Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 4, 435 – 469

Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням

Олег М. Бугрій

(*Представлена А. Є. Шишковим*)

Анотація. В статті розглянуто граничну задачу для нелінійного виродженого рівняння еліптичного типу та мішану задачу для нелінійного виродженого рівняння параболічного типу. Рівняння містять доданки, показники нелінійності яких є функціями від незалежних змінних. Отримано умови існування узагальнених розв'язків цих задач.

2000 MSC. 35J60, 35K55.

Ключові слова та фрази. Нелінійні рівняння з виродженням, змінні показники нелінійності.

Вступ

У цій статті досліджено мішану задачу для деякого нелінійного виродженого параболічного рівняння. Її модельним прикладом є задача

$$\begin{gathered} |u|^{r-2}u_t - \sum_{i=1}^{n}(|u|^{\gamma_i-2}u_{x_i})_{x_i} + |u|^{q(x)-2}u = f(x,t), \\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (0,T), \\ u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{gathered} \tag{$*$}$$

де $r,\ \gamma_1,\dots,\gamma_n \geq 2$ — деякі числа, $q:\Omega \to (1,+\infty)$, $f:\Omega\times(0,T)\to \mathbb{R}^1$ — відомі функції. При певних обмеженнях на коефіцієнти рівняння та показники нелінійності його членів за допомогою методу

Стаття надійшла в редакцію 26.09.2008

еліптичної регуляризації доведено існування узагальненого розв'язку нашої задачі. Крайова задача для еліптичного рівняння, що виникає при цьому, має самостійний інтерес. Тому вона розглянута в загальнішій, ніж потрібно, постановці. Її моделлю є задача

$$
\begin{gathered}
-\varepsilon(|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon_t)_t - \sum_{i=1}^{n}(|u^\varepsilon|^{\gamma_i-2}u^\varepsilon_{x_i})_{x_i} + |u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon_t \\
+|u^\varepsilon|^{q(x)-2}u^\varepsilon = f(x,t), \\
x\in\Omega, \quad t\in(0,T), \\
u^\varepsilon|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \\
u^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad u^\varepsilon_t|_{t=T} = 0, \quad \varepsilon > 0.
\end{gathered} \tag{$**$}
$$

Користуючись методом Гальоркіна, доведено існування узагальненого розв'язку цієї крайової задачі. При вивченні задач типу $(*)$ та $(**)$ виникають простори функцій, інтегровних зі степенем $q(x) \not\equiv \mathrm{const}$. Їх прийнято називати узагальненими просторами Лебега (див. [1, 2]), і дослідженню диференціальних рівнянь в цих просторах останнім часом приділяється все більше уваги. Задачі для рівнянь типу $(*)$ та $(**)$ з $r \neq 2$ в узагальнених просторах Лебега раніше не вивчалися. Мішані задачі для інших типів нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності вивчено в [3], для параболічних варіаційних нерівностей — в [4], задачі без початкових умов для варіаційних нерівностей в узагальнених просторах Соболєва — в [5, 6], а задачу без початкових умов для рівняння в анізотропних просторах Соболєва — в [7]. Параболічні рівняння чи нерівності з [3–7] в головній частині містили монотонний еліптичний оператор (на відміну від рівняння $(*)$).

Умови існування розв'язку неоднорідної задачі Діріхле для систем еліптичних рівнянь типу $(**)$ з $q(x) \equiv \mathrm{const}$ встановлено в [8]. Так само за умови $q(x) \equiv \mathrm{const}$ в [9] вивчено мішану задачу з нульовими початковими та граничними даними для рівняння, яке в модельному випадку матиме вигляд

$$
|u|^{r-2}u_t - \alpha\Delta u - \beta\sum_{i=1}^{n}(|u|^{s-2}u_{x_i})_{x_i} + \gamma|u|^{h-2}u = f(x,t),
$$

де $\alpha,\beta,\gamma > 0$, $h = s$. Розв'язок отримано в неізотропних за просторовими змінними просторах Соболєва. Відповідну параболічну варіаційну нерівність з нульові початковою умовою розглянуто в [10]. У статті [11] за допомогою теореми Шаудера встановлено існування розв'язку задачі типу $(**)$ з $r = r(x,t)$, $\gamma_j = \gamma_j(x,t)$, $j = \overline{1,N}$, але без молодших членів. На границі області в цих працях задавалася однорідна умова Діріхле. Відповідну мішану задачу для рівняння $(*)$ за умови $r = 2$ і без молодших членів вивчали в [12]. Різні властивості розв'язків рівнянь, які моделюються $(*)$, отримано в [13–19].

Ця стаття складається зі вступу та чотирьох частин. У першій частині сформульовано розглядувані задачі, у другій наведено деякі допоміжні факти, які для зручності подані у вигляді тверджень, лем та теорем. У третій частині статті доведено теорему існування розв'язку задачі типу $(**)$. Четверта частина містить теорему про існування розв'язку задачі типу $(*)$. Питання єдиності розв'язку наведених задач тут не вивчається.

Ми користуватимемося такими позначеннями. Норму банахового простору B позначимо $\|\cdot; B\|$, а спряжений до B простір — B^*. Запис $B_1 \circlearrowleft B_2$ означатиме неперервне вкладення нормованого простору чи півнормованої множини (див. [20, с. 611]) B_1 в нормований простір B_2, $B_1 \overline{\circlearrowleft} B_2$ — неперервне та щільне вкладення, а $B_1 \overset{K}{\circlearrowleft} B_2$ — компактне вкладення B_1 в B_2. Аналогічно, як в [21, с. 145], ми будемо при потребі розглядати функцію $u = u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, як функцію, котра кожному моменту часу $t \in (0,T)$ ставить у відповідність функцію змінної $x \in \Omega$, і писатимемо $u(t)$ замість $u(\cdot,t)$. Крім того, через C_i позначатимемо додатні сталі, які залежать тільки від вихідних даних задач і не залежать від їх розв'язків.

1. Формулювання задач

Нехай, спочатку, $N \in \mathbb{N}$, область $G \subset \mathbb{R}^N$ задовольняє умову:

(G): $G = \Omega \times [0,\ell_{n+1}] \times \cdots \times [0,\ell_N]$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з кусково гладкою межею $\partial\Omega$, $n \in \{0,1,\ldots,N\}$, $\ell_{n+1},\ldots,\ell_N > 0$ — фіксовані числа.

Домовимося, що формальний випадок $n = 0$ означатиме відсутність області Ω, тобто рівність $G = [0,\ell_1] \times \cdots \times [0,\ell_N]$. Якщо $n = N$, то вважатимемо, що $G = \Omega$.

У разі виконання умови **(G)**, дотримуватимемося таких позначень. Перш за все домовимося, що якщо $y = (y_1,\ldots,y_N) \in \mathbb{R}^N$, то $y'_j = (y_1,\ldots,y_{j-1},y_{j+1},\ldots,y_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$, $dy = dy_1 \cdots dy_N$, $dy'_j = dy_1 \cdots dy_{j-1} dy_{j+1} \cdots dy_N$,

$$G_j = \Omega \times [0,\ell_{n+1}] \times \cdots \times [0,\ell_{j-1}] \times [0,\ell_{j+1}] \times \cdots \times [0,\ell_N] \quad \text{при } j \geq n+1.$$

Нехай G задовольняє **(G)**, $a_1, \ldots, a_N,\ b_1, \ldots, b_N,\ g, f : G \to \mathbb{R}^1$ — деякі функції, виконуються умови:

(Q1): $q \in L^\infty(G),\ \ 1 < q_1 \equiv \operatorname{ess\,inf}_{y\in G} q(y) \le \operatorname{ess\,sup}_{y\in G} q(y) \equiv q_2 < +\infty$;

(Г1): $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in [2, +\infty)$.

Розглядається задача: знайти таку функцію $u : G \to \mathbb{R}^1$, яка задовольняє рівняння

$$-\sum_{j=1}^{N} (a_j(y)|u|^{\gamma_j-2}u_{y_j})_{y_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(y)|u|^{\gamma_j-2}u_{y_j} + g(y)|u|^{q(y)-2}u = f(y),\quad y \in G, \tag{1.1}$$

та граничні умови

$$u|_{\partial\Omega\times[0,\ell_{n+1}]\times\cdots\times[0,\ell_N]} = 0, \tag{1.2}$$

$$\begin{matrix} 1) & u|_{y_j=0} = 0, \\ 2) & u_{y_j}|_{y_j=\ell_j} = 0, \end{matrix} \qquad j = \overline{n+1, N}. \tag{1.3}$$

Відмітимо, що випадок $n = 0$ означатиме відсутність умови (1.2), а випадок $n = N$ — відсутність (1.3). При виконанні додаткових умов у цій статті показано існування узагальненого розв'язку задачі (1.1)–(1.3).

Далі припускається, що $n \in \mathbb{N}$, $N = n + 1$. У цьому частковому випадку нам буде зручно користуватися позначеннями: $\ell_{n+1} = T$, де $T > 0$, $G = Q_{0,T} = \Omega \times (0, T)$, $y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$, $y_{n+1} = t$. Отже, нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $\partial\Omega \subset C^1$, $\Omega_\tau = \{(x, t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $\tau \in [0, T]$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$. Припустимо, що виконуються умови:

(Q2): $q \in L^\infty(\Omega),\ \ 1 < q_1 \equiv \operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} q(x) \le \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} q(x) \equiv q_2 < +\infty$;

(Г2): $r, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in [2, +\infty)$.

При виконанні додаткових умов за допомогою результатів, отриманих для задачі (1.1)–(1.3), показано існування розв'язку задачі: знайти таке $u : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^1$, що

$$|u|^{r-2}u_t - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t)|u|^{\gamma_i-2}u_{x_i})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)|u|^{\gamma_i-2}u_{x_i} + g(x,t)|u|^{q(x)-2}u = f(x,t), \quad (1.4)$$

для $(x,t) \in Q_{0,T}$,

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad (1.5)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (1.6)$$

Розв'язки наведених задач отримуються в анізотропних просторах Соболєва та узагальнених просторах Лебега.

2. Деякі допоміжні твердження та інтегральні нерівності

Нагадаємо кілька означень і тверджень, які нам далі будуть потрібні. Узагальнені простори Лебега та Соболєва вивчалися, зокрема, в [1, 2]. Нехай $G \subset \mathbb{R}^N$ — довільна обмежена область з кусково-гладкою межею ∂G, виконується умова **(Q1)**, $1/q(y)+1/q'(y) = 1$ майже для всіх $y \in G$. Визначимо функціонал $\rho_q(\cdot, G)$ рівністю $\rho_q(v,G) = \int_G |v(y)|^{q(y)}dy$, де v — деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{q(y)}(G)$ називатимемо множину таких функцій v, для яких $\rho_q(v,G) < +\infty$. В [1, с. 616, 619, 621] доведено, що $L^{q(y)}(G)$ є рефлексивним простором з нормою

$$\|v; L^{q(y)}(G)\| = \inf\{\lambda > 0 \,:\, \rho_q(v/\lambda, G) \le 1\}.$$

У [2, с. 594] показано, що якщо $\|v; L^{q(y)}(G)\| \le 1$, то $\rho_q(v,G) \le 1$. Зворотне твердження зразу випливає з означення норми простору $L^{q(y)}(G)$. Відмітимо, що $L^{q(y)}(G)$ — банахів простір і якщо $r(y) \ge q(y)$, то $L^{r(y)}(G)$ неперервно вкладається в $L^{q(y)}(G)$ (див. [2, с. 599, 600]). Спряженим до $L^{q(y)}(G)$ є простір $L^{q'(y)}(G)$ (див. [1, с. 619]). Якщо виконується умова **(Q2)**, то так само вводимо простори $L^{q(x)}(\Omega)$ та $L^{q(x)}(Q_{0,T})$. Решту потрібних нам функційних просторів введемо далі.

