

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НАКЛОННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНОЙ (ТЕОРИЯ КЛИНОТРОНА)

В. М. Конторович, В. Я. Малеев

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: maleev@ire.kharkov.ua*

В ЛОВ и ЛБВ используется взаимодействие электронного пучка с медленной электромагнитной волной. Для большинства замедляющих систем поле замедленной волны быстро падает с удалением от замедляющей системы и на расстоянии, превышающем длину замедленной волны, практически равно нулю. В связи с этим в указанных приборах до последнего времени использовались тонкие электронные пучки, которые пропускались в непосредственной близости к замедляющей системе. В клинотроне в отличие от обычных ЛБВ и ЛОВ электронный пучок наклонен к замедляющей системе, в связи с чем появилась возможность эффективного использования толстых электронных пучков, что в свою очередь, позволило получить большие мощности, значительно превышающие мощность ЛОВ с параллельным пучком [1].

1. Постановка задачи. Последовательное рассмотрение работы клинотрона должно заключаться в решении самосогласованной электродинамической задачи¹ о взаимодействии наклонного электронного пучка с электромагнитным полем над замедляющей системой. Обычно при рассмотрении подобных задач значительные трудности представляет точный учет граничных условий на замедляющей системе ввиду сложной геометрической конфигурации последней. Очевидно, однако, что характер взаимодействия пучка с полем определяется параметрами самой замедленной волны, а не особенностями геометрии замедляющей системы, создающей волну. Это позволяет в качестве граничных условий выбрать наиболее простые электродинамические условия из тех, которые приводят к появлению поверхностной замедленной волны над направляющей плоскостью (ввиду поверхностного характера волны вторая граница несущественна, если она находится на расстоянии, значительно превышающем замедленную длину волны). Таким простейшим типом поверхностной волны является волна Ценнека [3], распространяющаяся над плоскостью с заданным поверхностным импедансом $W \omega$. Для моделирования поверхностной волны в реальной замедляющей системе достаточно определить величину, комплексность и

частотную зависимость импеданса по дисперсионной кривой «холодной» системы.

Хотя введение импеданса приводит к граничным условиям, по форме совпадающим с граничными условиями Леонтовича, в нашем случае импеданс имеет иной физический смысл. Если у Леонтовича поверхностный импеданс определяется большой конечной проводимостью границы σ и поэтому всегда много меньше $1 \left(|W| \square \sigma^{-\frac{1}{2}} \right)$, здесь импеданс связан, например, с эффективным входным импедансом щелей и может быть порядка и даже больше 1^2 .

Введение импеданса позволяет учесть неоднородность электромагнитного поля, замедление, дисперсию и тем самым последовательно описать взаимодействие пучка с электромагнитной волной.

В настоящей работе рассматривается взаимодействие электронного пучка, наклоненного под углом α к замедляющей системе (описываемой импедансом $W \omega$), с поверхностной электромагнитной волной (рис. 1). Бесконечно толстый пучок заполняет полупространство $x > 0$ и описывает гидродинамически без учета теплового распределения электронов по скоростям. В действительности «бесконечно толстым» является пучок, заполняющий всю область пространства, где поле существенно отлично от нуля, для поверхностных волн эта область порядка длины замедленной волны по нормали к замедляющей системе.

Бесконечно сильное магнитное поле H_0 фокусирует пучок, разрешая в нем лишь одномерное движение вдоль направления поля³. Пучок в отсутствие взаимодействия с электромагнитной волной движется с постоянной скоростью v_0 и имеет постоянную плотность ρ_0 . Влияние собственных электрических и магнитных полей пучка, таким образом, не учитывается.

Мы ограничиваемся режимом малых сигналов, что позволит линеаризовать гидродинамические уравнения. Усиление или генерирование будем связывать с неустойчивостью стационарного режима, проявляющейся в возникновении нарастающих решений (по координате или во време-

ни). Усиление характеризуется мнимой добавкой определенного знака к постоянной распространения γ'' , а генерация - положительной мнимой добавкой к частоте ω'' . Линейное рассмотрение не позволяет найти амплитуду генерируемых колебаний. Однако угловая зависимость генерируемой мощности с точностью до постоянного множителя может быть найдена по $\omega'' \alpha$. Действительно, среднее значение квадрата установившейся амплитуды должно быть найдено из уравнения типа [4]

$$0 = \frac{d|\bar{E}|^2}{dt} = 2\omega'' |\bar{E}|^2 - \nu |\bar{E}|^4, \quad (1.1)$$

где величина $\nu > 0$ определяется нелинейными членами в исходных уравнениях. Так как $\nu \propto \alpha$ при $\alpha = 0$ отлично от нуля (нелинейность остается, очевидно, и при $\alpha = 0$), то для волны, у которой $\omega'' = 0$, из (1.1) мы можем найти угловую зависимость генерируемой мощности при малых α :

$$|\bar{E}|^2 = \frac{2\omega'' \alpha}{\nu(0)}. \quad (1.2)$$

Как будет показано в дальнейшем, именно с такой волной связан клинотронный эффект.

Малым параметром теории является отношение плазменной частоты к рабочей частоте

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega} \ll 1, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e \rho_0}{m}. \quad (1.3)$$

Малость Ω_p используется для приближенного решения дисперсионного уравнения.

2. Дисперсионное уравнение. Направим ось x по нормали к направляющей плоскости, а ось z - в направлении распространения (рис. 1).

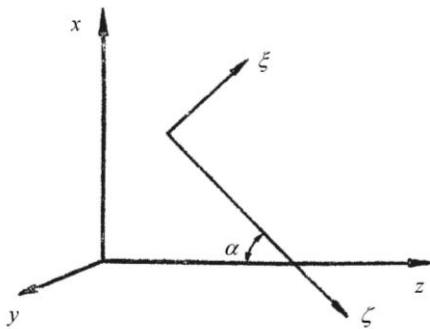


Рис. 1. Плоскость yz совпадает с поверхностью замедляющей системы. Пучок направлен по оси ξ . Ось z совпадает с направлением распространения волны

Пучок движется по оси ξ , лежащей в плоскости xz . Система предполагается однородной по оси y . Рассмотрим взаимодействие пучка с E -волной, у которой отличны от нуля компо-

ненты E_x, E_z, H_y . Зависимость от времени предполагаем в виде $e^{-i\omega t}$. Полная система уравнений состоит из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i \frac{\omega \mu}{c} H_y; \\ -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c} j_x - i \frac{\omega \varepsilon}{c} E_x; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \frac{4\pi}{c} j_z - i \frac{\omega \varepsilon}{c} E_z \end{aligned} \quad (2.1)$$

и линеаризованных уравнений гидродинамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial \xi} &= \frac{e}{m} E_\xi, \quad v \equiv v_\xi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Переменная составляющая тока $j_\xi = \rho v_0 + \rho_0 v_\xi$. Из условия фокусировки $j_\xi = 0$, откуда

$$j_x = -j_\xi \sin \alpha; \quad j_z = j_\xi \cos \alpha. \quad (2.3)$$

Граничное условие при $x = 0$ имеет вид

$$E_z = W \omega H_y, \quad (2.4)$$

где $W \omega$ - поверхностный импеданс направляющей плоскости. При $x \rightarrow +\infty$ поле должно исчезать, поэтому, учитывая однородность граничного условия (2.4), ищем решение уравнений в виде

$$\propto \exp i (px + \gamma z - \omega t),$$

где

$$\text{Im } p \equiv p'' > 0.$$

(В дальнейшем любое комплексное число A мы будем записывать в виде $A = A' + iA''$). Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -i\omega; \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ip; \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow i\gamma; \\ \frac{\partial}{\partial \xi} &\rightarrow i\gamma_\xi; \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где постоянная распространения вдоль направления пучка

$$\gamma_\xi = \gamma \cos \alpha - p \sin \alpha. \quad (2.6)$$

Ясно также, что

$$E_\xi = E_z \cos \alpha - E_x \sin \alpha. \quad (2.7)$$

Из (2.2)-(2.6) выразим ток j_ξ через E_ξ :

$$\frac{4\pi}{c} j_\xi = i\chi l E_\xi, \quad (2.8)$$

где

$$\chi = \frac{\omega \varepsilon}{c}; \quad (2.9)$$

$$l = \frac{\omega_p^2}{\omega - \nu_0 \gamma_\zeta}; \quad (2.10)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e \rho_0}{m \varepsilon}. \quad (2.11)$$

