Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 1, 113 – 125

О продолжении линейных функционалов

Александр В. Ревенко

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Приведён критерий продолжения линейного функционала, подчиненного произвольной функции. На основании последнего получены новые критерии продолжения функционалов с заданными свойствами, а также приведены аналоги теоремы Хана–Банаха для выпуклых непрерывных функций.

2000 MSC. 46A22.

Ключевые слова и фразы. Теорема Хана–Банаха, выпуклая функцмя, калибровочная функция.

Известные автору версии теоремы Хана-Банаха, а также их применения к различным задачам, основаны либо на подчинении линейного функционала сублинейной (калибровочной) функции p [5–9], либо речь в них идет не о продолжении, а о существовании линейных функционалов с заданными свойствами [4,10]. Возникает вопрос, нельзя ли избавиться от сублинейности функции p. В связи с этим приведем критерий продолжения линейного функционала.

Теорема 1. *Пусть ϕ — действительная функция на действительном векторном пространстве X и f_0 — линейный функционал, определенный на подпространстве X_0 и удовлетворяющий на нем условию*

$$f_0(x) \leq \phi(x) \quad (x \in X_0). \tag{1}$$

Тогда для того, чтобы f_0 допускал линейное продолжение на всё пространство X с сохранением на нём неравенства (1)*, необходимо*

Статья поступила в редакцию 20.05.2006

ISSN 1810 – 3200.

и достаточно выполнение условия

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\phi(\lambda_k x_k)-f_0\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\;\middle|\;\sum_{k=1}^{n}x_k\in X_0,\ x_k\in X,\ \lambda_k>0,\ n\in N\right\}=0. \quad (2)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено неравенство (1) и f — линейное продолжение функционала f_0 такое, что $f(x)\le\phi(x)$ $(x\in X)$. Тогда для любой суммы $\sum_{k=1}^{n}x_k\in X_0$ и любого набора положительных чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ справедливо неравенство

$$f_0\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=f\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}f(\lambda_k x_k)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\phi(\lambda_k x_k).$$

Из последнего неравенства, очевидно, следует условие (2) теоремы.

Достаточность. Пусть выполняются условия (1) и (2). Тогда для любого $x\in X$, любой суммы $\sum_{k=1}^{n}x_k=x$ и любого набора положительных чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ получим:

$$\phi(-x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\phi(\lambda_k x_k)-f_0\left(\sum_{k=1}^{n}x_k-x\right)\ge 0.$$

Откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\phi(\lambda_k x_k)\ge-\phi(-x)$$

и, следовательно, функция

$$p(x)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\phi(\lambda_k x_k)\;\middle|\;\sum_{k=1}^{n}x_k=x,\ x_k\in X,\ \lambda_k>0,\ n\in N\right\}$$

конечна на X . Из (1) следует, что $\phi(0)\ge 0$, а потому $p(0)=0$. При любом $\alpha>0$ получаем

$$p(\alpha x)$$
$$=\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\phi(\lambda_k x_k)\;\middle|\;\sum_{k=1}^{n}x_k=\alpha x,\ x_k\in X,\ \lambda_k>0,\ n\in N\right\}$$

$$= \inf\left\{\alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha\lambda_k}\phi(\alpha\lambda_k x_k)\ \middle|\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha}x_k = x,\ \frac{x_k}{\alpha}\in X,\ \lambda_k>0,\ n\in N\right\}$$
$$= \alpha p(x).$$

Кроме того, для любых $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$, выбрав суммы $\sum_{k=1}^{n} x_k = x$, $\sum_{k=1}^{m} y_k = y$ и наборы положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\phi(\lambda_k x_k) < p(x) + \varepsilon$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}f(\mu_k y_k) < p(y) + \varepsilon,$$

получим

$$p(x+y) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\phi(\lambda_k x_k) + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\mu_k}\phi(\mu_k y_k) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего неравенства следует, что p — калибровочная функция на пространстве X.

Если $x \in X_0$, то из условия (2) получим, что

$$f_0(x) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\phi(\lambda_k x_k)$$

для любой суммы $\sum_{k=1}^{n} x_k = x$ и любых чисел $\lambda_k > 0$. Следовательно, $f_0(x) \le p(x)$ $(x \in X_0)$. Теперь используя теорему Хана–Банаха, найдем линейное продолжение f функционала f_0 такое, что $f(x) \le p(x)$ $(x \in X)$.