Твердження 2.1 (лема 4.3 [22, с. 66]). *Нехай* $P = (P_1, \ldots, P_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *— неперервна функція. Якщо існує таке* $\rho > 0$, *що* $(P(z), z)_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \ \forall\, z \in \mathbb{R}^m$: $|z| = \rho$, *то існує таке* $z^m \in \mathbb{R}^m$, $|z| \leq \rho$, *що* $P(z^m) = 0$.

Твердження 2.2 (лема [8, с. 471]). *Нехай функція* $Z : G \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *задовольняє умову Каратеодорі,* $\lambda \geq 0$. *Якщо послідовність* $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *задовольняє умови*

1) $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ *майже скрізь в* G,

2) *для* $j \in \{1, \ldots, N\}$ *матимемо, що* $|u^m|^\lambda u^m_{y_j} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+\lambda}(|u|^\lambda u)_{y_j}$ *слабко в* $L^2(G)$,

3) *існують такі* $s > 2$, $C_1 > 0$, *що* $\|Z(y, u^m); L^s(G)\| \leq C_1$ *для всіх* $m \in \mathbb{N}$, *то*

$$Z(y, u^m)|u^m|^\lambda u^m_{y_j} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+\lambda} Z(y, u)(|u|^\lambda u)_{y_j} \quad \text{слабко в } L^1(G).$$

Твердження 2.3 (теорема Обена [23] ([22, с. 70, теорема 5.1])).

Нехай B_0, B, B_1 *— банахові простори,* B_0, B_1 *— рефлексивні,* $p_0, p_1 \in (1, +\infty)$, $Y_1 = \{v \in L^{p_0}(0, T; B_0) \mid \ v_t \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$. *Тоді з вкладення* $B_0 \overset{K}{\circlearrowleft} B \circlearrowleft B_1$ *випливає, що* $Y_1 \overset{K}{\circlearrowleft} L^{p_0}(0, T; B)$.

Твердження 2.4 ([20, лема 2, теореми 1, 2]). *Нехай* A_0, A_1 *— лінійні нормовані простори,* M_1 *— півнормована множина з півнормою* $[\,\cdot\,]_{M_1}$, $M_1 \overset{K}{\circlearrowleft} A_0 \circlearrowleft A_1$, $p, p_1 \geq 1$. *Тоді*

1) *множина*

$$Y = \left\{ u : (0, T) \to M_1 \;\middle|\; \int\limits_0^T [u(t)]^p_{M_1}\, dt + \int\limits_0^T \|u_t(t)\|^{p_1}_{A_1}\, dt < +\infty \right\}$$

є півнормованою;

2) $Y \overset{K}{\circlearrowleft} L^p(0, T; A_0)$;

3) *якщо* $M_1 \overset{K}{\circlearrowleft} A_1$, *то* $Y \overset{K}{\circlearrowleft} C([0,T]; A_1)$;

4) *якщо* $Y \circlearrowleft L^{p_0}(0,T;A_0)$, *де* $p_0 > 1$, *то* $Y \overset{K}{\circlearrowleft} L^q(0,T;A_0)$ *для* $q \in [1,p)$.

Наведемо кілька нерівностей, які використовуватимемо далі. Спершу для фіксованого числа μ визначимо функції $h, \omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так

$$h(s) = \frac{|s|^\mu}{\mu}, \quad \omega(s) = |s|^{\mu-2}s, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Зауваження 2.1. Зрозуміло, що якщо $\mu > 1$, то $h'(s) = \omega(s)$, а якщо $\mu \geq 2$, то $\omega'(s) = (\mu-1)|s|^{\mu-2}$ для $s \in \mathbb{R}$.

Нам будуть потрібні наступні твердження.

Лема 2.1. *Нехай* $p, q, \mu \in (1, +\infty)$, ω *— функція з* (2.1). *Якщо* $u \in L^p(G)$ *і*

$$\mu \in (1, 1+p], \qquad q \in [1, \frac{p}{\mu-1}], \tag{2.2}$$

то $\omega(u) \in L^q(G)$ *і, крім того,* $\|\omega(u); L^q(G)\| \leq C_2 \|u; L^p(G)\|^{\mu-1}$, *де стала* $C_2 > 0$ *не залежить від* u.

Доведення. Нехай $u \in L^p(G)$, $J \overset{\text{def}}{=} \int_G |\omega(u)|^q \, dx = \int_G |u|^{(\mu-1)q} \, dx$. Якщо $q = \frac{p}{\mu-1}$, то $q(\mu-1) = p$ і $J = \|u; L^p(G)\|^{q(\mu-1)} < +\infty$. Якщо $q < \frac{p}{\mu-1}$, то $\frac{p}{q(\mu-1)} > 1$ і з нерівності Гельдера матимемо, що

$$J \leq C_2 \Bigg(\int\limits_G |u|^p \, dx \Bigg)^{\frac{(\mu-1)q}{p}} = C_2 \|u; L^p(G)\|^{q(\mu-1)} < +\infty.$$

□

Лема 2.2. *Нехай* $\alpha_1 \geq 1$, $\alpha_0 > 1 - \alpha_1$. *Тоді для всіх* $u \in C^1(\overline{G})$ *виконується оцінка*

$$\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1} \, dy \leq C_3 \Bigg(\int\limits_G |u|^{\alpha_0} |u_{y_j}|^{\alpha_1} \, dy + \int\limits_{\partial G} |u|^{\alpha_0+\alpha_1} \, dS \Bigg), \quad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{2.3}$$

де стала $C_3 > 0$ *не залежить від* u.

Доведення. Оскільки $\alpha_0+\alpha_1>1$, то з зауваження 2.1 та теореми про похідну композиції диференційовних функцій отримаємо

$$y_j\,(|u|^{\alpha_0+\alpha_1})'_{y_j}=(\alpha_0+\alpha_1)\,y_j\,|u|^{\alpha_0+\alpha_1-2}u\,u_{y_j}.$$

Оскільки

$$\int\limits_G y_j\,(|u|^{\alpha_0+\alpha_1})'_{y_j}\,dy=\int\limits_{\partial G} y_j\,|u|^{\alpha_0+\alpha_1}\,\cos(\nu,y_j)\,dS-\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}\,dy$$

(тут ν — вектор зовнішньої до G одиничної нормалі), то

$$\begin{aligned}\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}\,dy&=-\int\limits_G y_j\,(|u|^{\alpha_0+\alpha_1})'_{y_j}\,dy+\int\limits_{\partial G} y_j\,|u|^{\alpha_0+\alpha_1}\,\cos(\nu,y_j)\,dS\\&=-(\alpha_0+\alpha_1)\int\limits_G y_j\,|u|^{\alpha_0+\alpha_1-2}u\,u_{y_j}\,dy+\int\limits_{\partial G} y_j\,|u|^{\alpha_0+\alpha_1}\,\cos(\nu,y_j)\,dS\\&\le C_4\Bigg(\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1-1}\,|u_{y_j}|\,dy+\int\limits_{\partial G}|u|^{\alpha_0+\alpha_1}\,dS\Bigg),\end{aligned}\tag{2.4}$$

де стала $C_4>0$ залежить лише від області G та від α_0,α_1. Якщо $\alpha_1=1$, то нерівність (2.4) співпадає з (2.3). Припустимо далі, що $\alpha_1>1$. З нерівності Юнга зі сталою α_1 одержимо, що

$$\begin{aligned}|u|^{\alpha_0+\alpha_1-1}\,|u_{y_j}|&=|u|^{\frac{\alpha_0}{\alpha_1}}\,|u_{y_j}|\,|u|^{\alpha_0+\alpha_1-1-\frac{\alpha_0}{\alpha_1}}\\&\le C_5(\varepsilon)|u|^{\alpha_0}\,|u_{y_j}|^{\alpha_1}+\varepsilon|u|^{(\alpha_0+\alpha_1-1-\frac{\alpha_0}{\alpha_1})\,\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}}.\end{aligned}$$

Оскільки

$$\Big(\alpha_0+\alpha_1-1-\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\Big)\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}=\Big(\frac{\alpha_0(\alpha_1-1)}{\alpha_1}+\alpha_1-1\Big)\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}=\alpha_0+\alpha_1,$$

то з (2.4) і останньої нерівності отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}\,dy\le C_4\Bigg(C_5(\varepsilon)\int\limits_G |u|^{\alpha_0}\,|u_{y_j}|^{\alpha_1}\,dy\\+\varepsilon\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}\,dy+\int\limits_{\partial G}|u|^{\alpha_0+\alpha_1}\,dS\Bigg).\end{aligned}$$

Вибравши $\varepsilon>0$ досить малим, звідси отримаємо (2.3). □

Лема 2.3. *Нехай $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1$, $\alpha_0 > 1 - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Тоді для всіх $u \in C^1(\overline{G})$ виконується оцінка*

$$\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}|u_{y_j}|^{\alpha_2}\,dy \leq C_6\Bigg(\int\limits_G |u|^{\alpha_0}|u_{y_j}|^{\alpha_1+\alpha_2}\,dy + \int\limits_{\partial G} |u|^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}\,dS\Bigg), \tag{2.5}$$

$j \in \{1,\dots,N\}$, де стала $C_6 > 0$ не залежить від u.

Доведення. При $\alpha_1 = 0$ твердження леми очевидне, а при $\alpha_2 = 0$ нерівність (2.5) співпадає з (2.3). Припустимо далі, що $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. З нерівності Юнга зі сталою $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2} > 1$ одержимо, що

$$\begin{aligned}|u|^{\alpha_0+\alpha_1}|u_{y_j}|^{\alpha_2} &= |u|^{\frac{\alpha_0\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}|u_{y_j}|^{\alpha_2}|u|^{\alpha_0+\alpha_1-\frac{\alpha_0\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\\ &\leq C_7\big([|u|^{\frac{\alpha_0\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}|u_{y_j}|^{\alpha_2}]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}} + |u|^{\widetilde{\alpha}}\big),\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha} &= \left(\alpha_0+\alpha_1-\frac{\alpha_0\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\frac{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}}{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_2}-1}\\ &= \left(\alpha_0+\alpha_1-\frac{\alpha_0\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\\ &= \frac{1}{\alpha_1}((\alpha_0+\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_0\alpha_2)\\ &= \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_0\alpha_1+\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2) = \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2.\end{aligned}$$

Використавши ці співвідношення, отримаємо

$$\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}|u_{y_j}|^{\alpha_2}\,dx \leq C_7\Bigg(\int\limits_G |u|^{\alpha_0}|u_{y_j}|^{\alpha_1+\alpha_2}\,dy + \int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}\,dy\Bigg).$$

В останньому доданку цієї нерівності скористаємося оцінкою (2.3) з $\alpha_1+\alpha_2$ замість α_1 і отримаємо (2.5). □

Леми 2.2 та 2.3 наведено в [8, с. 459, 460]. Далі нам знадобиться доведення цих лем, а тому ми подали їх повністю. Зараз застосуємо результати, отримані в цих лемах, до функцій із заданою поведінкою на ∂G у випадку, коли область G є “квазіциліндром”, тобто коли виконується умова **(G)**. Доведемо таке твердження.

Лема 2.4. *Нехай виконується умова* **(G)**, $u \in C^1(\overline{G})$.

1) *Для* $j \in \{n+1, \dots, N\}$ *матимемо, що*

   а) якщо α_0, α_1, C_3 *такі як в лемі* 2.2, *и задовольняє умову* $u|_{y_j=0} = 0$ *або* $u|_{y_j=\ell_j} = 0$, *то виконується оцінка*

$$\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}\, dy \le C_3 \int\limits_G |u|^{\alpha_0} |u_{y_j}|^{\alpha_1}\, dy; \qquad (2.6)$$

   б) якщо $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, C_6$ *такі, як в лемі* 2.3, *и задовольняє умову* $u|_{y_j=0} = 0$ *або* $u|_{y_j=\ell_j} = 0$, *то виконується оцінка*

$$\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1} |u_{y_j}|^{\alpha_2}\, dy \le C_6 \int\limits_G |u|^{\alpha_0} |u_{y_j}|^{\alpha_1+\alpha_2}\, dy. \qquad (2.7)$$

2) *Якщо и задовольняє умову* $u|_{\partial\Omega\times[0,\ell_{n+1}]\times\ldots\times[0,\ell_N]} = 0$, *то оцінки* (2.6), (2.7) *виконуються і для* $j \in \{1, \dots, n\}$.