Из (2.1), (2.4), (2.7) и (2.8) получаем исходную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma H_y - \chi l \cos \alpha \sin \alpha E_z + \chi l \sin^2 \alpha - 1 E_x &= 0; \\ -p H_y + \chi l \cos^2 \alpha - 1 E_z - \chi l \cos \alpha \sin \alpha E_x &= 0; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\chi \frac{\mu}{\varepsilon} H_y + p E_z - \gamma E_x = 0;$$

$$W H_y - E_z = 0.$$

Для того, чтобы эта система однородных уравнений была совместна и имела отличное от нуля решение, необходимо, чтобы ранг матрицы коэффициентов был равен двум, т. е. чтобы все миноры третьего порядка этой матрицы были равны нулю. Отсюда

$$p^2 + \gamma^2 - k^2 + l k^2 - \gamma_\zeta^2 = 0; \quad (2.13)$$

$$-s + p + l s - \gamma_\zeta \sin \alpha = 0; \quad (2.14)$$

$$s p - \gamma^2 + k^2 + l \sin \alpha s \gamma_\zeta - k^2 \sin \alpha = 0; \quad (2.15)$$

$$\gamma s + p - l \cos \alpha s \gamma_\zeta - k^2 \sin \alpha = 0, \quad (2.16)$$

где

$$k^2 = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \omega^2; \quad (2.17)$$

$$s = \chi W. \quad (2.18)$$

(В дальнейшем именно величину s мы будем называть импедансом). Из этих четырех уравнений только два являются независимыми, однако, нам удобно будет пользоваться всеми. Исключая γ и p из уравнений (2.13)-(2.15), получаем дисперсионное уравнение, связывающее ω и γ_ζ :

$$\begin{aligned} k^2 - \gamma_\zeta^2 \cos^2 \alpha - s - \gamma_\zeta \sin \alpha &= \\ = -l s - \gamma_\zeta \sin \alpha &. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Напомним, что согласно (2.10) l является функцией от γ_ζ . При фиксированном ω это уравнение четвертого порядка относительно γ_ζ .

Для параллельного пучка γ_ζ согласно (2.6) переходит в γ , тогда уравнение (2.19), связывающее ω и γ , принимает вид

$$k^2 - \gamma^2 - s^2 \omega - \nu_0 \gamma^2 = -\omega_p^2 s^2. \quad (2.20)$$

Для того, чтобы выразить p через γ_ζ ,

проще всего воспользоваться уравнением (2.14)

$$p = -s + l s - \gamma_\zeta \sin \alpha, \quad (2.21)$$

а по известным p и γ_ζ легко находим γ из (2.6)

$$\gamma = \frac{\gamma_\zeta + p \sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (2.22)$$

3. Замедляющая система в отсутствие пучка. В отсутствие пучка (в "холодной" системе) распространяется поверхностная волна. Постоянные распространения этой волны, которые мы снабдим индексом «0», можно получить из уравнений (2.13)-(2.16), (2.19), полагая в них $l = 0$:

$$p_0 = -s; \quad (3.1)$$

$$\gamma_0^2 = k^2 - s^2; \quad (3.2)$$

$$\gamma_{\zeta 0} = \gamma_0 \cos \alpha + s \sin \alpha. \quad (3.3)$$

Согласно (3.1) затухание поверхностной волны вдоль оси x определяется величиной s'' , которая должна быть отрицательна

$$s'' < 0. \quad (3.4)$$

На расстоянии $-1/s''$ от замедляющей системы поле убывает в e раз. Обычно в замедляющей системе это расстояние порядка длины замедленной волны, т. е.

$$-s'' \square \gamma_0'. \quad (3.5)$$

Величина γ_0' определяет фазовую скорость поверхностной волны в направлении оси z

$$v_z^\phi = \frac{\omega}{\gamma_0'}. \quad (3.6)$$

В дальнейшем нас будет интересовать волна с положительной фазовой скоростью $v_z^\phi > 0$, т. е.

$$\gamma_0' > 0 \quad (3.7)$$

(волна с $v_z^\phi < 0$, движущаяся навстречу пучку, практически с ним не взаимодействует). Фазовая скорость в направлении пучка

$$v_\zeta^\phi = \frac{\omega}{\gamma_\zeta'}. \quad (3.6')$$

Эффективное взаимодействие электронного пучка с волной осуществляется тогда, когда скорость электронов близка к фазовой скорости волны в направлении движения пучка, т. е.

$$\nu_0 \square v_\zeta^\phi. \quad (3.8)$$

Это условие удобно представить в виде

$$\gamma_e \square \gamma_{\zeta 0}', \quad (3.9)$$

где «постоянная распространения» пучка

$$\gamma_e = \frac{\omega}{\nu_0}. \quad (3.10)$$

Скорость переноса энергии поверхностной волны вдоль замедляющей системы⁴

$$\nu_z^{zp} = \frac{\partial \omega}{\partial \gamma_0'}. \quad (3.11)$$

Знак ν_z^{zp} определяется зависимостью $\gamma_0' \omega$ (дисперсионная кривая «холодной» системы). В ЛБВ работа осуществляется на участках дисперсионной кривой, где $\frac{\partial \omega}{\partial \gamma_0'} > 0$, а в ЛОВ и клинотроне – на участках дисперсионной кривой, где $\frac{\partial \omega}{\partial \gamma_0'} < 0$ («обратная» волна).

Величина γ_0'' описывает затухание поверхностной волны вдоль оси z и связана с потерями в среде и на стенках замедляющей системы. В реальных приборах потери в среде отсутствуют (вакуум, $\varepsilon = \mu = 1$) и γ_0'' определяется потерями на стенках, т. е. реальной частью импеданса s' . Обычно эти потери весьма малы

$$\gamma_0' \square \gamma_0'' \quad (3.12)$$

и при выполнении (3.5)

$$s' \square \gamma_0''. \quad (3.13)$$

Зависимость $s \omega$, а также величины ν_z^ϕ , ν_ξ^ϕ , ν_z^{zp} определяются уравнениями (3.2), (3.3), (3.6), (3.7), (3.11) по известным (теоретически или экспериментально) дисперсионным зависимостям $\gamma_0' \omega$ и $\gamma_0'' \omega$. Полученную таким образом зависимость $s \omega$ мы должны считать свойством замедляющей системы (импеданса), определяющим дисперсию независимо от режима работы прибора, в частности, при наличии пучка и т. д.

В настоящей статье мы ограничимся простым случаем отсутствия потерь (реактивный импеданс)

$$s = -i\beta\gamma_e, \quad \beta > 0, \quad \beta \square 1. \quad (3.14)$$

При этом γ_0 вещественно и поверхностная волна имеет вид

$$\exp -\beta x \exp i \gamma_0' z - \omega t, \quad (3.15)$$

т. е. плоскости равной фазы перпендикулярны оси z , а вдоль оси x имеется чистое затухание.