Так как, очевидно, $p(x) \le \phi(x)$ $(x \in X)$, то теорема доказана. □

Из предыдущей теоремы сразу следует.

Теорема 2. *Пусть ρ — положительно однородная действительная функция на действительном векторном пространстве X и f_0 — линейный функционал, определенный на подпространстве X_0 и удовлетворяющий на нем условию*

$$f_0(x) \le \rho(x) \quad (x \in X_0). \tag{3}$$

Тогда для того, чтобы f_0 допускал линейное продолжение на всё пространство X с сохранением на нём неравенства (3), необходимо и достаточно выполнение условия

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\rho(x_k)-f_0\biggl(\sum_{k=1}^{n}x_k\biggr)\;\Bigg|\;\sum_{k=1}^{n}x_k\in X_0,\ x_k\in X,\ n\in N\right\}=0. \quad (4)$$

Ниже, опираясь на теорему 2, доказаны теоремы 3–5.

Теорема 3. *Пусть* Γ *— семейство калибровочных функций на действительном векторном пространстве* X *и* f_0 *— линейный функционал, определенный на подпространстве* X_0 *и удовлетворяющий на нем условию*

$$f_0(x)\le p(x)\quad (x\in X_0,\ p\in\Gamma). \quad (5)$$

Тогда для того, чтобы f_0 *допускал линейное продолжение на все пространство* X *с сохранением на нем неравенств* (5)*, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора* $p_1,p_2,\dots,p_n$ *калибровочных функций семейства* Γ *выполнялось условие*

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}p_k(x_k)-f_0\biggl(\sum_{k=1}^{n}x_k\biggr)\;\Bigg|\;\sum_{k=1}^{n}x_k\in X_0,\ x_k\in X\right\}=0. \quad (6)$$

Доказательство. Необходимость. Если f — линейное продолжение функционала f_0, удовлетворяющего на X_0 неравенствам (5), то для любого конечного набора $p_1,p_2,\dots,p_n$ калибровочных функций семейства Γ и любой суммы $\sum_{k=1}^{n}x_k\in X_0$ справедливо:

$$f_0\biggl(\sum_{k=1}^{n}x_k\biggr)=f\biggl(\sum_{k=1}^{n}x_k\biggr)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\le\sum_{k=1}^{n}p(x_k).$$

Откуда, очевидно, и следует (6).

Достаточность. Пусть выполняется условие (6). Из (6) при $n=2$, $x_1=x$, $x_2=-x$ и при любых $p_1,p_2\in\Gamma$ получим $p_1(x)+p_2(-x)-f_0(x-x)\ge 0$. То есть $p_1(x)\ge p_2(-x)$ $(x\in X)$. Последнее неравенство обеспечивает конечность функции $\rho(x)=\inf\{p(x)\mid p\in\Gamma\}$ на пространстве X. Функция ρ положительно однородна и при любом фиксированном $n\in N$ из (6), очевидно, следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\rho(x_k)-f_0\biggl(\sum_{k=1}^{n}x_k\biggr)\ge 0\quad\biggl(\sum_{k=1}^{n}x_k\in X_0,\ x_k\in X\biggr).$$

Таким образом, выполняется условие (4) теоремы 2. В силу теоремы 2 существует линейное продолжение f функционала f_0, удовлетворяющее условию $f(x)\le\rho(x)\le p(x)$ $(x\in X,\ p\in\Gamma)$. Теорема доказана. □

При $X_0 = \{0\}$ получим.

Следствие 1. *Для того, чтобы на действительном векторном пространстве X существовал линейный функционал, подчиненный на нем всем калибровочным функциям семейства Γ, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора $p_1, p_2, \dots, p_n$ из Γ выполнялось условие*

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} p_k(x_k) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k = 0,\ x_k \in X \right\} = 0. \tag{7}$$