Доведення. Нехай виконується умова **(G)**, $u \in C^1(\overline{G})$.

1) Для кожного $j \in \{n+1, \dots, N\}$ та фіксованого $t_0 \in [0, \ell_j]$ матимемо, що

$$\int\limits_G (y_j - t_0)\, (|u|^{\alpha_0+\alpha_1})'_{y_j}\, dy = \int\limits_{G_j} (y_j - t_0)\, |u|^{\alpha_0+\alpha_1}\, dy'_j \Big|_{y_j=0}^{y_j=\ell_j} - \int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}\, dy.$$

Тому, як і в лемі 2.2, отримаємо формулу

$$\begin{aligned}
\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}\, dy &= \int\limits_{G_j} (y_j - t_0)\, |u|^{\alpha_0+\alpha_1}\, dy'_j \Big|_{y_j=0}^{y_j=\ell_j} \\
&\quad - \int\limits_G (y_j - t_0)\, (\alpha_0 + \alpha_1)\, |u|^{\alpha_0+\alpha_1-2} u\, u_{y_j}\, dy \\
&\le (\ell_j - t_0) \int\limits_{G_j} |u|^{\alpha_0+\alpha_1}|_{y_j=\ell_j}\, dy'_j + t_0 \int\limits_{G_j} |u|^{\alpha_0+\alpha_1}|_{y_j=0}\, dy'_j \\
&\quad + \ell_j(\alpha_0 + \alpha_1) \int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1-1}\, |u_{y_j}|\, dy.
\end{aligned}$$

При виконанні умови $u|_{y_j=0} = 0$ візьмемо тут $t_0 = \ell_j$, а при $u|_{y_j=\ell_j} = 0$

візьмемо $t_0 = 0$. В обох випадках отримаємо нерівність

$$\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}\,dy \le \ell_j(\alpha_0+\alpha_1)\int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1-1}\,|u_{y_j}|\,dy.$$

Продовжуючи далі так, як в доведенні леми 2.2 після (2.4), отримаємо (2.6).

Для доведення оцінки (2.7) треба повторити міркування з доведення леми 2.3, користуючись при цьому не (2.3), а (2.6).

2) Доведення цього пункту випливає з оцінок (2.3), (2.4), застосованих для $G = \Omega$. Треба лише зінтегрувати їх за $y_{n+1} \in (0, \ell_{n+1}), \ldots, y_N \in (0, \ell_N)$. Лему доведено. $\square$

Зауваження 2.2. Зрозуміло, що оцінки (2.3), (2.5)–(2.7) виконуються і для функцій u з просторів Соболєва, для яких скінченні присутні в (2.3) чи (2.5)–(2.7) вирази.

За умови виконання припущення **(G)** введемо таке позначення

$$\Pi_0 = \bigl\{v \in C^1(\overline{G}) \;\big|\; v|_{\partial\Omega\times[0,\ell_{n+1}]\times\cdots\times[0,\ell_N]} = 0,\\ v|_{y_{n+1}=0} = \cdots = v|_{y_N=0} = 0\bigr\}.$$

Використаємо наведені твердження для доведення такої теореми.

Теорема 2.1. *Нехай виконується умова* **(G)**, $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}^1$ *задовольняють умови*

$$\min_j \beta_j > -1, \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{2}\max_j \beta_j \le \min_j \beta_j + 1, \tag{2.9}$$

а число $\beta > 1$ *справджує оцінку*

$$\frac{1}{2}\max_j \beta_j + 2 \le \beta \le \min_j \beta_j + 3. \tag{2.10}$$

Якщо функція $u \in \Pi_0$ *для кожного* $j \in \{1, \ldots, N\}$ *задовольняє оцінку*

$$\int\limits_G |u|^{\beta_j}|u_{y_j}|^2\,dy \le C_8, \tag{2.11}$$

з деякою сталою $C_8 > 0$, *то*

$$\bigl\|\,|u|^{\beta-2}u; W^{1,\frac{\min_j \beta_j+2}{\beta-1}}(G)\bigr\| \le C_9, \tag{2.12}$$

де стала $C_9 > 0$ *не залежить від* u.

Доведення. Нехай функція $u \in \Pi_0$ задовольняє (2.11). Тоді для неї виконуються оцінки з леми 2.4. Покажемо спочатку, що $|u|^{\beta-2}u \in L^{\frac{\min_j \beta_j+2}{\beta-1}}(G)$. Використавши оцінку (2.6) з показниками $\alpha_0 = \beta_j$, $\alpha_1 = 2$ (відмітимо, що $\alpha_0 > 1 - \alpha_1 \iff \beta_j > 1 - 2 \iff$ (2.8)) та нерівність (2.11), одержимо оцінку

$$\int\limits_G |u|^{\beta_j+2}\,dy \le C_3 \int\limits_G |u|^{\beta_j}|u_{y_j}|^2\,dy \le C_3C_8, \qquad j=\overline{1,N}.$$

Оскільки $u \in L^{\min_j \beta_j+2}(G)$ і $\beta \in (1, 1+(\min_j \beta_j+2)]$, то з леми 2.1 отримаємо, що $|u|^{\beta-2}u \in L^q(G)$, де $q \in [1, \frac{\min_j \beta_j+2}{\beta-1}]$.

Нехай $j \in \{1,\dots,N\}$. Відмітимо, що з (2.10) випливає, що $\beta-1 \le \min_j \beta_j+2 \le \beta_j+2$, тобто $\frac{\beta_j+2}{\beta-1} \ge 1$. Оскільки $(|u|^{\beta-2}u)'_{y_j} = (\beta-1)\times |u|^{\beta-2}u_{y_j}$,

$$\begin{aligned}(\beta-2)\,\frac{\beta_j+2}{\beta-1} &= \beta_j+2+(\beta-2)\,\frac{\beta_j+2}{\beta-1}-(\beta_j+2)\\ &= \beta_j+2+(\beta_j+2)\Big(\frac{\beta-2}{\beta-1}-1\Big) = \beta_j+2-\frac{\beta_j+2}{\beta-1},\end{aligned}$$

то

$$I_j \equiv \int\limits_G (|u|^{\beta-2}u_{y_j})^{\frac{\beta_j+2}{\beta-1}}\,dy = \int\limits_G |u|^{\beta_j+2-\frac{\beta_j+2}{\beta-1}}|u_{y_j}|^{\frac{\beta_j+2}{\beta-1}}\,dy.$$

Скориставшись оцінкою (2.7) при $\alpha_0 = \beta_j$, $\alpha_1 = 2 - \frac{\beta_j+2}{\beta-1}$, $\alpha_2 = \frac{\beta_j+2}{\beta-1}$ та нерівністю (2.11), одержимо

$$\begin{aligned}I_j &= \int\limits_G |u|^{\alpha_0+\alpha_1}|u_{y_j}|^{\alpha_2}\,dy\\ &\le C_6 \int\limits_G |u|^{\alpha_0}|u_{y_j}|^{\alpha_1+\alpha_2}\,dy\\ &= C_6 \int\limits_G |u|^{\beta_j}|u_{y_j}|^2\,dy \le C_6C_8.\end{aligned}$$

На завершення доведення нашої теореми переконаємося в можливості використання леми 2.4. З огляду на умови попередніх лем, наші перетворення можна робити, якщо справджується така система нерівностей

$$\begin{cases} \min\limits_j \frac{\beta_j+2}{\beta-1} \geq 1, \\ \alpha_1 \geq 0, \\ \alpha_2 \geq 0, \\ \alpha_1+\alpha_2 \geq 1, \\ \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 > 1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \min\limits_j \frac{\beta_j+2}{\beta-1} \geq 1, \\ \min\limits_j (2-\frac{\beta_j+2}{\beta-1}) \geq 0, \\ \min\limits_j \frac{\beta_j+2}{\beta-1} \geq 0, \\ 2 \geq 1, \\ \min\limits_j (\beta_j+2) > 1, \end{cases}$$

$$\overset{\beta-1>0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \min\limits_j (\beta_j+2) \geq \beta-1, \\ \min\limits_j (2(\beta-1)-(\beta_j+2)) \geq 0, \\ \min\limits_j (\beta_j+2) > 1, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \min\limits_j \beta_j+3 \geq \beta, \\ 2\beta-2-\max\limits_j (\beta_j+2) \geq 0, \\ \min\limits_j \beta_j+2 > 1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta \leq \min\limits_j \beta_j+3, \\ 2\beta \geq \max\limits_j \beta_j+4, \\ \min\limits_j \beta_j > -1. \end{cases}$$

Виконання останніх нерівностей гарантують умови (2.8)–(2.10). □

Відмітимо, що ідея доведення теореми 2.1 запозичена з [8], де схожий результат отримано для інших $\beta_1, \ldots, \beta_N, \beta$. Нехай

$$[v]_{M_1} = \sum_{j=1}^{N} \left(\int\limits_G |v|^{\beta_j} |v_{y_j}|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{\beta_j+2}},$$

M_1 — множина функцій v, таких, що

$$[v]_{M_1} < +\infty,$$
$$|v|^{\beta-2} v|_{\partial\Omega\times[0,\ell_{n+1}]\times\cdots\times[0,\ell_N]} = 0,$$
$$|v|^{\beta-2} v|_{y_j=0} = 0, \quad j = \overline{n+1, N},$$

де β взято з (2.10). Відомо, що M_1 — півнормована, взагалі кажучи, нелінійна множина (див. приклад з [20, с. 610]).

Теорема 2.2. *Якщо виконуються умови* **(G)**, (2.8), (2.9), *то* $M_1 \circlearrowleft L^s(G)$ *і* $M_1 \overset{K}{\circlearrowleft} L^{s-\varepsilon}(G)$, *де*

$$s = \begin{cases} \frac{N}{N-1}(\min_j \beta_j + 2), & \textit{при } N > \frac{\min_j \beta_j + 2}{\beta - 1}, \\ s_1 \geq \beta - 1 \textit{ — довільне}, & \textit{при } N \leq \frac{\min_j \beta_j + 2}{\beta - 1}, \end{cases} \quad \varepsilon \in (0, s)$$

β *взято з умови* (2.10).

Доведення. Нехай виконуються припущення та позначення нашої теореми. Тоді з теорем вкладення Соболєва при $N > \frac{\min_j \beta_j + 2}{\beta - 1}$ та теореми 2.1 для кожного $u \in M_1$ отримаємо, що

$$\|u; L^{\widetilde{s}}(G)\| = \| \, |u|^{\beta-2} u; L^r(G)\|^{r/\widetilde{s}} \\ \leq C_{10} \| \, |u|^{\beta-2} u; W^{1, \frac{\min_j \beta_j + 2}{\beta - 1}}(G)\|^{r/\widetilde{s}} \leq C_{11}, \quad (2.13)$$

де $\widetilde{s} = (\beta - 1) r$,

$$r = \frac{N \frac{\min_j \beta_j + 2}{\beta - 1}}{N - (\frac{\min_j \beta_j + 2}{\beta - 1})} = \frac{N(\min_j \beta_j + 2)}{N(\beta - 1) - (\min_j \beta_j + 2)}.$$

Якщо, наприклад, $\beta = \min_j \beta_j + 3$, то

$$\widetilde{s} = (\beta - 1) r = \big(\min_j \beta_j + 2\big) \frac{N(\min_j \beta_j + 2)}{N(\min_j \beta_j + 2) - (\min_j \beta_j + 2)} \\ = \frac{N}{N - 1}\big(\min_j \beta_j + 2\big) = s.$$

Отже, $M_1 \circlearrowleft L^s(G)$. Якщо $N \leq \frac{\min_j \beta_j + 2}{\beta - 1}$, то оцінку (2.13) одержимо для всіх показників $r \in [1, +\infty)$. Тому $\widetilde{s} = (\beta - 1) r \geq \beta - 1$.