В дальнейшем при рассмотрении генерирования нам понадобятся разности

$$k \omega - k \omega_0 = q \omega - \omega_0, \quad (3.16)$$

где

$$q = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}, \quad (3.17)$$

$$s \omega - s \omega_0 = \sigma \omega - \omega_0. \quad (3.18)$$

Зависимость $\sigma \omega$ определяется по $s \omega$ из (3.18). Величину $\sigma \omega_0 \equiv \left(\frac{ds}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}$ находим дифференцированием (3.2):

$$\sigma \omega_0 = \frac{\omega_0}{s \omega_0} \left(q^2 - \frac{1}{\nu_\phi \nu_{zp}} \right). \quad (3.19)$$

Здесь фазовая и групповая скорости (3.6), (3.7) характеризуют дисперсионные свойства замедляющей системы. Приведенные соотношения верны и при малых комплексных $\omega - \omega_0$. Заметим, что при $\varepsilon = \mu = 1$

$$\nu_{\phi z}^2 = \frac{c^2}{1 - \frac{s^2 c^2}{\omega^2}} \quad (3.20)$$

и замедление связано с отрицательностью s^2 .

4. Режим усиления. В режиме усиления частота ω вещественна и фиксирована внешним источником. Усиление характеризуется изменением амплитуды сигнала вдоль замедляющей системы, т. е. знаком и величиной $\gamma'' \omega$. Усиление на длине прибора L равно $\gamma'' L$.

Для удобства введем безразмерные величины:

$$\Gamma = \frac{\gamma_\xi}{\gamma_e}, \quad \mathbf{\Gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_e}, \quad K = \frac{k}{\gamma_e}, \quad S = \frac{s}{\gamma_e}, \quad (4.1)$$

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega}, \quad \Gamma_0 = \frac{\gamma_{\xi 0}}{\gamma_e}, \quad \mathbf{\Gamma}_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_e} = \frac{\nu_0}{\nu_\phi}, \quad P = \frac{P}{\gamma_e},$$

где γ_e определяется (3.10).

В этих обозначениях дисперсионное уравнение (2.19) принимает вид

$$K^2 - \Gamma^2 \cos^2 \alpha - S - \Gamma \sin \alpha^2 = -l S - \Gamma \sin \alpha^2. \quad (4.2)$$

Согласно (2.10)

$$l = \frac{\Omega_p^2}{1 - \Gamma^2}. \quad (4.3)$$

Для «холодной» системы (4.2) переходит в

$$K^2 - \Gamma_0^2 \cos^2 \alpha - S - \Gamma_0 \sin \alpha^2 = 0. \quad (4.4)$$

Используя (4.4), приведем дисперсионное урав-

нение к виду

$$\Gamma - \Gamma_0 \quad \Gamma - 1 \quad ^2 = \Omega_p^2 \frac{S - \Gamma \sin \alpha}{\Gamma_0 + \Gamma - 2S \sin \alpha}. \quad (4.5)$$

Хотя это уравнение является уравнением четвертой степени относительно Γ , нас в дальнейшем согласно (3.7), будут интересовать только три корня: два корня, близкие к 1, и один корень, близкий к Γ_0 . Назовем «электромагнитной» волну, переходящую при выключении взаимодействия между пучком и полем ($\Omega_p \rightarrow 0$) в электромагнитную волну «холодной» системы $\Gamma \rightarrow \Gamma_0$, и «электронными» - две волны, которые при $\Omega_p \rightarrow 0$ переходят в покоящиеся относительно пучка возмущения плотности и скорости $\Gamma \rightarrow 1$.

Очевидно, что амплитуда волны $\propto \exp -\gamma'' z$ при усилении увеличивается в направлении распространения энергии данной волны, т. е. в направлении ее групповой скорости V . Условия усиления

$$\gamma'' < 0 \text{ при } V > 0; \quad \gamma'' > 0 \text{ при } V < 0. \quad (4.6)$$

Для пучков малой плотности в силу (1.3) групповая скорость возмущенных волн мало отличается от групповой скорости «холодных» волн (при $\Omega_p = 0$). Поэтому для электромагнитной волны

$$V \propto v_z^{2p}, \quad (4.7')$$

а для электронных волн

$$V \propto v_0. \quad (4.7'')$$

Усилению прямой электромагнитной волны ($v_z^{2p} > 0$) и электронных волн (в силу $v_0 > 0$) соответствует $\gamma'' < 0$. Напротив, усилению «обратной» электромагнитной волны ($v_z^{2p} < 0$) соответствует $\gamma'' > 0$.

Решение дисперсионного уравнения легко находится в двух предельных случаях:

$$|\Gamma_0 - 1| \propto \Omega_p^{2/3}; \quad (4.8)$$

$$|\Gamma_0 - 1| \propto \Omega_p^{2/3}. \quad (4.9)$$

К случаю (4.8) относятся:

1) Резонанс при больших углах⁵

$$|\delta| \propto \Omega_p^{2/3}, \quad \alpha \propto \Omega_p^{2/3}; \quad \delta \equiv \frac{v_0 - v_\phi}{v_\phi}; \quad (4.10)$$

2) Нерезонансный случай

$$|\delta| \propto \Omega_p^{2/3}. \quad (4.11)$$

Полученное решение будет справедливо при $\alpha = 0$ и $\alpha \geq \delta$, но не может дать правильную угловую зависимость при $\alpha \propto \delta$;

3) Предельный случай (4.9) соответствует резонансу при малых углах

$$|\delta| \propto \Omega_p^{2/3}, \quad \alpha \propto \Omega_p^{2/3}. \quad (4.12)$$

При выполнении условия (4.8) решение для электронных волн ищем в виде

$$\Gamma_{1,2} = 1 + a_{1,2}, \quad a_{1,2} \rightarrow 0 \text{ при } \Omega_p \rightarrow 0, \quad (4.13)$$

а для электромагнитной волны в виде

$$\Gamma_3 = \Gamma_0 + \epsilon_3, \quad \epsilon_3 \rightarrow 0 \text{ при } \Omega_p \rightarrow 0. \quad (4.14)$$

Пренебрегая в дисперсионном уравнении в силу (4.8) величинами $a_{1,2}$ и ϵ_3 по сравнению с $1 - \Gamma_0$, находим

$$a_{1,2} = \frac{\Omega_p S - \eta}{\sqrt{(1 - \Gamma_0)(1 + \Gamma_0 - 2S\eta)}}; \quad (4.15)$$

$$\epsilon_3 = \frac{\Omega_p^2 S - \Gamma_0 \eta^2}{2(1 - \Gamma_0)(\Gamma_0 - S\eta)}. \quad (4.16)$$

Мы ввели

$$\eta = \sin \alpha, \quad \mu = \cos \alpha. \quad (4.17)$$

Для электромагнитной волны (у которой $l \rightarrow 0$ при $\Omega_p \rightarrow 0$) из (2.21) и (2.22) получаем

$$P - P_0 \quad 3 = \frac{\Omega_p^2 S - \Gamma_0 \eta}{1 - \Gamma_0}; \quad (4.18)$$

$$\Gamma - \Gamma_0 \quad 3 = -\frac{\Omega_p^2 \Gamma_0^2 \eta^2 + \beta^2 \mu^2}{2\Gamma_0(1 - \Gamma_0)^2}. \quad (4.19)$$

Здесь использовано согласно (3.3), (4.1), (4.17)

$$\Gamma_0 = \Gamma_0 \mu + S\eta. \quad (4.20)$$

Для электронных волн при $\Omega_p \rightarrow 0$ из формулы для $l \Gamma$ и (4.15) находим

$$l_{1,2} \rightarrow l_e = \frac{1 - \Gamma_0}{S - \eta}; \quad (4.21)$$

$$P_{1,2} \rightarrow P_e = -S + l_e S - \eta. \quad (4.22)$$

Определяя $l_{1,2} - l_e$ из дисперсионного уравнения (4.5), находим окончательно

$$P - P_e \quad 1,2 = a_{1,2} \frac{2S - \eta}{S - \eta}; \quad (4.23)$$

$$\Gamma - \Gamma_e \quad 1,2 = a_{1,2} \frac{\mu S^2 - K^2 \eta^2}{S - \eta}. \quad (4.24)$$

При выполнении условия (4.9) будем искать решение дисперсионного уравнения (4.5) в виде разложения по степеням α :

$$\Gamma = 1 + a + \alpha v + O \quad \alpha^2. \quad (4.25)$$

Ограничиваясь линейным членом по α и полагая $\delta = 0$, находим

$$a_k = -\left(\frac{\Omega_p \beta}{\sqrt{2}}\right)^{2/3} u_k, \quad u_k = e^{i\frac{2\pi k}{3}}, \quad (4.26)$$

$$k = 1, 2, 3, \quad v = -i\beta/3.$$

С принятой точностью

$$\Gamma - \Gamma_0 \approx \mathbf{a}_k + i\frac{2}{3}\beta\alpha. \quad (4.27)$$

Как будет показано ниже, электронным волнам соответствуют комплексные значения $a_{1,2}$, электромагнитной волне – вещественный корень a_3 .