Замечание 1. Если Γ состоит из конечного числа калибровочных функций $p_1, p_2, \dots, p_n$, то (как следует из доказательства теоремы 3) необходимым и достаточным условием продолжения является условие (6). В частности, для двух функций p_1 и p_2 это условие принимает вид

$$\inf\{p_1(x) + p_2(y) - f_0(x+y) \mid x+y \in X_0\} = 0, \tag{8}$$

При этом соответствующее условие (7) имеет вид $p_1(x) + p_2(-x) \geq 0$ $(x \in X)$. Если p и $-q$ — калибровочные функции, удовлетворяющие на X_0 неравенству $q(x) \leq f_0(x) \leq p(x)$, то (обозначив $p_1(x) = p(x)$, а $p_2(x) = -q(-x)$) из условия (8) получим необходимое и достаточное условие линейного продолжения последнего двойного неравенства на всё пространство X, а именно

$$\inf\{p(x) - q(y) - f_0(x+y) \mid x+y \in X_0\} = 0. \tag{9}$$

Теорема 4. *Пусть p — калибровочная функция на упорядоченном действительном векторном пространстве X и X_0 — такое подпространство, что*

$$\forall\, x \in X \ \exists\, y \in X_0 \ (x \leq y). \tag{10}$$

Тогда для того, чтобы положительный на X_0 (относительно индуцированной структуры порядка) линейный функционал f_0 , удовлетворяющий условию

$$f_0(x) \leq p(x) \quad (x \in X_0), \tag{11}$$

допускал положительное линейное продолжение f на все пространс-

тво X с сохранением на нем неравенства (11), *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\forall\, x \in X,\ y \in X_0\ (y \le x \Rightarrow f_0(y) \le p(x)). \tag{12}$$

Доказательство. Необходимость. Если f — положительное линейное продолжение функционала f_0, то для любых $x \in X,\ y \in X_0$ из неравенства $y \le x$ следует, что $f_0(y) = f(y) \le f(x) \le p(x)$, и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняются условия (10), (11) и (12). Тогда, согласно доказательству теоремы о положительном продолжении [1], калибровочная функция

$$\rho(x) = \inf\{f_0(s) \mid s \in X_0,\ s \ge x\} \quad (x \in X)$$

конечна на X, $f_0(x) = \rho(x)$ $(x \in X_0)$ и любое продолжение f функционала f_0 такое, что $f(x) \le \rho(x)$ $(x \in X)$, положительно на X.

Теперь для любой суммы $x + z = t \in X_0$ и функций p, ρ используя условие (12), получим

$$\begin{aligned}
p(x) + \rho(z) - f_0(x+z) &= p(x) + \rho(t-x) - f_0(t)\\
&= p(x) + \inf\{f_0(s) \mid s \in X_0,\ s \ge t - x\} - f_0(t)\\
&= p(x) + \inf\{f_0(t) - f_0(y) \mid y \in X_0,\ x \ge y\} - f_0(t)\\
&= p(x) + \inf\{-f_0(y) \mid y \in X_0,\ x \ge y\}\\
&= p(x) - \sup\{f_0(y) \mid y \in X_0,\ x \ge y\} \ge 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, функции p и ρ удовлетворяют условию (8), согласно которому существует линейное продолжение f функционала f_0, подчиненное на X обеим калибровочным функциям. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Если X упорядоченое локально выпуклое пространство и p — преднорма на нём, то предыдущая теорема является критерием продолжения непрерывного положительного линейного функционала. Существование непрерывного положительного продолжения линейного функционала в упорядоченом топологическом векторном пространстве с положительным конусом P таким, что $\mathrm{int}\,(X_0 \cap P) \neq \emptyset$, доказано Крейном М. Г. [1]

Замечание 3. Из доказательства предыдущей теоремы и теоремы 3 легко видеть, что необходимым и достаточным условием продолжения положительного функционала f_0, удовлетворяющего неравенству $f_0(x) \le p(x)$ $(x \in X_0,\ p \in \Gamma)$, является условие

$$\forall\, n \in N;\ p_1, p_2, \ldots, p_n \in \Gamma;\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in X;\ y \in X_0$$
$$\left(y \le \sum_{k=1}^{n} x_k \Rightarrow f_0(y) \le \sum_{k=1}^{n} p_k(x_k) \right).$$

Пусть теперь G — произвольное семейство эндоморфизмов действительного векторного пространства X и p — калибровочная функция на X , удовлетворяющая условию

$$p(u(x)) \le p(x) \quad (x \in X,\ u \in G). \tag{13}$$

Если G является коммутативной полугруппой эндоморфизмов или разрешимой группой автоморфизмов пространства X, то существует линейное инвариантное относительно G продолжение аналогичного функционала f_0, определённого на подпространстве X_0 (теорема Эгнью–Морса) [1].