Доведемо компактне вкладення. Нехай $\varepsilon \in (0, s - 1)$, $B_R = \{u \in M_1 : [u]_{M_1} \leq R\}$, $R > 0$. Оскільки

$$\int_G |u|^{s-\varepsilon} \, dy \leq C_{12} \Bigg(\int_G (|u|^{s-\varepsilon})^{\frac{s}{s-\varepsilon}} \, dy \Bigg)^{\frac{s-\varepsilon}{s}} = C_{12} \|u; L^s(G)\|^{s-\varepsilon} \leq C_{13} \\ \forall \, u \in B_R,$$

то існує послідовність $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset B_R$, така, що $u^m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} u$ слабко в

$L^{s-\varepsilon}(G)$. З того, що $W^{1,\frac{\min_j \beta_j+2}{\beta-1}}(G) \overset{K}{\circlearrowleft} L^r(G)$ та леми 1.18 [21, с. 39] випливає, що (можливо при переході до підпослідовності) $|u^m|^{\beta-2}u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} |u|^{\beta-2}u$ майже скрізь в G. Тоді для $f_m = |u^m - u|^{s-\varepsilon}$ отримаємо, що послідовність $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ є обмеженою в $L^{\frac{s}{s-\varepsilon}}(G)$. Крім того, можна вважати, що $f_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ слабко в $L^{\frac{s}{s-\varepsilon}}(G)$ та майже скрізь в G. Тоді

$$\int\limits_G f_m\,dy = \int\limits_G |u^m - u|^{s-\varepsilon}\,dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

і теорему доведено. $\square$

Наслідок 2.1. *Зрозуміло, що* $M_1 \overset{K}{\circlearrowleft} L^{\min_j \beta_j+2}(G)$ (*див. також* [20, с. 619]).

3. Крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння з виродженням

Дослідимо питання існування розв'язку граничної задачі (1.1)–(1.3). Нехай $N \in \mathbb{N}$ і виконуються умови **(G)**, **(Q1)**, **(Г1)** з першого підрозділу. Введемо кілька допоміжних позначень. Нехай

$\gamma_{\max}$ і $\gamma_{\min}$ — відповідно найбільше та найменше числа серед $\gamma_1, \dots, \gamma_N$,

S_2 — множина тих індексів $j \in \{1, \dots, N\}$, що $\gamma_j = \gamma_{\max}$, $S_1 = \{1, \dots, N\} \setminus S_2$.

Відмітимо, що ми не виключаємо випадку $S_1 = \varnothing$, який виникне якщо $\gamma_1 = \dots = \gamma_N$. Припустимо, що функції $a_1, \dots, a_N$, $b_1, \dots, b_N$, g, $f : G \to \mathbb{R}^1$ задовольняють умови:

(A1): для кожного $j \in \{1, \dots, N\}$ матимемо, що $a_j \in L^\infty(G)$, $a_j(y) \geq a_0 > 0$ майже для всіх $y \in G$;

(B1): для кожного $j \in \{1, \dots, N\}$ функція $b_j \in L^\infty(G)$ задовольняє одну з умов:

a) якщо $j \in S_1$ та $j \leq n$, то

$$(b_j)_{y_j} \in L^\infty(G), \quad |(b_j(y))_{y_j}| \leq b^1 \quad \text{майже для всіх } y \in G, \tag{3.1}$$

б) якщо $j \in S_1$ та $j \geq n+1$, то виконується умова (3.1) і, крім того, $b_j(y) \geq b_0 > 0$ майже для всіх $y \in G$,

в) якщо $j \in S_2$ та $j \leq n$, то $b_j(y) \equiv \widetilde{b}_j \in \mathbb{R}^1$,

г) якщо $j \in S_2$ та $j \geq n+1$, то $b_j(y) \equiv \mathrm{const} \geq b_0 > 0$;

(D1): $g \in L^\infty(G)$, $0 < g_0 \leq g(y) \leq g^0 < +\infty$ майже для всіх $y \in G$;

(F1): $f \in L^{\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_{\max}-1}}(G)$.

Нехай $Tr_0^\alpha = \{w : G \to \mathbb{R} \,|\, \exists \{w^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \Pi_0 : (|w^m|^{\alpha_j-1}w^m)_{y_j} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (|w|^{\alpha_j-1}w)_{y_j}$ слабко в $L^2(G)$ для кожного $j \in \{1,\dots,N\}\}$, де $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_N)$.

Означення 3.1. *Узагальненим розв'язком задачі* (1.1)–(1.3) *називається функція* $u \in L^{q(y)}(G) \cap L^{\gamma_{\max}}(G)$ *така, що* $|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u$, $(|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u)_{y_j} \in L^2(G)$ *для кожного* $j \in \{1,\dots,N\}$, *и задовольняє рівність*

$$\int_G \Bigg[\sum_{j=1}^N a_j |u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1} \frac{2}{\gamma_j} \big(|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u\big)_{y_j} v_{y_j} + \sum_{j=1}^N b_j |u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1} \frac{2}{\gamma_j} \big(|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u\big)_{y_j} v + g|u|^{q(y)-2}uv \Bigg] dy = \int_G fv\, dy \quad (3.2)$$

для всіх $v \in \Pi_0$ *і задовольняє* (1.2), (1.3) 1) *в тому сенсі, що* $u \in Tr_0^\alpha$ *для деякого* α.

Зауваження 3.1. Умову (1.3) 2) не можна отримати з припущення $u \in Tr_0^\alpha$, навіть якщо вимагати, щоб функції з Π_0 її задовольняли. Рівність (1.3) 2) (вона однорідна) "міститься" безпосередньо в (3.2) (див., наприклад, означення узагальненого розв'язку задачі Неймана для еліптичних рівнянь в [25, с. 181]).

Для функцій $w, v : G \to \mathbb{R}^1$ визначимо вираз

$$\mathcal{L}(w,v) = \int_G \Bigg[\sum_{j=1}^N a_j(y)|w|^{\gamma_j-2} w_{y_j} v_{y_j}$$

$$+\sum_{j=1}^{N} b_j(y)|w|^{\gamma_j-2}w_{y_j}v + g(y)|w|^{q(y)-2}wv\Big]\,dy.$$

Лема 3.1. *Якщо виконуються умови* **(G)**, **(Q1)**, **(Г1)**, **(A1)**, **(B1)**, **(D1)**, *то для всіх $u \in \Pi_0$, та $i \in S_2$ виконується оцінка*

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(u,u)\\ &\geq \int_G \Big[a_0\sum_{j\neq i}|u|^{\gamma_j-2}|u_{y_j}|^2 + (a_0-\varepsilon NC_3)|u|^{\gamma_i-2}|u_{y_i}|^2 + g_0|u|^{q(y)}\Big]\,dy\\ &\qquad + \sum_{j=n+1}^{N} c^j \int_{G_j} |u|^{\gamma_j}|_{y_j=\ell_j}\,dy'_j - C_{14}(\varepsilon), \quad (3.3)\end{aligned}$$

де $C_{14} > 0$,

$$c^j = \begin{cases} \frac{b_0}{\gamma_j}, & \text{якщо } b_j \text{ задовольняє умови б) чи г) з } \mathbf{(B1)},\\ 0, & \text{інакше,}\end{cases}$$

для кожного індекса $j \in \{n+1,\dots,N\}$.

Доведення. Нехай $u \in \Pi_0$, $i \in S_2 \neq \varnothing$. Зрозуміло, що

$$\mathcal{L}(u,u) \geq \int_G a_0 \sum_{j=1}^{N} |u|^{\gamma_j-2}|u_{y_j}|^2\,dy + \sum_{j=1}^{N} I_j + g_0\int_G |u|^{q(y)}\,dy, \qquad (3.4)$$

де $I_j = \int_G b_j(y)|u|^{\gamma_j-2}u_{y_j}u\,dy$, $j=\overline{1,N}$. Оцінимо отримані інтеграли. Використавши оцінку (2.6) з $\alpha_0 = \gamma_{\max}-2$, $\alpha_1 = 2$, отримаємо

$$\int_G |u|^{\gamma_{\max}}\,dy = \int_G |u|^{\gamma_{\max}-2+2}\,dy \leq C_3\int_G |u|^{\gamma_{\max}-2}|u_{y_i}|^2\,dy. \qquad (3.5)$$

Нехай $j \in \{1,\dots,N\}$. Зрозуміло, що $I_j = \int_G \frac{b_j}{\gamma_j}\frac{\partial}{\partial y_j}(|u|^{\gamma_j})\,dy = I_j^* - I_j^{**}$, де

$$I_j^* = \int_{\partial G} \frac{b_j}{\gamma_j}|u|^{\gamma_j}\cos(\nu,y_j)\,dS, \qquad I_j^{**} = \frac{1}{\gamma_j}\int_G (b_j)_{y_j}|u|^{\gamma_j}\,dy.$$

а) Якщо $j \in S_1$ та $j \le n$, то з умови (1.2) матимемо, що

$$I_j^* = \int\limits_{\partial\Omega\times[0,\ell_{n+1}]\times\cdots\times[0,\ell_N]} \frac{b_j}{\gamma_j}|u|^{\gamma_j}\cos(\nu, y_j)\,dS = 0,$$

а з нерівності Юнга з показником $\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_j} > 1$ та оцінки (3.5) отримаємо

$$I_j^{**} \le \frac{b^1}{\gamma_j}\int\limits_G |u|^{\gamma_j}\,dy \le \varepsilon\int\limits_G |u|^{\gamma_{\max}}\,dy + C_{15}(\varepsilon)$$
$$\le \varepsilon C_3\int\limits_G |u|^{\gamma_{\max}-2}|u_{y_i}|^2\,dy + C_{15}(\varepsilon). \quad (3.6)$$

б) Якщо $j \in S_1$ та $j \ge n+1$, то з умови (1.3) одержимо, що

$$I_j^* = \int\limits_{G_j}\frac{b_j}{\gamma_j}|u|^{\gamma_j}\,dy_j'\Big|_{y_j=0}^{y_j=\ell_j} = \int\limits_{G_j}\frac{b_j}{\gamma_j}|u|^{\gamma_j}|_{y_j=\ell_j}\,dy_j' \ge \frac{b_0}{\gamma_j}\int\limits_{G_j}|u|^{\gamma_j}|_{y_j=\ell_j}\,dy_j', \quad (3.7)$$

а інтеграл I_j^{**} оцінюємо за допомогою (3.6).

в) Якщо $j \in S_2$ та $j \le n$, то з (1.2) знову матимемо $I_j^* = 0$ і, крім того, $I_j^{**} = 0$.

г) Якщо $j \in S_2$ та $j \ge n+1$, то I_j^* задовольняє (3.7), а $I_j^{**} = 0$.

Тому з (3.4) отримаємо (3.3). □

Використаємо наведені факти для доведення такої теореми.

Теорема 3.1. *Якщо виконуються умови* **(G)**, **(Q1)**, **(Г1)**, **(A1)**–**(F1)**,

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} \le \gamma_{\min}, \quad (3.8)$$

то гранична задача (1.1)–(1.3) *має розв'язок, причому вектор* α *з означення* 3.1 *має вигляд* $\alpha = (\frac{\gamma_1}{2}, \dots, \frac{\gamma_N}{2})$.