5. Исследование коэффициента усиления. Рассмотрим вначале случай параллельного пучка. Используя $|1 - \Gamma_0| \ll 1$, приведем дисперсионное уравнение к виду

$$\Gamma - \Gamma_0 - 1 - \Gamma^2 = -\frac{\Omega_p^2 \beta^2}{2}. \quad (5.1)$$

Это кубическое уравнение с вещественными коэффициентами. Выпишем решение этого уравнения в предельных случаях.

Если $|\delta| \ll \Omega_p^{2/3}$, вводя, как и прежде, $a_{1,2} = \Gamma_{1,2} - 1$ для электронных волн и $v_3 = \Gamma_3 - \Gamma_0$ для электромагнитной волны, имеем

$$a_{1,2} = \pm \frac{\Omega_p \beta}{\sqrt{2\delta}}, \quad v_3 = -\frac{\Omega_p^2 \beta^2}{2\delta^2}. \quad (5.2)$$

При $\delta < 0$ $a_{1,2}$ мнимые, v_3 вещественно, т. е. нарастающей является электронная волна. При $\delta > 0$ нет нарастающих решений, т. е. усиление возможно лишь при $v_0 < v_\phi$ $\delta < 0$.

Если $|\delta| \ll \Omega_p^{2/3}$ (резонанс), вводя $a = \Gamma - 1$ имеем для всех трех волн

$$a_k = -\left(\frac{\Omega_p \beta}{\sqrt{2}}\right)^{2/3} u_k, \quad u_k = e^{i\frac{2\pi k}{3}}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.3)$$

В этом случае всегда имеется одно нарастающее решение вне зависимости от знака $v_0 - v_\phi$. Выясним, какой волне оно соответствует. Для этого рассмотрим дискриминант дисперсионного уравнения (5.1):

$$D = C \left(\frac{c}{4} - \frac{\delta^3}{27} \right), \quad (5.4)$$

где $C = \frac{\Omega_p^2 \beta^2}{2}$ всегда положительно.

При

$$\delta < 3\sqrt[3]{\frac{C}{4}} \ll \Omega_p^{2/3}, \quad (5.5)$$

в частности при всех отрицательных δ , $D > 0$ и уравнение (5.1) имеет один вещественный и два комплексно-сопряженных корня, причем согласно (5.2) при достаточно больших отрицательных δ вещественный корень соответствует электромагнитной волне, а комплексные корни – электронным волнам. Отсюда ясно, что в области резонанса ($|\delta| \ll \Omega_p^{2/3}$) вещественный корень также соответствует электромагнитной волне. При

$\delta > 3\sqrt[3]{\frac{C}{4}} \ll \Omega_p^{2/3}$ $D < 0$ и все корни дисперсионного уравнения (5.1) вещественны. Таким образом, электромагнитная волна в параллельном пучке не является нарастающей при любых δ .

При наклонном пучке дисперсионное уравнение является уравнением с комплексными коэффициентами и все три корня его, вообще говоря, комплексны. Для того чтобы определить, какой корень в случае (4.9) соответствует электромагнитной волне, достаточно заметить, что при $\alpha = 0$ он должен быть вещественным. Отсюда получаем, что электромагнитной волне соответствует решение (4.27) с вещественным a_3 .

В то время как мнимая добавка к постоянной распространения электромагнитной волны появляется только при $\alpha \neq 0$, т. е. эффект усиления существенно связан с наклоном пучка к замедляющей системе, для постоянных распространения электронных волн при изменении α характер комплексности не меняется (в области (5.5)). Поэтому в настоящей статье ограничимся выяснением наиболее интересных угловых зависимостей коэффициента усиления электромагнитной волны.

Рассмотрим вначале случай резонанса $\delta = 0$ $\delta \ll \Omega_p^{2/3}$.

а) *Малые углы* $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$

Из (4.27) для мнимой части постоянной распространения электромагнитной волны Λ_3'' имеем

$$\Lambda_3'' = \text{Im } \Gamma - \Gamma_0 \approx \frac{2}{3}\beta\alpha > 0, \quad (5.6)$$

т. е., согласно (4.6) усиление возможно на обратной волне и растет с ростом α . При $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$ формула (5.6) не применима, а при $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$ можно воспользоваться формулой (4.19).

б) Большие углы. $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$

Из (4.19), учитывая (П.2) (см. Приложение), находим мнимую часть постоянной распространения при $|1 - \Gamma_0| \ll \Omega_p^{2/3}$

$$\Lambda_3'' = \frac{\Omega_p^2}{2\Gamma_0} \Gamma_0^2 \eta^2 + \beta^2 \mu^2 Z'' \alpha. \quad (5.7)$$

При $\delta = 0$ согласно (П.2), (П.4), $\Lambda_3'' > 0$ и монотонно убывает с ростом α .

При $\beta = 1$

$$\Lambda_3'' = \frac{\Omega_p^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} > 0. \quad (5.8)$$

Таким образом, в случае резонанса возможно усиление на обратной волне при $\alpha \neq 0$. Сопоставляя случаи $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$ и $\alpha \gg \Omega_p^{2/3}$, видим, что коэффициент усиления проходит через максимум, который лежит в области углов (рис. 2).

$$\alpha \ll \Omega_p^{2/3}. \quad (5.9)$$

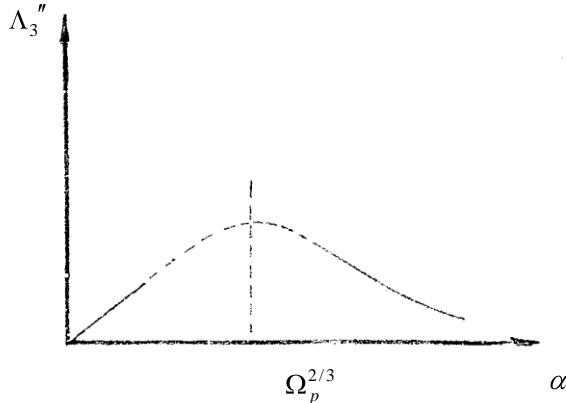


Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления от угла α и в случае резонанса ($\delta = 0$)

Точное определение его положения возможно лишь при численном решении кубического уравнения.

Рассмотрим *нерезонансный* случай ($|\delta| \ll \Omega_p^{2/3}$). Коэффициент усиления определяется приведенной выше формулой (5.7). Его угловая зависимость определяется угловой зависимостью $Z'' \alpha$, исследованной в приложении.

При $\delta < 0$ для всех углов, а также для углов $\alpha > \alpha_0 = \arccos \frac{v_\phi}{v_0} \ll \sqrt{2\delta}$ (в случае

$\delta > 0$) Λ_3'' положительно, что означает возможность усиления на обратной волне. Если $\delta > 0$, то при $0 < \alpha < \alpha_0$ усиление возможно на прямой волне (рис. 3).

