

Для обох доданків граничний перехід під знаком інтегралу можливий завдяки теоремі Лебега про монотонну збіжність. Також ми використали те, що $Q_0(y;\eta) = 1 = \int_0^\infty u^{-\upsilon-1} y^{-\upsilon} \frac{e^{-uy}}{\Gamma(-\upsilon)}\, du$ за означенням гама-функцій та $Q_0(y;\eta)$.

Поклавши $y = M_\theta + x$, $\eta = M_\theta$, одержимо

$$\frac{\partial_-}{\partial \upsilon} Q_\upsilon(M_\theta + x, M_\theta)\Big|_{\upsilon=0} = \int\limits_0^\infty u^{-1} e^{-u(M_\theta + x)} \Big(1 - \frac{1}{\mathbf{E} e^{-uM_\theta}} \Big)\, du.$$

Продиференціюємо п. 2 за параметром υ у точці $\upsilon = 0$ зліва:

$$\mathbf{E}(\mathbf{I}\{\tau_a < \infty\} \ln X_{\tau_a} e^{-q\tau_a}) = \mathbf{E}\Big(\mathbf{I}\{M_\theta + x \geq a\} \frac{\partial_-}{\partial \upsilon}\, Q_\upsilon(M_\theta + x, M_\theta)\Big|_{\upsilon=0} \Big).$$

Для лівої частини диференціювання під знаком математичного сподівання можливе завдяки монотонній збіжності, у правій частині вираз під математичним сподіванням дограничний вираз можна розбити на два доданки, як вище, для кожного з яких має місце монотонна збіжність. Лему доведено. □

Лема 3.4. *Нехай $t \in \mathbf{Z}^+$, $q \geq 0$, $f(x)$ та $g(x)$ — невід'ємні функції, такі, що для всіх x $f(x) \geq g(x)$, і*

$$f(x) \geq e^{-q}\mathbf{E}f(X_1). \tag{3.8}$$

Тоді для всіх x справедлива нерівність:

$$f(x) \geq \sup_{\tau \in M} \mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau < \infty\}). \tag{3.9}$$

Доведення леми див. у [3].

4. Основні результати

Наступну теорему доведено у [3].

Теорема 4.1. *Нехай $g(x) = (x^+)^\upsilon$, $\upsilon > 0$ виконані умови леми* 3.2, *і a_υ — додатний корінь рівняння*

$$Q_\upsilon(a_\upsilon; M_\theta) = 0. \tag{4.1}$$

Тоді момент зупинки

$$\tau_{a_\upsilon} = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a_\upsilon\} \tag{4.2}$$

буде оптимальним, і

$$V(x) = \mathbf{E}(Q_\upsilon(M_\theta + x; M_\theta)\mathbf{I}\{M_\theta + x \geq a_\upsilon\}). \tag{4.3}$$

Використовуючи схожі методи, доведемо аналогічне твердження для показникової функції виплат.

Теорема 4.2. *Нехай $g(x) = (1 - e^{-x})^+$, виконані умови леми* 3.2, *і*

$$a^* = -\ln \mathbf{E}e^{-M_\theta}. \tag{4.4}$$

Тоді момент зупинки

$$\tau_{a^*} = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a^*\} \tag{4.5}$$

буде оптимальним, і

$$V(x) = \mathbf{E}(1 - e^{-M_\theta - x}(\mathbf{E}e^{-M_\theta})^{-1})^+. \tag{4.6}$$

Доведення. Наряду з функцією $V(x)$ розглянемо функцію

$$\hat{V}(x) = \sup_{\tau_a \in \hat{M}} \mathbf{E}(g(X_{\tau_a})e^{-q\tau_a}\mathbf{I}\{\tau < \infty\}), \tag{4.7}$$

де $\hat{M}$ — клас моментів зупинки виду $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}, a \geq x$. Очевидно, $\hat{V}(x) \leq V(x)$, як супремум за вужчим класом моментів зупинки. Відмітимо, що за п. 1 леми 3.3 при значенні $u = -1$ справедлива рівність

$$\mathbf{E}(\mathbf{I}\{\tau_a < \infty\}e^{-X_{\tau_a}}e^{-q\tau_a}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{I}\{M_\theta + x \geq a\}e^{-(M_\theta + x)})}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}, \tag{4.8}$$

звідки

$$\mathbf{E}(\mathbf{I}\{\tau_a < \infty\}g(X_{\tau_a})e^{-q\tau_a}) = \mathbf{E}\mathbf{I}\{M_\theta + x \geq a\}\Big(1 - \frac{e^{-(M_\theta + x)}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}\Big). \tag{4.9}$$

Оскільки функція $1 - \frac{e^{-a}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}$ монотонна за a і має єдиний корінь $a^* = -\ln \mathbf{E}e^{-M_\theta}$, то ліва частина (4.9) досягає свого максимуму в точці $a = a^*$, причому

$$\hat{V}(x) = \mathbf{E}\mathbf{I}\{M_\theta + x \geq a^*\}\Big(1 - \frac{e^{-(M_\theta + x)}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}\Big) = \mathbf{E}\Big(1 - \frac{e^{-(M_\theta + x)}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}\Big)^+. \tag{4.10}$$