Доведення. Використаємо метод Гальоркіна. Нехай $\{w^1, \dots, w^m, \dots\}$ — база в Π_0, $u^m(y) = \sum_{\mu=1}^m z_\mu^m w^\mu(y)$, $y \in G$, де числа $z_1^m, \dots, z_m^m \in \mathbb{R}$ шукаємо як розв'язки системи рівнянь

$$\mathcal{L}(u^m, w^\mu) = \int\limits_G f w^\mu\,dy, \qquad \mu = \overline{1, m}. \quad (3.9)$$

Нехай $P = (P_1, \dots, P_m)$, $P_\mu(z) = \mathcal{L}(h^m, w^\mu) - \int_G f w^\mu\,dy$, $z = (z_1, \dots,$

$z_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mu = \overline{1,m}$, де $h^m(y) = \sum_{i=1}^m z_i\, w^i(y)$, $y \in G$. Оскільки (див. (3.5) для $u = h^m \in \Pi_0$)

$$\int\limits_G f h^m\, dy \le \varepsilon \int\limits_G |h^m|^{\gamma_{\max}}\, dy + C_{16}(\varepsilon) \int\limits_G |f|^{\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_{\max}-1}}\, dy$$
$$\le \varepsilon C_3 \int\limits_G |h^m|^{\gamma_{\max}-2} |h^m_{y_i}|^2\, dy + C_{17}(\varepsilon), \quad (3.10)$$

де $i \in S_2$, то з леми 3.1 випливає, що

$$\mathcal{L}(h^m, h^m) - \int\limits_G f h^m\, dy$$
$$\ge \int\limits_G \Big[a_0 \sum_{j \ne i} |h^m|^{\gamma_j - 2} |h^m_{y_j}|^2 + (a_0 - \varepsilon N C_3 - \varepsilon C_3) |h^m|^{\gamma_i - 2} |h^m_{y_i}|^2$$
$$+ g_0 |h^m|^{q(y)} \Big]\, dy + \sum_{j=n+1}^N c^j \int\limits_{G_j} |h^m|^{\gamma_j}|_{y_j = \ell_j}\, dy'_j - C_{18}(\varepsilon), \quad (3.11)$$

де $\varepsilon > 0$. Тому при малих $\varepsilon > 0$ матимемо, що

$$(P(z), z)_{\mathbb{R}^m}$$
$$= \sum_{\mu=1}^m (\mathcal{L}(h^m, w^\mu) - \int\limits_G f w^\mu\, dy) z_\mu = \mathcal{L}(h^m, h^m) - \int\limits_G f h^m\, dy$$
$$\ge \frac{a_0}{2} \int\limits_G \sum_{j=1}^N |h^m|^{\gamma_j - 2} |h^m_{y_j}|^2 dy - C_{18}(\varepsilon) \underset{|z| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Тому з твердження 2.1 випливає існування необхідних нам сталих $z_1^m, \ldots, z_m^m$ — розв'язків системи (3.9).

Домноживши (3.9) на z_μ^m і підсумувавши за μ, отримаємо $\mathcal{L}(u^m, u^m) = \int_G f u^m\, dy$. Використавши (3.11) з u^m замість h^m, одержимо, що

$$\int\limits_G \Big[a_0 \sum_{j \ne i} |u^m|^{\gamma_j - 2} |u^m_{y_j}|^2$$
$$+ (a_0 - \varepsilon N C_4 - \varepsilon C_3) |u^m|^{\gamma_i - 2} |u^m_{y_i}|^2 + g_0 |u^m|^{q(y)} \Big]\, dy$$

$$+\sum_{j=n+1}^{N} c^j \int\limits_{G_j} |u^m|^{\gamma_j}|_{y_j=\ell_j}\, dy_j' \le C_{18}(\varepsilon). \quad (3.12)$$

Вибравши $\varepsilon > 0$ досить малим, з (3.12) отримаємо оцінку (2.11) з $u = u^m$, $\beta_j = \gamma_j - 2$, $j = \overline{1,N}$. Тоді з теореми 2.1 отримаємо, що

$$\big\| \, |u^m|^{\beta-2}u^m; W^{1,\frac{\gamma_{\min}}{\beta-1}}(G)\big\| \le C_{19}, \quad (3.13)$$

де стала $C_{19} > 0$ не залежить від m. При цьому умова (2.8) виконується, бо $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \ge 2 > 1$, умова (2.9) випливає з (3.8), а число $\beta \ge 2$ справджує оцінку

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} + 1 \le \beta \le \gamma_{\min} + 1. \quad (3.14)$$

Принагідно зауважимо, що $\frac{\gamma_{\min}}{\beta-1} \ge 1$, а якщо нерівність (3.8) строга, то β можна вибрати так, щоб виконувалася умова $\frac{\gamma_{\min}}{\beta-1} > 1$.

Зрозуміло, що $\big|\,|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m\big|^2 = |u^m|^{\gamma_j}$. Оскільки $|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m_{y_j} = \frac{2}{\gamma_j}(|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m)_{y_j}$, то

$$|u^m|^{\gamma_j-2}|u^m_{y_j}|^2 = \big[|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m_{y_j}\big]^2 = \frac{4}{\gamma_j^2}\big[(|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m)_{y_j}\big]^2.$$

Тоді з оцінок (3.5), (3.12) отримаємо, що

$$\int\limits_G \big[\big|\,|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m\big|^2 + \big|\,(|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m)_{y_j}\big|^2\big]\, dy \le C_{20}. \quad (3.15)$$

Тому існує підпослідовність $\{u^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ така, що для $j \in \{1,\ldots,N\}$

$$|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_0^j, \quad \big(|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^{m_k}\big)_{y_j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi^j \quad \text{слабко в } L^2(G). \quad (3.16)$$

Використавши оцінку (3.13), теорему Кондрашова та леми 1.28 і 1.18 [21, с. 47, 39], одержимо, що якщо β задовольняє (3.14), то можна вважати, що

$$|u^{m_k}|^{\beta-2}u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |u|^{\beta-2}u \text{ сильно в } L^{\frac{\gamma_{\min}}{\beta-1}}(G) \text{ та майже скрізь в } G.$$

Тому $\chi_0^j = |u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u$ для кожного $j \in \{1,\ldots,N\}$. Тоді зі збіжності в сенсі розподілів з $D^*(G)$ випливає, що $\chi^j = (\chi_0^j)_{y_j}$, $j = \overline{1, N}$.

Здійснимо тепер граничний перехід в (3.9) з $m = m_k$. Нехай $j \in \{1, \ldots, N\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu = \overline{1, m_k}$. Розглянемо спочатку вираз

$$J_k^2 = \int\limits_G a_j |u^{m_k}|^{\gamma_j - 2} u^{m_k}_{y_j} w^{\mu}_{y_j}\, dy.$$

Нехай $\gamma_j = 2$. Тоді з (3.16) випливає, що $u^{m_k}_{y_j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_{y_j}$ слабко в $L^2(G)$, і тому

$$J_k^2 = \int\limits_G a_j u^{m_k}_{y_j} w^{\mu}_{y_j}\, dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_G a_j u_{y_j} w^{\mu}_{y_j}\, dy.$$

Нехай $\gamma_j > 2$. Тоді $|u^{m_k}|^{\gamma_j - 2} u^{m_k}_{y_j} = Z(y, u^{m_k}) |u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2} - 1} u^{m_k}_{y_j}$, де $Z(y, u^{m_k}) = |u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2} - 1}$. При нашому γ_j функція Z є неперервною. Якщо $s = \frac{2\gamma_j}{\gamma_j - 2} = 2 + \frac{4}{\gamma_j - 2} > 2$, то з (3.15) отримаємо

$$\int\limits_G |Z(y, u^{m_k})|^s\, dy = \int\limits_G |u^{m_k}|^{\gamma_j}\, dy \le C_{20}.$$

Тому з твердження 2.2 одержимо, що

$$J_k^2 = \int\limits_G Z(y, u^{m_k}) |u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2} - 1} u^{m_k}_{y_j} a_j w^{\mu}_{y_j}\, dy$$
$$\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_G |u|^{\frac{\gamma_j}{2} - 1} \frac{2}{\gamma_j} \big(|u|^{\frac{\gamma_j}{2} - 1} u\big)_{y_j} a_j w^{\mu}_{y_j}\, dy.$$

Тепер перейдемо до границі в молодших доданках. Оскільки $\gamma_j \ge 2$, то так само, як і для інтеграла J_k^2, отримаємо, що

$$J_k^1 \equiv \int\limits_G b_j |u^{m_k}|^{\gamma_j - 2} u^{m_k}_{y_j} w^{\mu}\, dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_G b_j |u|^{\frac{\gamma_j}{2} - 1} \frac{2}{\gamma_j} \big(|u|^{\frac{\gamma_j}{2} - 1} u\big)_{y_j} w^{\mu}\, dy.$$

З (3.12) та збіжності майже скрізь в G випливає, що $|u^{m_k}|^{q(y)-2} u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |u|^{q(y)-2} u$ слабко в $L^{\frac{q(y)}{q(y)-1}}(G)$. Тому

$$J_k^0 = \int\limits_G g |u^{m_k}|^{q(y)-2} u^{m_k} w^{\mu}\, dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_G g |u|^{q(y)-2} u w^{\mu}\, dy.$$

В результаті граничного переходу, з (3.9) отримаємо рівність (3.2) з заміною v на w^μ. За допомогою стандартного замикання, звідси отримуємо рівність (3.2). □

Зауваження 3.2. З теорем вкладення Соболєва (див., наприклад, [21, с. 47]) відомо, що

$$W^{1,\frac{\gamma_{\min}}{\beta-1}}(G) \circlearrowleft L^{\frac{N\frac{\gamma_{\min}}{\beta-1}}{N-\frac{\gamma_{\min}}{\beta-1}}}(G) = L^{\frac{N\gamma_{\min}}{N(\beta-1)-\gamma_{\min}}}(G)$$

за умови $\frac{\gamma_{\min}}{\beta-1} < N$. Тому з оцінки (3.13) випливає, що

$$\int\limits_G |u^m|^{\frac{N\gamma_{\min}(\beta-1)}{N(\beta-1)-\gamma_{\min}}}\, dy = \int\limits_G \left||u^m|^{\beta-2}u^m\right|^{\frac{N\gamma_{\min}}{N(\beta-1)-\gamma_{\min}}}\, dy \le C_{21}.$$

Якщо вибрати, наприклад, $\beta = \gamma_{\min}+1$, то матимемо обмеженість послідовності $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ в просторі $L^{\frac{N\gamma_{\min}}{N-1}}$. Отже, узагальнений розв'язок задачі (1.1)–(1.3) належить до $L^{\frac{N\gamma_{\min}}{N-1}}(G)$.

4. Мішана задача для нелінійного параболічного рівняння з виродженням

Використаємо отримані в попередньому пункті результати для доведення існування розв'язку мішаної задачі (1.4)–(1.6). Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$. Припустимо, що виконуються умови **(Q2)**, **(Г2)**. Введемо додаткові позначення. Нехай

$\gamma_{\max}$ і $\gamma_{\min}$ – відповідно найбільше та найменше числа серед $\gamma_1, \dots, \gamma_n$,

$r_{\max} = \max\{r, \gamma_{\max}\}$, $r_{\min} = \min\{r, \gamma_{\min}\}$,

$q_{\max} = \max\{q_2, \gamma_{\max}\}$, $q_{\min} = \min\{q_1, \gamma_{\min}\}$,

S_2 — множина тих $i \in \{1, \dots, n\}$, що $\gamma_i = r_{\max}$, $S_1 = \{1, \dots, n\} \setminus S_2$.