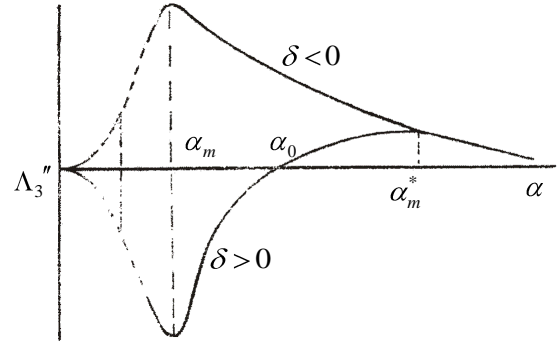


Рис. 3. Зависимость коэффициента усиления от угла α в нерезонансном случае для $\delta > 0$ и $\delta < 0$

В случае $\delta < 0$ коэффициент усиления проходит через максимум в точке

$$\alpha_m = \frac{|\delta|}{\beta\sqrt{3}} \quad (5.10)$$

и достигает значения

$$\Lambda_m'' = -\delta \frac{3\sqrt{3}}{16} \frac{\beta^2 \Omega_p^2}{|\delta|^3}. \quad (5.11)$$

В случае $\delta > 0$ коэффициент усиления имеет два максимума: на прямой волне в точке α_m (Λ_m'' определяется (5.11)) и на обратной волне в точке

$$\alpha_m^* = \sqrt{6\delta} \quad (\text{при } \beta = 1). \quad (5.12)$$

При этом

$$\Lambda_m^{*''} = \frac{\Omega_p^2 \sqrt{6}}{18\sqrt{\delta}}. \quad (5.13)$$

Этот максимум весьма мал по сравнению с (5.11)

$$\Lambda_m^{*''} \ll \delta^{3/2} \Lambda_m''. \quad (5.14)$$

Если $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$, формула (5.8) не может дать правильную угловую зависимость; пользуясь методом возмущений непосредственно в уравнении (4.5), получаем

$$\Lambda_3'' = -\frac{\beta^3 \Omega_p^2}{\delta^3} \alpha. \quad (5.15)$$

Отсюда видно, что Λ_3'' имеет тот же знак, что и в окрестности α_m .

6. Режим генерирования. Режим генерирования будем связывать с временной неустойчивостью стационарного движения, т. е. с появлением нарастающих решений, у которых $\omega'' = \operatorname{Im} \omega > 0$. Дисперсионное уравнение (2.19) рассматриваем теперь как уравнение относительно ω , считая γ фиксированным условиями обратной связи (граничными условиями по z)⁶.

Обозначим через ω_0 собственную частоту «холодной» системы при данном значении

$\gamma = \gamma_0$, а через k_0 и s_0 - соответственно k ω_0 и s ω_0 (см. (2.17), (2.18)). Как и прежде $s' = 0$. Из (2.6), (2.15) и (2.16) выразим γ_ζ через ω и γ :

$$\gamma_\zeta = \frac{\gamma s + k^2 \eta \mu}{\gamma \eta + s \mu}; \quad (6.1)$$

$$\gamma_{\zeta 0} = \gamma_\zeta \omega_0 = \gamma \mu + s_0 \eta. \quad (6.2)$$

Дисперсионное уравнение для холодной системы получаем из (2.19), полагая $l = 0$ и $\omega = \omega_0$

$$k_0^2 - \gamma_{\zeta 0}^2 \mu^2 - s_0 - \gamma_{\zeta 0} \eta^2 = 0. \quad (6.3)$$

Вычитая (6.3) из (2.19), находим

$$\left[k^2 - k_0^2 - \gamma_\zeta^2 - \gamma_{\zeta 0}^2 \right] \mu^2 - \left[(s - \gamma_\zeta \eta)^2 - s_0 - \gamma_{\zeta 0} \eta^2 \right] = -l s - \gamma_\zeta \eta^2. \quad (6.4)$$

Разность $\gamma_\zeta - \gamma_{\zeta 0}$ найдем из (6.1) и (6.2)

$$\gamma_\zeta - \gamma_{\zeta 0} = r \omega - \omega_0, \quad (6.5)$$

где

$$r \omega = \frac{\eta}{\gamma \eta + s_0 \mu} \left[\gamma \eta - s_0 \mu \sigma + \mu q k + k_0 \right]. \quad (6.6)$$

Величины σ ω и q см. в (3.16)-(3.19)

$$r_0 = r \omega_0 = \frac{\eta}{\gamma \eta + s_0 \mu} \left[\gamma \eta - s_0 \mu \sigma_0 + 2 \mu q k_0 \right]. \quad (6.6a)$$

Переходя к безразмерным переменным

$$K = \frac{k}{\gamma_e}, K_0 = \frac{k_0}{\gamma_e}, S = \frac{s}{\gamma_e}, S_0 = \frac{s_0}{\gamma_e} = -i \beta_0, \quad (6.7)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega_0}, \Gamma = \frac{\gamma_\zeta}{\gamma_e}, \Gamma_0 = \frac{\gamma_{\zeta 0}}{\gamma_e},$$

$$R = r \nu_0, \Sigma = \sigma \nu_0,$$

получаем исходное уравнение для частот в виде

$$\Omega - 1 - \Omega - \Omega_0^2 = \Omega_p^2 \Phi \Omega, \quad (6.8)$$

где

$$\Omega_0 = \frac{\Gamma_0 - R}{1 - R}; \quad (6.9)$$

$$\Phi \Omega = \frac{1}{1 - R^2} \frac{K^2 \eta^2 - S^2}{K_0 K + K_0 - \Sigma S + S_0}. \quad (6.10)$$

Это выражение значительно упрощается в важном для нас случае $\Omega = 1$ $\omega = \omega_0$:

$$\Psi \equiv \Phi \cdot 1 - R_0^2 = \frac{\Gamma^2 \eta^2 + \beta_0^2 \mu^2}{2M}. \quad (6.11)$$

Здесь

$$M = K_0^2 - \Sigma_0 S_0 = \frac{\nu_0^2}{\nu_\phi \nu_{\text{гп}}}. \quad (6.12)$$

Выражение для M получаем, используя формулы разд. 3. Знак M совпадает со знаком групповой скорости волны в холодной системе $\nu_{\text{гп}}$. Из (6.11) видно, что Ψ вещественно. Ввиду того, что Γ и β_0 весьма близки к единице, $\Gamma^2 \eta^2 + \beta_0^2 \mu^2$ также близко к единице и практически не зависит от угла. Вследствие этого

$$\Psi \approx \frac{1}{2M}. \quad (6.13)$$

В дальнейшем поступаем так же, как при исследовании усиления. Решение дисперсионного уравнения легко найти в двух предельных случаях, аналогичных (4.8) и (4.9):

$$|\Gamma_0 - 1| \approx \Omega_p^{2/3}; \quad (6.14)$$

$$|\Gamma_0 - 1| \approx \Omega_p^{2/3}. \quad (6.15)$$

(При $\alpha \approx 1$ $\Omega_0 - 1 \approx \Gamma_0 - 1$).

К случаю (6.14) относится резонанс при больших углах ($\delta = 0$, $\alpha \approx \Omega_p^{2/3}$) и нерезонансный случай ($|\delta| \approx \Omega_p^{2/3}$, $\alpha \geq \delta$).

Неравенство (6.15) соответствует резонансу при малых углах ($\delta = 0$, $\alpha \approx \Omega_p^{2/3}$).

При выполнении условия (6.14) ищем решение (6.8) для электромагнитной волны в виде

$$\Omega_3 = 1 + \epsilon_3, \quad (6.16)$$

для электронных волн в виде

$$\Omega_{1,2} = \Omega_0 + a_{1,2}. \quad (6.17)$$

В силу (6.14) и (6.9) имеем

$$a_{1,2} = \frac{\Omega_p \Phi^{1/2} \Omega_0}{\Omega_0 - 1^{1/2}}, \quad \epsilon_3 = \frac{\Omega_p^2 q}{1 - \Gamma_0^2}. \quad (6.18)$$

При выполнении условия (6.15) решение дисперсионного уравнения с точностью до квадратичных членов по α имеет вид

$$a_k = a_k^0 - \frac{2}{3} i \beta \alpha - \frac{\beta^2}{9 a_k^0} \alpha^2; \quad (6.19)$$

$$a_k^0 = \left(\frac{\Omega_p^2 \beta^2}{2M} \right)^{1/3} u_k, \quad (6.20)$$

где

$$u_k = e^{i \frac{2\pi k}{3}} \quad (k = 1, 2, 3).$$

7. Исследование областей генерации.