Таким чином, ми показали, що $\hat{V}(x)$ досягає максимуму в точці a^*. Залишилося довести справедливість нерівності $\hat{V}(x) \geq V(x)$. Для цього розглянемо функцію $f(x) = \mathbf{E}\big(1 - \frac{e^{-(M_\theta + x)}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}\big)^+$. За нерівністю Ієнсена:

$$f(x) \geq \Big(1 - \frac{\mathbf{E}e^{-(M_\theta + x)}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}\Big)^+ = (1 - e^{-x})^+ = g(x). \tag{4.11}$$

Позначимо $\xi = X_1 - x$, і розглянемо випадкову величину γ таку, що

$$P(\gamma = 1) = 1 - P(\gamma = 0) = e^{-q}. \tag{4.12}$$

Тоді $\hat{M}_\theta = (\gamma M_\theta + \xi)^+$ за розподілом, і справедливі наступні нерівності

$$\begin{aligned} e^{-q}\mathbf{E}f(X_1) &= e^{-q}\mathbf{E}\Big(1 - \frac{e^{-(M_\theta + X_1)}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}\Big)^+ \\ &= e^{-q}\mathbf{E}\Big(1 - \frac{e^{-(M_\theta + x + \xi)}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}\Big)^+ = \mathbf{E}\Big(e^{-q} - \frac{e^{-q}e^{-(M_\theta + x + \xi)}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}\Big)^+ \\ &\leq \mathbf{E}\Big(1 - \frac{e^{-(\gamma M_\theta + x + \xi)}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}\Big)^+ = \mathbf{E}\Big(1 - \frac{e^{-(M_\theta + x)}}{\mathbf{E}(e^{-M_\theta})}\Big)^+ = f(x). \end{aligned} \tag{4.13}$$

З (4.11), (4.13) за лемою 3.4 випливає $f(x) = \hat{V}(x) \geq V(x)$, що завершує доведення теореми. □

Нехай тепер $g(x) = (\ln x)^+$, $q \geq 2$, початкова умова $X_0 = x \geq 1$ і виконані умови леми 3.2.

Спробуємо відшукати оптимальний момент зупинки τ_a для цього випадку у вигляді

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}, \tag{4.14}$$

де $a \geq x$. Розглянемо функцію

$$\hat{V}(x) = \sup_{\tau_a \in \hat{M}} \mathbf{E}(g(X_{\tau_a})e^{-q\tau_a}\mathbf{I}\{\tau_a < \infty\}), \tag{4.15}$$

де $\hat{M}$ — клас моментів зупинки виду $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\},\ a \geq x$. Як і в попередній теоремі, $\hat{V}(x) \leq V(x)$. Відмітимо, що за п. 3 леми 3.3 справедлива рівність

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(\mathbf{I}\{\tau_a < \infty\} \ln X_{\tau_a} e^{-q\tau_a})\\ &\quad = \mathbf{E}\left(\mathbf{I}\{M_\theta + x \geq a\} \int_0^\infty u^{-1} e^{-u(M_\theta + x)} \left(1 - \frac{1}{Ee^{-uM_\theta}}\right) du\right).\end{aligned} \tag{4.16}$$

Оскільки функція e^{-ua} додатна і спадає, $1 - \frac{1}{Ee^{-ua}e^{ux}}$ при $u \geq 0$ від'-ємна і спадає, то інтеграл у правій частині (4.16) від'ємний та зростає, і ліва частина досягає свого максимуму на нескінченності. Тобто, в цьому випадку не існує оптимального моменту зупинки вигляду (1.3).

5. Висновки

Ми розглянули задачу оптимальної зупинки процесів із незалежними приростами і довели, що для показникової функції виплат оптимальний момент зупинки є моментом першого перетину рівня, який знайдено в явному вигляді. Для логарифмічної функції виплат доведено, що у класі моментів перетину рівня не існує оптимального розв'язку.

Література

[1] A. Darling, T. Liggett, H. M. Taylor, *Optimal stopping for partial sums* // Ann. Math. Stat., (1972), N 43, 1363–1368.

[2] A. Kyprianou, A. Budhi, *On the Novikov–Shiryaev optimal stopping problem in continuous time* // Electron. Comm. Probab., (2005), N 10, 146–154.

[3] A. Novikov, A. Shiryaev, *On a solution of the optimal stopping problem for processes with independed increments* // Stochastics, **79**, (2007), N 3–4, 393–406.

[4] W. Schoutens, *Stochastic processes and orthogonal polynomials*, New-York: Springer–Verlag, 2000.

[5] А. Новиков, А. Ширяев, *Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий* // Теор. Вероятн. Примен., **49**, (2004), N 2, 373–382.

Відомості про авторів

Георгій М. Шевченко, Анна Григорівна Мороз

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики,
Механіко-математичний факультет
Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
вул. Володимирська, 64,
Київ, 01033,
Україна
E-Mail: `zhora@univ.kiev.ua`, `mag-87@inbox.ru`