Домовимося, що якщо $s > 1$, то $s' = \frac{s}{s-1}$, тобто $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Таким чином, означимо функцію $q' : \Omega \to \mathbb{R}$ та числа r', $\gamma_1', \dots, \gamma_n'$, q_1', q_2', $\gamma_{\max}'$, $\gamma_{\min}'$, $r_{\max}'$, $r_{\min}'$, $q_{\max}'$, $q_{\min}' > 1$. Нехай

$$[v]_M = \sum_{i=1}^n \left(\int\limits_\Omega |v|^{\gamma_i-2}|v_{x_i}|^2\, dx\right)^{\frac{1}{\gamma_i}},$$

$W_M^\gamma(\Omega)$ — множина дійсних функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}^1$, для яких $[v]_M < +\infty$, $|v|^{\beta-2}v|_{\partial\Omega} = 0$, де β взято з (3.14), $V = W_M^\gamma(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$,

$$U(Q_{0,T}) = \Bigg\{ u : (0,T) \to V \ \Bigg| \ \int\limits_{Q_{0,T}} \Bigg[\sum_{i=1}^n \big[\,|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}(|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u)_{x_i}\big]^{\gamma_i'} + |u|^{q(x)} \Bigg] dx\,dt < +\infty \Bigg\},$$

$W_0^{1,\overline{\gamma}}(\Omega) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega) \,|\, u_{x_i} \in L^{\gamma_i}(\Omega),\ i = \overline{1,n}\}$, $Z = W_0^{1,\overline{\gamma}}(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$, $\mathcal{Z}(Q_{0,T}) = \{v : (0,T) \to Z \,|\, \|v; \mathcal{Z}(Q_{0,T})\| < +\infty\}$, де

$$\|v; \mathcal{Z}(Q_{0,T})\| = \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}; L^{\gamma_i}(Q_{0,T})\| + \|v; L^{q(x)}(Q_{0,T})\|, \quad v \in \mathcal{Z}(Q_{0,T}).$$

Означення 4.1. *Узагальненим розв'язком мішаної задачі* (1.4)–(1.6) *називається функція* $u \in U(Q_{0,T}) \cap L^1(0,T; W_0^{1,1}(\Omega))$, $|u|^{r-2}u \in C([0,T]; W^{-1,q'_{\max}}(\Omega))$, *яка задовольняє початкову умову* (1.6) *та рівність*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Bigg[|u|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u|^{\frac{r}{2}-1}u)_t v + \sum_{i=1}^n a_i |u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}\frac{2}{\gamma_i}(|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u)_{x_i} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i |u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}\frac{2}{\gamma_i}(|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u)_{x_i} v + g|u|^{q(x)-2}uv \Bigg] dx\,dt = \int\limits_{Q_{0,T}} fv\,dx\,dt \quad (4.1)$$

для всіх функцій $v \in \Pi_1 = \{v \in C^1(\overline{Q_{0,T}}) \,|\, v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0,\ v|_{t=0} = 0\}$.

Припустимо, що виконуються умови:

(A2): $a_i \in L^\infty(Q_{0,T})$, $a_i(x,t) \ge a_0 > 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$, де $i = \overline{1,n}$;

(B2): для кожного $i \in \{1,\dots,n\}$ функція $b_i \in L^\infty(Q_{0,T})$ задовольняє одну з умов:

- **а)** якщо $i \in S_1$, то $(b_i)_{x_i} \in L^\infty(Q_{0,T})$,
- **б)** якщо $i \in S_2$, то $b_i(x,t) \equiv \widetilde{b}_i \in \mathbb{R}^1$;

(D2): $g \in L^{\infty}(Q_{0,T})$, $0 < g_0 \le g(x,t) \le g^0 < +\infty$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;

(F2): $f \in L^{\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_{\max}-1}}(Q_{0,T})$.

Зрозуміло, що $Z^* = W^{-1,\overline{\gamma}'}(\Omega) + L^{q'(x)}(\Omega)$, де $W^{-1,\overline{\gamma}'}(\Omega) = [W_0^{1,\overline{\gamma}}(\Omega)]^*$,

$$W_0^{1,q_{\max}}(\Omega) \overline{\circlearrowleft} Z \overline{\circlearrowleft} W_0^{1,q_{\min}}(\Omega), \qquad W^{-1,q'_{\min}}(\Omega) \overline{\circlearrowleft} Z^* \overline{\circlearrowleft} W^{-1,q'_{\max}}(\Omega).$$

З теореми 1 [4, с. 311] випливає, що

$$L^{q_2}(0,T;L^{q(x)}(\Omega)) \overline{\circlearrowleft} L^{q(x)}(Q_{0,T}) \overline{\circlearrowleft} L^{q_1}(0,T;L^{q(x)}(\Omega)).$$

Тому $L^{q_{\max}}(0,T;W_0^{1,q_{\max}}(\Omega)) \overline{\circlearrowleft} \mathcal{Z}(Q_{0,T}) \overline{\circlearrowleft} L^{q_{\min}}(0,T;W_0^{1,q_{\min}}(\Omega))$,

$$L^{q'_{\min}}(0,T;W^{-1,q'_{\min}}(\Omega)) \overline{\circlearrowleft} [\mathcal{Z}(Q_{0,T})]^* \overline{\circlearrowleft} L^{q'_{\max}}(0,T;W^{-1,q'_{\max}}(\Omega)).$$

Зауваження 4.1. Нехай $\widetilde{W} = \{z \mid z, z_t \in L^{q'_{\max}}(0,T;W^{-1,q'_{\max}}(\Omega))\}$. Можна показати, що

$$\widetilde{W} \circlearrowleft C([0,T];W^{-1,q'_{\max}}(\Omega)), \qquad \overline{C^{\infty}([0,T];W^{-1,q'_{\max}}(\Omega))} = \widetilde{W}$$

і для всіх $w \in \widetilde{W}$, $\varphi \in C^1([0,T])$ виконується формула інтегрування частинами

$$\int_0^T w_t(t)\varphi(t)\,dt = w(T)\varphi(T) - w(0)\varphi(0) - \int_0^T w(t)\varphi'(t)\,dt. \qquad (4.2)$$

Доведемо таке твердження.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови* **(Q2)**, **(Γ2)**, **(A2)–(F2)** *і, крім того,*

$$1)\ \frac{r_{\max}}{2} \le r_{\min}, \quad 2)\ \frac{\gamma_{\min}}{r-1} > 1, \quad 3)\ q_{\max} \ge \frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\min} - (r-1)}, \qquad (4.3)$$

$$\frac{\gamma_{\max}}{r-1} \le 2. \qquad (4.4)$$

Тоді мішана задача (1.4)–(1.6) *має узагальнений розв'язок u такий, що*

$$\int_{Q_{0,T}} \left[\sum_{i=1}^{n} \left[(|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u)_{x_i} \right]^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u \right]^2 + |u|^{q(x)} \right] dx\,dt < +\infty, \quad (4.5)$$

$$\big\| |u|^{r-2}u; L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(0,T; W_0^{1,\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega))\big\| + \big\|(|u|^{r-2}u)_t; L^{q'_{\max}}(0,T; W^{-1,q'_{\max}}(\Omega))\big\| < +\infty. \quad (4.6)$$

Доведення. Доведення теореми проведемо методом еліптичної регуляризації. Для кожного $\varepsilon > 0$ розглянемо граничну задачу

$$-\varepsilon(|u^\varepsilon|^{r-2}u_t^\varepsilon)_t + |u^\varepsilon|^{r-2}u_t^\varepsilon - \sum_{i=1}^n (a_i|u^\varepsilon|^{\gamma_i-2}u_{x_i}^\varepsilon)_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i|u^\varepsilon|^{\gamma_i-2}u_{x_i}^\varepsilon + g|u^\varepsilon|^{q(x)-2}u^\varepsilon = f, \quad (4.7)$$

$$u^\varepsilon|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad (4.8)$$

$$u^\varepsilon|_{t=0} = 0, \;\; u_t^\varepsilon|_{t=T} = 0. \quad (4.9)$$

Оскільки виконується (4.3) 1), то з теореми 3.1 випливає існування функції u^ε — розв'язку задачі (4.7)–(4.9). Ця функція для всіх функцій $v \in \Pi_1$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\varepsilon|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t v_t + |u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t v + \sum_{i=1}^n a_i|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}\frac{2}{\gamma_i}(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}\frac{2}{\gamma_i}(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}v + g|u^\varepsilon|^{q(x)-2}u^\varepsilon v\Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_{0,T}} fv\,dx\,dt, \quad (4.10)$$

та відповідні оцінки з теореми 3.1. З оцінок (3.12), (3.15) випливає, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^n \big[(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}\big]^2 + \sum_{i=1}^n |u^\varepsilon|^{\gamma_i} + |u^\varepsilon|^{q(x)}\Big]\,dx\,dt \le C_{22}. \quad (4.11)$$

Стосовно цих оцінок відзначимо таке. З **(F2)** випливає існування такого $i_0 \in \{1,\dots,n\}$, що $\gamma_{\max} = \gamma_i$ та (див. (3.10))

$$\int\limits_{Q_{0,T}} fu^\varepsilon\,dx\,dt \le \delta\int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{\gamma_{i_0}}\,dx\,dt + C_{23}(\delta)\int\limits_{Q_{0,T}} |f|^{\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_{\max}-1}}\,dx\,dt, \quad \delta > 0. \quad (4.12)$$

У процесі доведення аналогу леми 3.1 та теореми 3.1 тільки для нашої задачі доданки, що містять b_i, оцінюємо через інтеграл $\delta \int_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{\gamma_{i_0}}\,dx\,dt$, а потім використовуємо оцінку (3.5). Тому, вибираючи $\delta > 0$ так, щоб $a_0 - \delta > 0$ чи ще меншим, ми отримаємо оцінки (4.11), причому, стала $C_{22} > 0$ не залежить від $\varepsilon > 0$. Принагідно зауважимо, що в оцінці (4.12), взагалі кажучи, не можна взяти $r_{\max}$ замість $\gamma_{\max}$. Якщо $r = r_{\max} > \gamma_{\max}$, то $\delta > 0$ треба вибирати так, щоб $\varepsilon - \delta > 0$. У цьому випадку стала $C_{22} > 0$ буде залежати від $\varepsilon > 0$, а це нас не влаштовує.

Крім (4.11), отримаємо оцінку

$$\varepsilon \int\limits_{Q_{0,T}} |\,(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t|^2\,dx\,dt \le C_{24},$$

де стала $C_{24} > 0$ також не залежить від $\varepsilon > 0$. Звідси та з умови (4.9) отримаємо

$$\varepsilon \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^r\,dx\,dt = \varepsilon \int\limits_{Q_{0,T}} |\,|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon|^2\,dx\,dt$$

$$\le \varepsilon C_{25} \int\limits_{Q_{0,T}} |\,(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t|^2\,dx\,dt \le C_{26},$$

де стала $C_{26} > 0$ не залежить від $\varepsilon > 0$, якщо, наприклад, $\varepsilon \le 1$.