Рассмотрим вначале случай параллельного пучка и воспользуемся условием $|1 - \Gamma_0| \approx 1$. При этом уравнение (6.8) имеет вид

$$\Omega - 1 - \Omega - \Gamma_0^2 = \frac{\Omega_p^2 \beta^2}{2M}. \quad (7.1)$$

Это уравнение так же, как и (5.1), является кубическим уравнением с вещественными коэффициентами. Выпишем решения (7.1) в предельных случаях.

При $|\delta| \ll \Omega_p^{2/3}$ для электромагнитной волны

$$\omega_3 = -\frac{\Omega_p^2 \beta^2}{2M\delta^2}, \quad (7.2)$$

для электронных волн

$$a_{1,2} = \pm \frac{\Omega_p \beta}{\sqrt{2M\delta}}, \quad (7.3)$$

ω_3 всегда вещественно, а $a_{1,2}$ является мнимым при $M\delta < 0$ и вещественным при $M\delta > 0$. Нарастающие решения при $M\delta < 0$ соответствуют генерации электронных волн⁷. Обычно именно эти нарастающие решения связывают с генерированием в электронных приборах [5, 6, 7].

При $|\delta| \ll \Omega_p^{2/3}$ решения определяются формулой (6.17)

$$a_k^0 = \left(\frac{\Omega_p^2 \beta^2}{2M} \right)^{1/3} e^{i \frac{2\pi k}{3}} \quad (k=1,2,3)$$

и одно из них является нарастающим. Исследование кубического уравнения (аналогично проведенному в § 4) позволяет утверждать, что при $\alpha = 0$ нарастающими могут быть лишь электронные волны, а электромагнитная волна всегда стационарна. Нарастающая электронная волна имеется при $M\delta < 0$ (для произвольных δ) и

при $M\delta > 0$ для $\delta < \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\Omega_p^2 \beta^2}{M}}$.

При наклоне пучка возможно нарастание и электромагнитной волны, что представляет наибольший интерес. Действительно, электронные волны имеют всегда положительную групповую скорость независимо от дисперсии замедляющей системы. Работа генераторов с обратной волной, в том числе и клинотрона, может происходить лишь на электромагнитной волне с отрицательной групповой скоростью. Имеются также основания предполагать особую роль возбуждения электромагнитной волны и в генераторах на прямой волне.

Рассмотрим случай резонанса ($\delta = 0$).

а) *Малые углы* $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$.

Из (6.16) для мнимой добавки к частоте электромагнитной волны Ω_3'' имеем

$$\Omega_3'' = \text{Im } \Omega_3 - 1 = -\frac{2}{3} \beta \alpha < 0, \quad (7.4)$$

т. е. при очень малых углах в резонансе возмуще-

ния затухают и генерация невозможна (при обоих знаках дисперсии).

б) *Большие углы* $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$.

Из (6.14), учитывая (П.2), находим при $|1 - \Gamma_0| \ll \Omega_p^{2/3}$:

$$\Omega_3'' = \frac{\Omega_p^2}{2M} \Gamma^2 \eta^2 + \beta^2 \mu^2 Z'' \alpha. \quad (7.5)$$

Из этой формулы при $\delta = 0$ согласно (П.2), (П.4) видно, что при больших α генерация возможна на обратной волне ($M < 0$) и, согласно (1.2), генерируемая мощность убывает с ростом α . Особенно простой вид (7.5) принимает при $\beta = 1$

$$\Omega_3'' = -\frac{\Omega_p^2}{4M} \text{ctg } \frac{\alpha}{2}. \quad (7.6)$$

Таким образом, в случае резонанса (рис. 4) при очень малых углах $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$ генерация невозможна и возникает при некотором $\alpha_{кр} \ll \Omega_p^{2/3}$. При некотором $\alpha_m > \alpha_{кр}$ (α_m также порядка $\Omega_p^{2/3}$) имеется максимум Ω_3'' , так как при больших углах Ω_3'' уже убывает с ростом угла, согласно (7.6). Точное определение $\alpha_{кр}$ и α_m возможно лишь при численном решении уравнения (6.8) в области $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$.

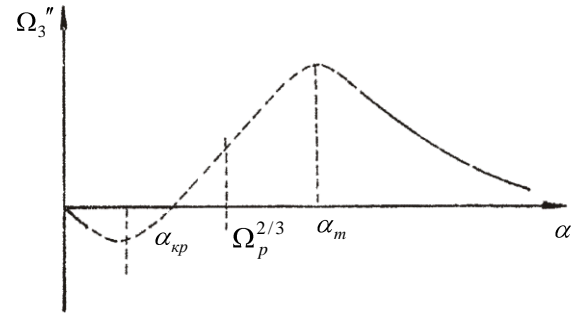


Рис. 4. Зависимость генерируемой мощности от угла α в случае резонанса угла, согласно (7.6)

Рассмотрим нерезонансный случай $\delta \ll \Omega_p^{2/3}$. Мнимая добавка к частоте определяется приведенной выше формулой (7.5), откуда видно, что генерация возможна (рис. 5), если

$$\Gamma \mu - 1 M > 0, \quad (7.7)$$

т. е.

1) если $v_{гр} < 0$ (на обратной волне):

а) при всех углах для $v_0 < v_\phi$,

б) при $\alpha > \alpha_0 = \arccos \frac{v_\phi}{v_0}$ для $v_0 > v_\phi$;

2) если $v_{гр} > 0$ (прямая волна), при $\alpha < \alpha_0$ для $v_0 > v_\phi$.

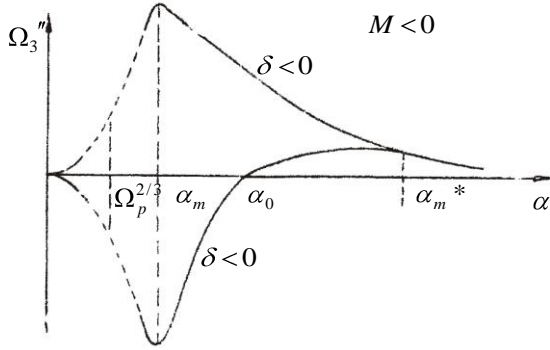


Рис. 5. Области генерации на обратной волне в нерезонансном случае. При $M > 0$ (прямая волна) график является зеркальным отображением приведенного

При $\alpha \ll 1$ в точке

$$\alpha_m = \frac{|\delta|}{\beta\sqrt{3}} \quad (7.8)$$

мнимая добавка к частоте максимальна и равна

$$\Omega_m'' = \frac{3\sqrt{3} \Omega_p^2 \beta^2 \delta}{16 |\delta|^3 M}. \quad (7.9)$$

В точке

$$\alpha_m^* = \sqrt{6\delta} \quad (\text{при } \beta=1) \quad (7.10)$$

при $\delta > 0$ также имеется экстремум, малый по сравнению с Ω_m'' . Его величина

$$\Omega_m''^* = -\frac{\sqrt{6}\Omega_p^2}{18 M \sqrt{\delta}}. \quad (7.10')$$

Из (7.9) и (7.11)имеем (аналогично (5.4))

$$\Omega_m''^* \ll \delta^{3/2} \Omega_m''.$$

Если $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$, формула (7.5) не дает правильной угловой зависимости. Пользуясь методом возмущений, непосредственно из уравнения (6.8) получаем

$$\Omega_3'' = 2\beta \frac{v_3}{\delta} \alpha, \quad (7.11)$$

где v_3 определяется формулой (7.2). Генерация в этом случае возможна при $M\delta > 0$.