В связи с теоремой Эгнью–Морса для каждого $u \in G$ определим на X калибровочную функцию p_u равенством

$$p_u(x) = \overline{\lim_{n}}\, \frac{1}{n}\, p\left(\sum_{k=1}^{n} u^k(x) \right). \tag{14}$$

Теорема 5. *Пусть X_0 — подпространство действительного векторного пространства X , инвариантное относительно семейства G $(u(X_0) \subset X_0,\ u \in G)$ и p — калибровочная функция, удовлетворяющая на X неравенствам* (13). *Пусть линейный функционал f_0 определён на X_0 и удовлетворяет условиям*

$$f_0(u(x)) = f_0(x) \le p(x) \quad (x \in X_0,\ u \in G). \tag{15}$$

Тогда для того, чтобы f_0 допускал линейное продолжение f на все пространство X, удовлетворяющее на нем условиям (15), *необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора $p_{u_1}, p_{u_2}, \ldots, p_{u_n}$ функций* (14) *выполнялось равенство*

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{n} p_{u_k}(x_k) - f_0\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k \in X_0,\ x_k \in X\right\} = 0. \qquad (16)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть f — линейное продолжение функционала f_0 на все пространство X и $f(x) = f(u(x)) \le p(x)$ $(x \in X,\ u \in G)$. Тогда

$$f(x) = f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k(x)\right) \le p\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k(x)\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(u^k(x)) \le p(x)$$

для любых $n \in N,\ x \in X$. Откуда следует, что

$$f(x) \le p_u(x) = \overline{\lim_n}\, \frac{1}{n}\, p\left(\sum_{k=1}^{n} u^k(x)\right) \le p(x).$$

Теперь для любого конечного набора $p_{u_1}, p_{u_2}, \ldots, p_{u_n}$ $(u_k \in G)$ (используя теорему 3) получаем

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{n} p_{u_k}(x_k) - f_0\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k \in X_0,\ x_k \in X\right\} = 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть f_0 удовлетворяет условию (15). Тогда (как и при доказательстве необходимости) получим, что $f_0(x) \le p_u(x)$ $(x \in X_0,\ u \in G)$. Используя (16) и теорему 3, найдем линейное продолжение f функционала f_0, для которого $f(x) \le p_u \le p(x)$ $(x \in X,\ u \in G)$. Так как

$$\begin{aligned} p_u(\pm(u(x) - x)) &= \overline{\lim_n}\, \frac{1}{n}\, p\left(\pm\sum_{k=1}^{n}(u^{k+1}(x) - u^k(x))\right) \\ &= \overline{\lim_n}\, \frac{1}{n}\, p(\pm(u^{n+1}(x) - u(x))) \le \overline{\lim_n}\, \frac{1}{n}\,(p(x) + p(\pm x)) = 0, \end{aligned}$$

то из последних неравенств следует инвариантность функционала f относительно семейства G на пространстве X. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим теперь топологическое векторное пространство X и непрерывную на нем выпуклую функцию φ. Тогда если $\varphi(0) \geq 0$, то огибающей функцией φ назовем функцию p, определенную на X равенством

$$p(x) = \inf_{\alpha>0} \frac{\varphi(\alpha x)}{\alpha} \quad (x \in X). \tag{17}$$

Лемма 1. *Огибающая функция φ является непрерывной калибровочной функцией на топологическом векторном пространстве X.*

Доказательство. Покажем сначала, что функция p конечна на X. Действительно, если для некоторого $x \in X$

$$\inf_{\alpha>0} \frac{\varphi(\alpha x)}{\alpha} = -\infty,$$

то существует последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел α_n такая, что

$$\frac{\varphi(\alpha_n x)}{\alpha_n} < -n \ (n \in N). \tag{18}$$

Из непрерывности функции φ и (18) теперь следует, что указанная последовательность не имеет конечных положительных предельных точек и 0 не является ее предельной точкой при $\varphi(0) > 0$. Если же $\varphi(0) = 0$ и 0 является предельной точкой последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, то неравенство (18) противоречит существованию конечной правой производной в нуле непрерывной выпуклой действительной функции $M_x(\alpha) = \varphi(\alpha x)$ $(\alpha \in R)$ [3]. Таким образом, $\alpha_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Но тогда при достаточно большом n, используя выпуклость функции φ и неравенство (18), получим

$$-1 > \frac{1}{n\alpha_n}\varphi(\alpha_n x) \geq \varphi\Big(\frac{1}{n}x\Big) - \Big(1 - \frac{1}{n\alpha_n}\Big)\varphi(0).$$