З отриманих оцінок випливає існування послідовності $\{u^{\varepsilon_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ такої, що

$$(|u^{\varepsilon_m}|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^{\varepsilon_m})_{x_i} \underset{\varepsilon_m\to 0}{\longrightarrow} \chi^i_{\frac{\gamma_i}{2}}, \quad |u^{\varepsilon_m}|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^{\varepsilon_m} \underset{\varepsilon_m\to 0}{\longrightarrow} \chi_{\frac{\gamma_i}{2}}$$
$$\text{слабко в } L^2(Q_{0,T}),\ i = \overline{1,n},$$
$$|u^{\varepsilon_m}|^{q(x)-2}u^{\varepsilon_m} \underset{\varepsilon_m\to 0}{\longrightarrow} \chi_q \quad \text{слабко в } L^{q'(x)}(Q_{0,T}),$$
$$\sqrt{\varepsilon_m}(|u^{\varepsilon_m}|^{\frac{r}{2}-1}u^{\varepsilon_m})_t \underset{\varepsilon_m\to 0}{\longrightarrow} \chi^0_{\frac{r}{2}} \quad \text{слабко в } L^2(Q_{0,T}).$$

Цих збіжностей буде недостатньо для граничного переходу в (4.10). Тому отримаємо додаткові оцінки на функції $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Нехай

$$\langle F(t)v, z\rangle_Z = \int\limits_{\Omega_t} \Big[fz - \sum_{i=1}^n a_i |v^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1} \frac{2}{\gamma_i} (|v|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}v)_{x_i} z_{x_i}$$
$$- \sum_{i=1}^n b_i |v|^{\frac{\gamma_i}{2}-1} \frac{2}{\gamma_i} (|v|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}v)_{x_i} z - g|v|^{q(x)-2}vz \Big]\,dx, \quad t \in (0,T),$$

$\langle \mathcal{F}u, w\rangle_{\mathcal{Z}(Q_{0,T})} = \int_0^T \langle F(t)u(t), w(t)\rangle_Z\,dt$. Оскільки для кожного $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\frac{1}{\frac{2\gamma_i}{(\gamma_i-2)\gamma_i'}} + \frac{1}{\frac{2}{\gamma_i'}} = \frac{(\gamma_i-2)\gamma_i'}{2\gamma_i} + \frac{\gamma_i'}{2} = \frac{\gamma_i'}{2}\Big(\frac{\gamma_i-2}{\gamma_i}+1\Big)$$
$$= \frac{\gamma_i'}{2}\Big(\frac{2\gamma_i-2}{\gamma_i}\Big) = \gamma_i'\frac{\gamma_i-1}{\gamma_i} = 1,$$

то з нерівності Юнга зі сталими $\frac{2\gamma_i}{(\gamma_i-2)\gamma_i'} > 1$, $\frac{2}{\gamma_i'} > 1$ одержимо

$$\big|\,|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}\big|^{\gamma_i'}$$
$$= |u^\varepsilon|^{\frac{(\gamma_i-2)\gamma_i'}{2}}|(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}|^{\gamma_i'}$$
$$\le C_{27}(|u^\varepsilon|^{\gamma_i} + |(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}|^2).$$

Використавши ці оцінки та (4.11), отримаємо, що $F(t)u^\varepsilon(t) \in Z^*$. Крім того, для всіх $z \in \mathcal{Z}(Q_{0,T})$ отримаємо нерівність

$$\langle \mathcal{F}u^\varepsilon, z\rangle_{\mathcal{Z}(Q_{0,T})} \le C_{28}\Bigg\{\sum_{i=1}^n\Bigg(\int\limits_{Q_{0,T}} |z_{x_i}|^{\gamma_i}\,dx\,dt\Bigg)^{1/\gamma_i}$$
$$+\sum_{i=1}^n\Bigg(\int\limits_{Q_{0,T}} |z|^{\gamma_i}\,dx\,dt\Bigg)^{1/\gamma_i} + \|z; L^{q(x)}(Q_{0,T})\|\Bigg\}.$$

де стала $C_{28} > 0$ не залежить від ε. Отже, $\|\mathcal{F}u^\varepsilon; [\mathcal{Z}(Q_{0,T})]^*\| \le C_{29}$, а тому

$$\|\mathcal{F}u^\varepsilon; L^{q'_{\max}}(0,T; W^{-1,q_{\max}}(\Omega))\| \le C_{30}, \tag{4.13}$$

де стала $C_{30} > 0$ не залежить від ε.

Візьмемо в (4.10) $v(x,t) = \varphi(t)z(x)$, $(x,t) \in Q_{0,T}$, де $\varphi \in C^\infty([0,T])$, $\varphi(0) = 0$, $z \in Z$, що законно. Отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\varepsilon|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t\varphi' z + |u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t\varphi z\Big]\,dx\,dt$$
$$= \int\limits_0^T \langle F(t)u^\varepsilon(t), z\rangle_Z\,\varphi(t)\,dt.$$

Нехай $\widehat{u}^\varepsilon = |u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t$. Тоді попередня рівність набуде вигляду

$$\varepsilon\int\limits_0^T \langle \widehat{u}^\varepsilon(t), z\rangle_Z\, \varphi'(t)\,dt + \int\limits_0^T \langle \widehat{u}^\varepsilon(t), z\rangle_Z\, \varphi(t)\,dt = \int\limits_0^T \langle F(t)u^\varepsilon(t), z\rangle_Z\, \varphi(t)\,dt,$$

або

$$\left\langle \varepsilon\int\limits_0^T \widehat{u}^\varepsilon(t)\,\varphi'(t)\,dt, z\right\rangle_Z + \left\langle \int\limits_0^T \widehat{u}^\varepsilon(t)\,\varphi(t)\,dt, z\right\rangle_Z = \left\langle \int\limits_0^T F(t)u^\varepsilon(t)\,\varphi(t)\,dt, z\right\rangle_Z.$$

Завдяки довільності $z \in Z$ звідси одержимо таку рівність в Z^*:

$$\varepsilon\int\limits_0^T \widehat{u}^\varepsilon(t)\varphi'(t)\,dt + \int\limits_0^T \widehat{u}^\varepsilon(t)\varphi(t)\,dt = \int\limits_0^T F(t)u^\varepsilon(t)\varphi(t)\,dt. \tag{4.14}$$

Якщо $\psi \in C_0^\infty((0,T))$ і в (4.14) взяти $\varphi = \psi$, то ця рівність означає, що в сенсі простору Z^* виконується рівняння

$$-\varepsilon\widehat{u}_t^\varepsilon(t) + \widehat{u}^\varepsilon(t) = F(t)u^\varepsilon(t), \qquad t \in (0,T), \tag{4.15}$$

причому похідна $\widehat{u}_t^\varepsilon$ розуміється в сенсі простору розподілів $D^*(0,T;Z^*)$. З рівності (4.14) отримаємо, що в сенсі простору Z^*

$$\widehat{u}^\varepsilon(T) = 0. \tag{4.16}$$

Дійсно, оскільки $\widehat{u}^\varepsilon \in \widetilde{W}$ (див. зауваження 4.1), то $\widehat{u}^\varepsilon \in C([0,T]; W^{-1,q'_{\max}}(\Omega))$ і для цієї функції виконується формула інтегрування частинами (4.2). Застосувавши її до першого доданка в (4.14), одержимо, що

$$\varepsilon\widehat{u}^\varepsilon(T)\varphi(T) - \varepsilon\int\limits_0^T \widehat{u}_t^\varepsilon(t)\varphi(t)\,dt + \int\limits_0^T \widehat{u}^\varepsilon(t)\varphi(t)\,dt = \int\limits_0^T F(t)u^\varepsilon(t)\varphi(t)\,dt.$$

Віднявши від цієї рівності вираз (4.15), помножений на φ та зінтегрований за $t \in (0,T)$, одержимо $\varepsilon\widehat{u}^\varepsilon(T)\varphi(T) = 0$. Оскільки число $\varphi(T)$ можна вибрати, наприклад, рівним $\frac{1}{\varepsilon}$, то остання рівність перетвориться на (4.16).

Легко переконатися, що формула

$$\widehat{u}^{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{T-t} e^{-\frac{T-t-\eta}{\varepsilon}} F(T-\eta)u^{\varepsilon}(T-\eta)\,d\eta, \qquad t \in (0,T) \qquad (4.17)$$

задає розв'язок задачі (4.15), (4.16). Ясно, що функція $\varphi(s) = |s|^{q'_{\max}}$, $s \in \mathbb{R}$, є опуклою, бо $q'_{\max} > 1$. Тому для функції $\xi : (0,T) \to \mathbb{R}$ з [24, с. 59] при $V = H = \mathbb{R}$ випливає оцінка

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-s}{\varepsilon}}\xi(s)\,ds\right|^{q'_{\max}} \le \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-s}{\varepsilon}}|\xi(s)|^{q'_{\max}}\,ds, \qquad \tau \in (0,T). \quad (4.18)$$

В наступних двох нерівностях писатимемо $\|\cdot\|$ замість $\|\cdot; W^{-1,q'_{\max}}(\Omega)\|$. Використавши (4.17) та (4.18), отримаємо, що

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T \|\widehat{u}^{\varepsilon}(t)\|^{q'_{\max}}\,dt &\le \int\limits_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{T-t} e^{-\frac{T-t-\eta}{\varepsilon}}\|F(T-\eta)u^{\varepsilon}(T-\eta)\|\,d\eta\right)^{q'_{\max}} dt \\ &\le \int\limits_0^T dt\,\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{T-t} e^{-\frac{T-t-\eta}{\varepsilon}}\|F(T-\eta)u^{\varepsilon}(T-\eta)\|^{q'_{\max}}\,d\eta \\ &= \int\limits_0^T \|F(T-\eta)u^{\varepsilon}(T-\eta)\|^{q'_{\max}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{T-\eta} e^{-\frac{T-t-\eta}{\varepsilon}}\,dt\right)d\eta.\end{aligned}$$

Оскільки при заміні змінних $t \rightsquigarrow \tau$, де $T-t-\eta = \tau$, отримаємо

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{T-\eta} e^{-\frac{T-t-\eta}{\varepsilon}}\,dt = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{T-\eta}^{0} e^{-\frac{\tau}{\varepsilon}}\,d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{T-\eta} e^{-\frac{\tau}{\varepsilon}}\,d\tau \le \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\varepsilon}}\,d\tau = 1,$$

то з попередньої нерівності одержимо, що

$$\int\limits_0^T \|\widehat{u}^{\varepsilon}(t)\|^{q'_{\max}}\,dt \le \int\limits_0^T \|F(T-\eta)u^{\varepsilon}(T-\eta)\|^{q'_{\max}}\,d\eta = \int\limits_0^T \|F(t)u^{\varepsilon}(t)\|^{q'_{\max}}\,dt.$$

Враховуючи (4.13) та те, що

$$\widehat{u^\varepsilon} = |u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t = \frac{1}{r-1}(|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon)_t,$$

матимемо, що

$$\left\|(|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon)_t; L^{q'_{\max}}(0,T;W^{-1,q'_{\max}}(\Omega))\right\| \le C_{31}, \tag{4.19}$$

де стала $C_{31} > 0$ не залежить від ε.

Отримаємо додаткові оцінки на елементи множини $\{|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Припустимо, що $i \in \{1,\dots,n\}$. З умови (4.3) випливає, що $\frac{\gamma_i}{r-1} > 1$ (рівність тут виключається завдяки умові (4.3) 2)). Тому з оцінки (3.7) для $G = Q_{0,T}$,

$$\alpha_0 = (r-2)\frac{\gamma_i}{r-1} - 2 + \frac{\gamma_i}{r-1} = \gamma_i - 2,$$
$$\alpha_1 = 2 - \frac{\gamma_i}{r-1}, \qquad \alpha_2 = \frac{\gamma_i}{r-1},$$

одержимо, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |\frac{1}{r-1}(|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon)_{x_i}|^{\frac{\gamma_i}{r-1}}\,dx\,dt = \int\limits_{Q_{0,T}} |\,|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon_{x_i}|^{\frac{\gamma_i}{r-1}}\,dx\,dt$$
$$= \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{(r-2)\frac{\gamma_i}{r-1}-2+\frac{\gamma_i}{r-1}+2-\frac{\gamma_i}{r-1}}|u^\varepsilon_{x_i}|^{\frac{\gamma_i}{r-1}}\,dx\,dt$$
$$= \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{\alpha_0+\alpha_1}|u^\varepsilon_{x_i}|^{\alpha_2}\,dx\,dt \le C_6 \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{\alpha_0}|u^\varepsilon_{x_i}|^{\alpha_1+\alpha_2}\,dx\,dt$$
$$= C_6 \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{\gamma_i-2}|u^\varepsilon_{x_i}|^2\,dx\,dt.$$

Перевіримо можливість використання оцінки (3.7):

$$\begin{cases} \alpha_1 \ge 0, \\ \alpha_2 \ge 0, \\ \alpha_1+\alpha_2 \ge 1, \\ \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 > 1, \end{cases} \iff \begin{cases} 2-\frac{\gamma_i}{r-1} \ge 0, \\ \frac{\gamma_i}{r-1} \ge 0, \\ 2-\frac{\gamma_i}{r-1}+\frac{\gamma_i}{r-1} \ge 1, \\ \gamma_i - 2 + 2 - \frac{\gamma_i}{r-1}+\frac{\gamma_i}{r-1} > 1, \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \frac{\gamma_i}{r-1} \le 2, \\ \frac{\gamma_i}{r-1} \ge 0, \\ 2 \ge 1, \\ \gamma_i > 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що останні співвідношення виконуються. Отже, за умов теореми маємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |(|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon)_{x_i}|^{\frac{\gamma_i}{r-1}}\,dx\,dt \le C_{32},$$

де стала $C_{32} > 0$ не залежить від ε. Звідси одержимо, що

$$\big\|\, |u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon; L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(0,T; W_0^{1,\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega))\big\| \le C_{33}, \tag{4.20}$$

де стала $C_{33} > 0$ не залежить від ε.