В заключение исследуем изменение генерируемой частоты $\Omega_3' - 1 = \Delta\Omega_3'$ в зависимости от α .

В случае резонанса при малых углах ($\delta=0$, $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$) из (6.19) видно, что $\Delta\Omega_3'$

имеет тот же знак, что и M , а производная $\frac{d}{d\alpha} \Delta\Omega_3'$ при $\alpha=0$ имеет обратный знак.

Для больших углов из (6.14), учитывая (П.1), находим смещение частоты $\Delta\Omega_3'$ при $|1-\Gamma_0| \ll \Omega_p^{2/3}$:

$$\Delta\Omega_3' = \frac{\Omega_p^2}{2M} \Gamma^2 \eta^2 + \beta^2 \mu^2 Z' \alpha. \quad (7.12)$$

При $\delta=0$ и $\beta=1$ согласно (П.3) из формулы (7.12) следует

$$\Delta\Omega_3' = -\frac{\Omega_p^2 \cos \alpha}{4M (1 - \cos \alpha)}, \quad (7.13)$$

т. е. $\Delta\Omega_3'$ убывает с ростом α , при этом знак $\Delta\Omega_3'$ противоположен знаку M (рис. 6). В области углов $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$, где генерируемая мощность достигает максимального значения, ход функции $\Delta\Omega_3'(\alpha)$ может быть получен лишь при точном решении дисперсионного уравнения. В этой области $\Delta\Omega_3'(\alpha)$ имеет по крайней мере один корень и одно экстремальное значение.

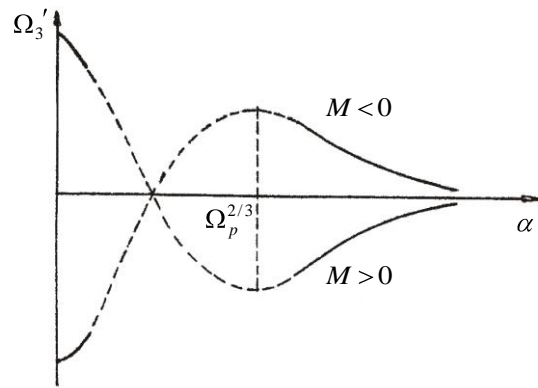


Рис. 6. Изменение генерируемой частоты в зависимости от угла α в случае резонанса для прямой и обратной волны

Рассмотрим нерезонансный случай $|\delta| \ll \Omega_p^{2/3}$. При этом $\Delta\Omega_3'$ определяется формулой (7.12). Если $\alpha \ll \delta$ и $\beta=1$, зависимость $\Delta\Omega_3'$ от α описывается (7.13). При $\alpha \ll \delta \ll 1$ (7.12) приводится к виду

$$\Delta\Omega_3' = \frac{\Omega_p^2 \beta^2 \delta^2 - \beta^2 \alpha^2}{2M (\delta^2 + \beta^2 \alpha^2)}. \quad (7.14)$$

Отсюда видно, что $\Delta\Omega_3'$ обращается в

нуль (рис. 7) в точке

$$\alpha = \frac{|\delta|}{\beta}, \quad (7.15)$$

а в точке

$$\alpha = \sqrt{3} \frac{|\delta|}{\beta} \quad (7.16)$$

достигает экстремального значения

$$\Delta\Omega_3' = -\frac{\Omega_p^2}{16M} \frac{\beta^2}{\delta^2}. \quad (7.17)$$

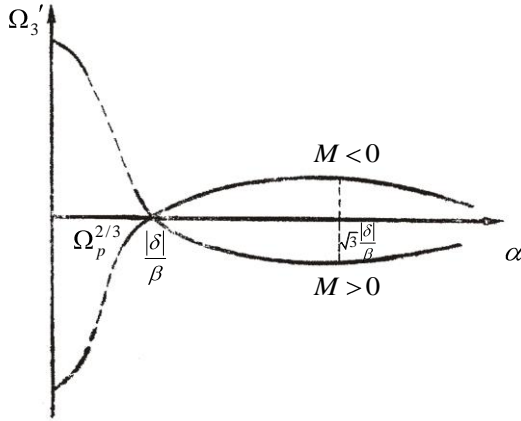


Рис. 7. Изменение генерируемой частоты в зависимости от угла α в резонансном случае для прямой и обратной волны

При $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$ уравнение (7.12) не дает правильной угловой зависимости и поправку к Ω_3' находим непосредственно из дисперсионного уравнения

$$\Delta\Omega_3' = \epsilon_3 - \frac{3\beta^2}{\delta^2} \epsilon_3 \alpha^2 \quad (7.18)$$

(ϵ_3 находим по (7.2)).

В области $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$ для выяснения точного хода кривой необходимо численное решение дисперсионного уравнения.

8. Заключение. 1. В работе предложена замена граничных условий на поверхности замедляющей системы эффективным импедансом. (Впервые подобная замена использовалась в работе Макфарлена и Вудворт [8]). Это позволяет значительно упростить задачу и вместе с тем решать ее в рамках электродинамики, учитывая все существенные свойства замедляющей системы, которые определяют взаимодействие пучка с полем: замедление, дисперсию и поверхностный характер замедленной волны. При этом не учитываются «нерезонансные» собственные волны реальной замедляющей системы. Учет этих волн для параллельного пучка дан в работе [9].

2. При взаимодействии пучка с полем

возникают две «электронные» и одна «электромагнитная» волна. В работе выясняется особая роль электромагнитной волны в генераторах с обратной волной, так как в отличие от электронных волн только эта волна имеет отрицательную групповую скорость.

3. В настоящей статье в линейном приближении построена теория усилителя и генератора, использующего взаимодействие наклонного электронного пучка с поверхностной волной (теория клинотрона). Получены угловые зависимости коэффициента усиления, генерируемой мощности и смещения частоты при генерировании. Величина генерируемой мощности найдена с точностью до независимого от угла множителя, который может быть определен лишь из нелинейной теории.

4. В случае параллельного пучка согласно предложенной линейной теории усиление и генерация на обратной волне отсутствуют и появляются лишь при наклоне пучка, достигая максимума при углах порядка $\Omega_p^{2/3}$. Заметим, однако, что наличие нарастающих электронных волн в силу нелинейности должно приводить к возникновению электромагнитных волн. Объяснение работы генератора на обратной волне с параллельным пучком, по-видимому, требует учета этого эффекта.

5. Генерация в приборах, использующих электронные пучки, иногда связывается с эффектом Черенкова [5]. Основанием к этому служит условие генерации электронных волн в виде $u_0 > v_\phi$. Этот знак неравенства связан, однако, с положительностью квадрата поперечного волнового числа k_\perp^2 . В случае поверхностной волны $k_\perp^2 < 0$ и имеет место обратное неравенство. Более того, в зависимости от знака дисперсии генерирование возможно как при $u_0 > v_\phi$, так и при $u_0 < v_\phi$, что противоречит в нашем случае упомянутой выше аналогии с эффектом Черенкова.

6. Предложенная теория объясняет наличие клинотронного эффекта в генераторах с обратной волной. Используемый в статье подход пригоден также для анализа работы других приборов, в которых электронный пучок взаимодействует с поверхностной электромагнитной волной.

7. Количественное сравнение с экспериментом требует численного решения дисперсионного уравнения при углах порядка $\Omega_p^{2/3}$ и в настоящей статье не проводится.

В заключение выражаем благодарность П. В. Блюху, В. Л. Герману, А. М. Глуцкоу и Э. А. Канеру за полезные дискуссии.