Последнее противоречит условию леммы, что и доказывает конечность функции p. Очевидно $p(0) = 0$ и для любого $\lambda > 0$ справедливо

$$p(\lambda x) = \inf_{\alpha>0} \frac{\varphi(\lambda\alpha x)}{\alpha} = \lambda p(x).$$

Пусть теперь x и y произвольные точки пространства X. Тогда для любых $\alpha, \beta > 0$ выполнено

$$p(x+y) \leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\varphi\Big(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(x+y)\Big)$$

$$\leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\varphi(\alpha x)+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\varphi(\beta y)\Big)$$
$$=\frac{\varphi(\alpha x)}{\alpha}+\frac{\varphi(\beta y)}{\beta}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$, выбрав α и β так, чтобы $\frac{\varphi(\alpha x)}{\alpha} < p(x)+\varepsilon$ и $\frac{\varphi(\beta y)}{\beta} < p(y)+\varepsilon$, получим $p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon$. Откуда и следует полуаддитивность функции p. Очевидно, $p(x) \leq \varphi(x)$ $(x \in X)$. Поскольку непрерывность выпуклой функции φ равносильна ее ограниченности сверху в некоторой окрестности точки [3], функция p — непрерывна на X. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если φ непрерывная выпуклая функция на топологическом векторном пространстве X такая, что $\varphi(0) \geq 0$, то ее огибающая функция является наибольшей среди всех калибровочных функций r таких, что $r(x) \leq \varphi(x)$ $(x \in X)$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Предположим противное, то есть существует $x_0 \in X$ такой, что $p(x_0) < r(x_0) \leq \varphi(x_0)$. Тогда, в силу определения функции p, найдется $\alpha > 0$ такое, что $\frac{\varphi(\alpha x_0)}{\alpha} < r(x_0)$. Из последнего следует $\varphi(\alpha x_0) < r(\alpha x_0)$, что противоречит условию леммы. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Используя приведенные леммы, получим следующие аналоги теорем Хана–Банаха для действительного и комплексного топологического векторного пространства.

Теорема 6. *Пусть φ — непрерывная выпуклая функция на действительном топологическом векторном пространстве X и f_0 — непрерывный линейный функционал, определенный на подпространстве X_0 и удовлетворяющий на нем неравенству*

$$f_0(x) \leq \varphi(x) \quad (x \in X_0). \tag{19}$$

Тогда f_0 можно линейно продолжить на все пространство X с сохранением на нем последнего неравенства.

Доказательство. Пусть f_0 удовлетворяет неравенству (19). Тогда $\varphi(0) \geq 0$. Поскольку на X_0 функционал f_0 является калибровочной функцией, то из леммы 2 следует, что на X_0 огибающая p функции φ удовлетворяет неравенству $f_0(x) \leq p(x)$ $(x \in X_0)$. Теперь из определения функции p, леммы 1 и теоремы Хана–Банаха следует существование линейного продолжения f функционала f_0, такого, что $f_0(x) \leq p(x) \leq \varphi(x)$ $(x \in X_0)$. Теорема доказана. □

Теорема 7. *Пусть φ непрерывная неотрицательная выпуклая функция на комплексном топологическом векторном пространстве X такая, что $\varphi(xe^{i\theta}) = \varphi(x)$ $(x \in X,\ \theta \in R)$ и f_0 линейный функционал, определенный на подпространстве X_0 и удовлетворяющий на нем неравенству $|f_0(x)| \leq \varphi(x)$ $(x \in X_0)$. Тогда f_0 можно линейно продолжить на все пространство X с сохранением на нем предыдущего неравенства.*

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. Тогда из определения огибающей следует, что p — неотрицательна и для любого комплексного числа λ выполняется равенство $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$. Таким образом p является преднормой на X и утверждение теоремы теперь следует (как и в предыдущей теореме) из лемм 1 и 2 и соответствующей теоремы Хана–Банаха для комплексного топологического векторного пространства. □