Відомо, що якщо $s_1 \le s_2$, то $W_0^{1,s_2}(\Omega) \overline{\circlearrowleft} W_0^{1,s_1}(\Omega)$. Тому $W^{-1,s_1'}(\Omega) \overline{\circlearrowleft} W^{-1,s_2'}(\Omega)$ (тут $\frac{1}{s_2} \le \frac{1}{s_1}$, тобто $1 - \frac{1}{s_2'} \le 1 - \frac{1}{s_1'}$, $\frac{1}{s_1'} \le \frac{1}{s_2'}$, $s_2' \le s_1'$). У нас

$$|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon \in L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}\big(0,T; W_0^{1,\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega)\big) \circlearrowleft L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(Q_{0,T}),$$

а з умови (4.3) отримаємо, що

$$q_{\max} \ge \frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\min} - (r-1)}, \qquad \frac{q'_{\max}}{q'_{\max} - 1} \ge \frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\min} - (r-1)},$$
$$q'_{\max} \ge \frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\min} - (r-1)}(q'_{\max} - 1),$$
$$q'_{\max}\Big(\frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\min} - (r-1)} - 1\Big) \le \frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\min} - (r-1)},$$
$$q'_{\max}(\gamma_{\min} - (\gamma_{\min} - (r-1)) \le \gamma_{\min},$$

тобто $q'_{\max} \le \frac{\gamma_{\min}}{r-1}$. Тому $L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega) \overline{\circlearrowleft} L^{q'_{\max}}(\Omega) \overline{\circlearrowleft} W^{-1,q'_{\max}}(\Omega)$.

Підсумуємо наші результати. Ми маємо трійку просторів

$$W_0^{1,\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega) \overset{K}{\circlearrowleft} L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega) \circlearrowleft W^{-1,q'_{\max}}(\Omega) \tag{4.21}$$

та оцінки (4.20), (4.19). Тоді з твердження 2.3 та леми 1.18 [21, с. 39] випливає, що

$$|u^{\varepsilon_m}|^{r-2}u^{\varepsilon_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} |u|^{r-2}u \text{ сильно в } L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(Q_{0,T}) \text{ та майже скрізь в } Q_{0,T}. \tag{4.22}$$

Отже, $\chi_q = |u|^{q(x)-2}u$, $\chi_{\frac{\gamma_i}{2}} = |u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u$, $\chi^i_{\frac{\gamma_i}{2}} = (|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u)_{x_i}$, $i = \overline{1,n}$. Тому, записавши (4.10) для $\varepsilon = \varepsilon_m$ та спрямувавши $m \to \infty$, отримаємо (4.1).

З (4.21) випливає, що $W_0^{1,\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega) \overset{K}{\circlearrowleft} W^{-1,q'_{\max}}(\Omega)$. Дійсно, якщо $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — обмежена послідовність в просторі $W_0^{1,\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega)$, то, можливо при переході до підпослідовності, $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — сильно збіжна в $L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega)$ до деякого z. Тоді

$$\left\| z - z^m; W^{-1,q'_{\max}}(\Omega) \right\| \le C_{34} \left\| z - z^m; L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega) \right\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, застосовуючи пункт 3) твердження 2.4 для $M_1 = W_0^{1,\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega)$ (нормований простір є півнормованою множиною), $A_1 = W^{-1,q'_{\max}}(\Omega)$, отримаємо, що $Y \overset{K}{\circlearrowleft} C([0,T];A_1)$. Тому $|u|^{r-2}u \in C([0,T]; W^{-1,q'_{\max}}(\Omega))$ і, зокрема, задовольняє початкову умову (1.6) в тому сенсі, що ця функція є границею послідовності функцій, що задовольняють умову (1.6). Теорему доведено. □

Виявляється, що від умови (4.4) можна відмовитися.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови* **(Q2)**, **(Г2)**, **(A2)–(F2)**, (4.3). *Тоді мішана задача* (1.4)–(1.6) *має узагальнений розв'язок* u, *який задовольняє оцінки* (4.5), (4.6).

Доведення. Нехай u^ε — розв'язок задачі (4.7)–(4.9). Повторимо доведення теореми 4.1 до формули (4.19) включно. Проте замість (4.20) отримаємо дещо іншу оцінку. Нехай M_1 — півнормована множина з теореми 2.2 при $N = n$, $G = \Omega$, причому $\beta_i = \frac{\gamma_i - 2(r-1)}{r-1}$. Використавши нерівність Гельдера з показником $\frac{\beta_i+2}{\min_i \beta_i + 2} \ge 1$, одержимо, що

$$\begin{aligned}
&\int_0^T [|u^\varepsilon(t)|^{r-2}u^\varepsilon(t)]_{M_1}^{\min_i \beta_i + 2}\,dt \\
&\quad \le C_{35} \int_0^T \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |\,|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon|^{\beta_i} |(|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon)_{x_i}|^2\,dx \right)^{\frac{\min\limits_i \beta_i + 2}{\beta_i+2}} dt \\
&\quad \le C_{36} \int_{Q_{0,T}} \sum_{i=1}^n |\,|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon|^{\beta_i} |(|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon)_{x_i}|^2\,dx\,dt + C_{37} \\
&\quad = C_{36} \int_{Q_{0,T}} \sum_{i=1}^n |u^\varepsilon|^{(r-1)\beta_i + (r-2)2} |u^\varepsilon_{x_i}|^2\,dx\,dt + C_{37} \\
&\quad = C_{36} \int_{Q_{0,T}} \sum_{i=1}^n |u^\varepsilon|^{\gamma_i - 2} |u^\varepsilon_{x_i}|^2\,dx\,dt + C_{37} \le C_{38}.
\end{aligned}$$

Отже, $\{|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — обмежена множина в Y з твердження 2.4 при

$A_1 = W^{-1,q'_{\max}}(\Omega)$, $p_1 = q'_{\max}$, $p = \min_i \beta_i + 2 = \frac{\gamma_{\min}-2(r-1)}{r-1} + 2 = \frac{\gamma_{\min}}{r-1}$. Візьмемо $A_0 = L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega)$. З наслідку 2.1 теореми 2.2 випливає, що $M_1 \overset{K}{\circlearrowleft} L^{\min_i \beta_i+2}(\Omega) = L^{\frac{\gamma_{\min}}{r-1}}(\Omega) = A_0$. Крім того, $A_0 \circlearrowleft A_1$. Тому, як і в теоремі 4.1 (використовуючи твердження 2.4 замість твердження 2.3), можна отримати (4.22). Далі доведення завершується, як і в теоремі 4.1. $\square$

Приклад. Нехай в умовах теореми 4.1 $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 2$, $r \geq 2$. З умови (4.3) отримаємо, що

$$\begin{cases} \frac{r}{2} \leq 2, \\ \frac{2}{r-1} > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \leq 4, \\ 2 > r-1, \end{cases} \Leftarrow r < 3.$$

Отже, якщо $r \in [2,3)$, $q_2 \geq \frac{3}{3-r}$, то в теоремі 4.1 показано існування узагальненого розв'язку такої мішаної задачі:

$$|u|^{r-2}u_t - \Delta\, u + |u|^{q(x)-2}u = f(x,t), \tag{4.23}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \qquad u|_{t=0} = 0. \tag{4.24}$$

В цьому модельному випадку умова (4.4) не накладе ніяких додаткових обмежень на r, q, бо виконується автоматично.

Література

[1] И. И. Шарапудинов, *О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$* // Мат. заметки **26**(1979), N 4, 613–632.

[2] O. Kovacik, J. Rakosnik, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$* // Czechoslovak Math. J. **41 (116)** (1991), 592–618.

[3] О. Бугрій, С. Лавренюк, *Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. (2000), вип. 56, 33–43.

[4] О. М. Бугрій, *Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега* // Наук. записки Вінницького держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського, Сер. фіз.-мат. (2002), вип. 1, 310–321.

[5] О. М. Бугрій, С. П. Лавренюк, *Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації* // Укр. мат. журн. **53** (2001), N 7, 867–878.

[6] О. М. Бугрій, *Системи параболічних варіаційних нерівностей з виродженням* // Нелинейные граничные задачи. Донецьк, (2003), вип. 13, 43–55.

[7] M. M. Bokalo, V. M. Sikorsky, *The well-posedness of Fourier problem for quasilinear parabolic equations of arbitrary order in unisotropic spaces* // Математичні студії. **8** (1997), N 1, 53–70.

[8] Ю. А. Дубинский, *Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений* // Мат. сборник **64 (106)** (1964), N 3, 458–480.

[9] Г. Н. Агаев, *О первой краевой задаче для линейных вырождающихся параболических уравнений* // Изв. АН Азербайджанской ССР, Серия физ.-тех. и мат. наук. (1976), N 2, 10–16.

[10] Р. Х. Атакишиева, Р. И. Алиханова, *О некотором классе вариационных вырождающихся параболических неравенств высокого порядка* // Изв. АН Азербайджанской ССР, Серия физ.-тех. и мат. наук. (1983), N 3, 20–26.

[11] С. Н. Антонцев, С. И. Шмарев, *О локализации решений эллиптических уравнений с неоднородным анизотропным вырождением* // Сиб. матем. журнал, **46** (2005), N 5, 963–984.

[12] S. N. Antontsev, S. I. Shmarev, *A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions* // Nonlinear Analysis, **60** (2005), 515–545.

[13] А. Е. Шишков, *Распространение возмущений в сингулярной задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений* // Матем. Сборник. **187** (1996), N 9, 139–160.

[14] F. Bernis, *Qualitative properties for some nonlinear hither order degenerate parabolic equations* // Houston J. Math. **14** (1988), N 3, 319–351.

[15] F. Bernis, *Existence results for doubly nonlinear hither order parabolic equations on unbounded domains* // Math. Ann. **279** (1988), 373–394.

[16] D. Andreucci, A. F. Tedeev, *Finite speed of propagation for thin-film equation and other higher-order parabolic equations with general nonlinearity* // Interfaces Free Bound. **3** (2001), N 3, 233–264.

[17] С. П. Дегтярев, А. Ф. Тедеев, $L_1 - L_\infty$ *оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными* // Матем. сборник. **198** (2007), N 5, 639–660.

[18] Binheng Song, *Anisotropic diffusions with singular advections and absorptions. Part 1: Existence* // Applied Mathematical Letters. **14** (2001), 811–816.

[19] Binheng Song, *Anisotropic diffusions with singular advections and absorptions. Part 2: Uniqueness* // Applied Mathematical Letters. **14** (2001), 817–823.

[20] Ю. А. Дубинский, *Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях* // Мат. сборник, **67 (109)** (1965), N 4, 609–642.

[21] Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978, 336 с.

[22] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейних краевых задач.* М.: Мир, 1972, 608 с.

[23] J.-P. Aubin, *Un theoreme de compacite* // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences. **256** (1963), N 24, 5042–5044.

[24] А. А. Панков, *Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений.* К., 1985, 184 с.

[25] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1983, 424 с.

Відомості про авторів

Олег Миколайович Бугрій

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1
79000, Львів
Україна
E-Mail: ol_buhrii@i.ua