Приложение. Рассмотрим величину

$$Z = \frac{1}{1 - \Gamma_0^2},$$

которая определяет комплексность и существенную угловую зависимость корней дисперсионного уравнения. В выражениях для корней имеется еще множитель $\Gamma_0^2 \eta^2 + \beta^2 \mu^2$, однако для β и Γ_0 , близких к 1, это выражение также близко к единице при всех углах

$$Z' = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \Gamma_0^2} = \frac{1 - \Gamma_0 \mu^2 - \beta^2 \eta^2}{[1 - \Gamma_0 \mu^2 + \beta^2 \eta^2]^2}; \quad (\text{П.1})$$

$$Z'' = \operatorname{Im} \frac{1}{1 - \Gamma_0^2} = \frac{2\beta\eta \Gamma_0 \mu - 1}{[1 - \Gamma_0 \mu^2 + \beta^2 \eta^2]^2}. \quad (\text{П.2})$$

При $\alpha \ll \delta$ характер зависимости Z от угла легко выяснить, полагая $\Gamma_0 = \beta = 1$:

$$Z' = -\frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad (\text{П.3})$$

$$Z'' = -\frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (\text{П.4})$$

Отсюда видно, что Z' , Z'' отрицательны и монотонно убывают с ростом α .

При $\alpha = 0$ $Z' > 0$, при $\alpha = \frac{|\delta|}{\beta}$ Z' меняет знак и при больших α $Z' < 0$ в соответствии с (П.3).

При $\alpha = 0$ $Z'' = 0$, для малых α $\alpha \ll \delta$

$$Z'' = \frac{2\beta\alpha\delta}{[\delta^2 + \beta^2\alpha^2]^2}. \quad (\text{П.5})$$

Эта величина имеет экстремум при

$$\alpha_m = \frac{|\delta|}{\beta\sqrt{3}}. \quad (\text{П.6})$$

При $\delta < 0$, как видно из (П.2), $Z'' < 0$ для всех углов. При $\delta > 0$ для

$\alpha < \alpha_0 = \arccos \frac{v_\phi}{v_0} \ll \sqrt{2\delta}$ $Z'' > 0$, для $\alpha > \alpha_0$

$Z'' < 0$ и проходит через минимум в точке

$$\alpha_m^* = \sqrt{6\delta} \quad \beta = 1. \quad (\text{П.7})$$

Примечания:

¹ Рассмотрение потерь наклонного электронного пучка в поле заданной электромагнитной волны проведено Тагером и Победоносцевым в работе [2].

² Заметим, что если период замедляющей системы мал по сравнению с длиной волны, то точные граничные условия для полей, усреднен-

ных по периоду замедляющей системы, приводят к некоторому эффективному импедансу.

³ Из уравнений гидродинамики следует, что поперечные переменные компоненты скорости v_y и v_x являются по отношению к продольной переменной составляющей v_z малыми порядка ω/ω_L , $(\omega/\omega_L)^2$ соответственно $\left(\omega_L = \frac{eH_0}{mc}\right)$ и стремятся к нулю при $H_0 \rightarrow \infty$.

⁴ В дальнейшем будет рассматриваться замедляющая система без потерь, что позволяет использовать (3.11) вместо более сложных выражений.

⁵ В дальнейшем нас будет интересовать область сравнительно небольших углов $\alpha \ll 1$. Термины «большие» и «малые» углы соответствуют случаям $1 \ll \alpha \ll \Omega_p^{2/3}$, $\alpha \ll \Omega_p^{2/3}$. Под «резонансом» мы понимаем совпадение фазовой скорости волны и скорости пучка при $\alpha = 0$, т. е. $\delta = 0$.

⁶ В отличие от усилителя в генераторе частота ω и волновой вектор γ связаны не только дисперсионным уравнением $D(\omega, \gamma, \omega_p) = 0$, следующим из однородных граничных условий на входе и выходе замедляющей системы и учитывающим конечность прибора. Это уравнение, вообще говоря, имеет вид $F(\omega, \gamma, \omega_p) = 0$. Спектр возможных значений ω , и γ должен определяться из совместного решения этих двух уравнений при фиксированном ω_p . Вывод последнего уравнения, как правило, связан с большими математическими трудностями, которые в нашем случае не удалось преодолеть.

В дальнейшем для простоты мы примем, что граничные условия приводят к уравнению $F(\gamma) = 0$, т. е. определяют спектр значений γ . Это допущение позволяет при решении дисперсионного уравнения считать γ фиксированным. При этом величина γ находится по экспериментальным данным из дисперсионной кривой.

⁷ Заметим, что в отличие от обычно указанного условия генерации $v_0 > v_\phi$ (при $v_{\text{тр}} > 0$ [5], что часто связывают с эффектом Черенкова) в рассматриваемом случае, вследствие поверхностного характера волны (чисто мнимое поперечное волновое число), в качестве условия генерации имеет место обратное неравенство $v_0 < v_\phi$ (при $v_{\text{тр}} > 0$).

1. Левин Г. Я. Авторское свидетельство от 26.XI.1956 г. Усиков А. Я., Левин Г. Я., Герман В. Л., Лысов Г. В., Бородкин А. И., Кириченко А. Я. Научно-технический отчет по теме «Боксит».

- Усиков А. Я., Лысов Г. В., Левин Г. Я., Кириченко А. Я., Бородин А. И. Труды ИРЭ АН УССР, 5, 62, 1958.
Левин Г. Я., Кириченко А. Я., Бородин А. И., Лысов Г. В. Труды ИРЭ АН УССР, 5, 67, 1958.
Бородин А. И., Кириченко А. Я., Левин Г. Я., Лысов Г. В. Труды ИРЭ АН УССР, 5, 194, 1958.
Бородин А. И., Кириченко А. Я., Кутовая Л. А., Левин Г. Я., Лысов Г. В., Усиков А. Я., Чурилова С. А. Труды ИРЭ АН УССР, наст. вып.
2. Победоносцев А. С., Тагер А. С. Электроника № 28, 1958.
 3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. «Советское радио», 1958.
 4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1959, стр. 129-130.
 5. Ахизер А. И., Файнберг Я. Б. УФН 44, 346, 1950.
 6. Пирс Д. Лампа с бегущей волной. «Советское радио», 1952.
 7. Hutter R. G. E. Advances in electronics and electron physics, v. VI, 370 1954.
 8. Macfarlane G. G., Woodward A. M. Proc. IEE, III, 97, 322, 1950.
 9. Вайнштейн Л. А. ЖТФ, 26, 126, 141, 1956.

Рукопись поступила 4 июня 1959 г.

КОММЕНТАРИИ АВТРОВ К СТАТЬЕ

В работе удалось получить угловую зависимость (клиноотронный эффект) аналитически. Основная идея - описание поверхностного характера электромагнитной замедленной волны с помощью реактивного поверхностного импеданса, "произвольным" образом зависящего от частоты (дальнейшее обсуждение см. также в [1]), успеш-

но использовалась затем в работах по магнетронным генераторам [2].

В последующей заметке авторов [3], написанной в связи с вопросами Л. А. Вайнштейна, показано, что для последовательного описания обратной волны в одноволновом приближении в рамках используемого подхода достаточно рассматривать зависимость импеданса также и от продольного волнового числа. В данной статье это сводится к некоторым переобозначениям, не влияющим на результат.

Заметим, что идея импеданса с "произвольной" зависимостью от частоты навееяна как граничными условиями М. А. Леонтовича, так и "произвольным" законом дисперсии электронов в металлах, широко обсуждавшимися в работах школы И. М. Лифшица.

1. Конторович В. М. О волнах в наклонном пучке, заполняющем полупространство над замедляющей системой // Тр. Ин-та радиофизики и электрон. АН УССР. - Харьков. - 1962. - 10. - С.143-151.
2. Малеев В. Я. Взаимодействие электронных пучков с поверхностной волной в приборах М-типа // Тр. Ин-та радиофизики и электрон. АН УССР. - Харьков. - 1962. - 10. - С.152-157.
3. Конторович В. М., Малеев В. Я. Об устойчивости наклонного пучка импедансной плоскостью // Тр. Ин-та радиофизики и электрон. АН УССР. - Харьков. - 1961. - 9. - С.217-221.

Рукопись поступила 9 февраля 2007 г.