Теорема 8. *Пусть φ и $-\psi$ непрерывные выпуклые функции на действительном топологическом векторном пространстве X такие, что $\psi(x) \leq \varphi(x)$ $(x \in X)$ и линейный функционал f_0, определенный на подпространстве X_0, удовлетворяет неравенству*

$$\psi(x) \leq f_0(x) \leq \varphi(x) \quad (x \in X_0).$$

Тогда для того, чтобы f_0 можно было линейно продолжить на все пространство X с сохранением на нем предыдущего неравенства, необходимо и достаточно , чтобы

$$\inf_{\alpha,\beta>0} (\beta\varphi(\alpha x) - \alpha\psi(\beta x)) \geq 0 \tag{20}$$

и огибающие p и q (соответственно функций φ и $-\psi$) удовлетворяли условию (9).

Доказательство. Необходимость. Пусть f — линейное продолжение функционала f_0 такое, что

$$\psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) \quad (x \in X). \tag{21}$$

Тогда $\psi(0) \leq 0 \leq \varphi(0)$ и, согласно лемме 2, для огибающей p функции φ получим $f(x) \leq p(x)$ $(x \in X)$. Из левой части неравенства (21) аналогично следует, что для огибающей $-q$ функции $-\psi$ выполняется неравенство $f(x) \geq q(x)$ $(x \in X)$. Так как, очевидно,

$$q(x) = \sup_{\beta>0} \frac{\psi(\beta x)}{\beta} \quad (x \in X),$$

то из последних двух неравенств получим

$$\sup_{\beta>0}\frac{\psi(\beta x)}{\beta}\le\inf_{\alpha>0}\frac{\varphi(\alpha x)}{\alpha}\quad(x\in X).\tag{22}$$

Из неравенства (22) следует условие (20) теоремы. Остальные условия теоремы следуют теперь из замечания после теоремы 3.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда из (20), очевидно, следует неравенство $q(x)\le p(x)$ $(x\in X)$, и, значит, выполнены все условия замечания после теоремы 3, согласно которому существует линейное продолжение f функционала f_0, удовлетворяющее неравенству $q(x)\le f(x)\le p(x)$ $(x\in X)$. Из определения огибающих теперь получим неравенство $\psi(x)\le f(x)\le\varphi(x)$. Теорема доказана. □

Следствие 2. *Пусть φ и $-\psi$ непрерывные выпуклые функции на топологическом векторном пространстве X, удовлетворяющие условиям $\psi(x)\le\varphi(x)$ $(x\in X)$, $\psi(0)\le 0\le\varphi(0)$. Тогда для существования линейного непрерывного функционала f такого, что $\psi(x)\le f(x)\le\varphi(x)$ $(x\in X)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства* (20).

Результаты, родственные последним утверждениям (“sandwich theorems”), были получены Кёнигом Г. [5, 6]

Литература

[1] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ: теория и приложения*, Москва. 1969, 1071 с.

[2] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Москва. 1974, 479 с.

[3] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Москва. 1958, 271 с.

[4] M. Neumann, *Sandwich theorems for operators of covex type* // J. Math. Anal. and Appl. **188** (1994), 759–773.

[5] H. König, *On some basic theorems in convex analysis, in Modern applied mathematics: Optimization and operations reseach*, B. Korte ed., North–Holland, New York: 1982, 106–144.

[6] H. König, *On the abstract Hahn–Banach theorem due to Rode* // Aequ. Math. **34** (1987), 89–95.

[7] B. Fuchssteiner, H. König, *New versions of the Hahn–Banach theorem. General inequalities*, 2 (Proc. Second Internat. Conf., Oberwolfach, 1987), pp. 255–266, Birkhäuser, Basel–Boston, Mass., 1980.

[8] S. Simons, *A new version of the Hahn–Banach theorem* // Arch. Math. **80** (2003), 630–646.

[9] S. Simons, *Hahn–Banach theorems and maximal monotonicity*, In Variational analysis and applications / F. Giannessi and A. Maugeri, eds.-Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2004.

[10] S. Simons, *The Hahn–Banach–Lagrange theorem.* Preprint.

Сведения об авторах

Александр Васильевич Ревенко

Кафедра математического анализа,
Луганский национальный университет,
ул. Оборонная, 2,
Луганск, 91011,
Украина
E-Mail: `RevenkoAV@mail.ru`