

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

УДК 621.396:681.34

## АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ ОЦЕНИВАНИЯ НОРМИРОВАННОЙ БИСПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

А. В. Тоцкий, П. А. Молчанов

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»,  
61070, Харьков, ул. Чкалова 17, Украина  
E-mail: totskiy@xai.edu.ua*

Рассмотрена задача анализа точности восстановления сигналов неизвестной формы методом оценивания аргумента биспектральной (БП) плотности и методом оценивания нормированной биспектральной плотности. Приведены результаты статистического моделирования, демонстрирующие возможность улучшения точности восстановления формы сигналов с использованием гладких функций - оценок нормированной биспектральной плотности, вычисляемых в присутствии аддитивных белого гауссова и импульсного шумов. Ил. 6. Библиогр.: 11 назв.

**Ключевые слова:** оценка биспектральной плотности, амплитудный биспектр, фазовый биспектр.

Оценивание БП широко используют в цифровой обработке сигналов при решении задач обнаружения и восстановления негауссовых сигналов неизвестной формы, наблюдаемых в аддитивном гауссовом шуме в системах радиолокации [1-4], астрономии [5], устройствах измерения и анализа биомедицинских сигналов [6], а также во многих других приложениях [7].

БП - статистика третьего порядка - содержит информацию об исследуемом процессе, которая не может быть получена традиционными методами оценивания статистики второго порядка - спектральной плотности мощности (СПМ). СПМ обеспечивает полное статистическое описание процесса только в случае нормального закона распределения наблюдаемого процесса. Оценка БП позволяет извлечь следующую дополнительную информацию: отличие от нормального закона распределения, наличие фазовых связей между частотными компонентами и присутствие нелинейных свойств. Данная информация не может быть получена из оценки СПМ.

К достоинствам метода биспектрального оценивания относится высокая помехоустойчивость по отношению к аддитивному шуму с симметричной функцией плотности вероятности, а также инвариантность к пространственно-временным сдвигам сигнала. Отмеченные особенности биспектрального оценивания успешно используют для решения задач обнаружения и восстановления сигналов в условиях априорной неопределенности относительно параметров сигнальной составляющей и характеристик помехи [1-7].

При восстановлении сигналов неизвестной формы широкое распространение получили методы, которые объединяются общей идеей восстановления фазового спектра фурье-сигнала по результатам оценивания аргумента фазового биспектра с помощью традиционной процедуры вы-

числения функции арктангенс отношения мнимой и вещественной части оценки БП [5-7]. Недостатком такого подхода являются характерные систематические ошибки при восстановлении формы сигнала, которые вызваны так называемыми в фазовых измерениях «заворотами» (или «перескоками») фазы оценки фурье-спектра сигнала.

Результативность процедуры «разворота» фазы, предложенная в работах [8, 9], возможна только в случае наличия достаточной априорной информации о параметрах сигнала, и такая процедура эффективна только при высоких отношениях сигнал/шум, что далеко не всегда имеет место в отмеченных выше практических приложениях.

В статье [10] изложен подход, основанный на использовании при восстановлении сигналов гладких функций синус и косинус аргумента биспектра вместо традиционно используемой в фазовых измерениях функции арктангенс отношения мнимой и вещественной части БП. Основное отличие предложенного в работе [10] подхода от известных заключается в отказе от непосредственного измерения фазового биспектра, потому что данная фазовая информация сама по себе не представляет интереса в задаче восстановления сигнала. Следовательно, отпадает необходимость в традиционной процедуре измерения фазового биспектра, поскольку эти измерения можно успешно заменить измерениями комплексной функции - нормированного биспектра. Использование нормированного биспектра в задаче восстановления сигналов позволяет исключить проблему «заворотов» фазы и, следовательно, дает возможность существенно уменьшить искажения формы восстановленных сигналов.

Необходимо, однако, отметить, что проблема уменьшения искажения формы восстановленных сигналов была рассмотрена в работе [10] только в детерминистской постановке, присутствие шумов в измерительной системе не рассматривалось.

Поэтому исследование помехоустойчивости метода [10] представляет практический интерес для систем восстановления сигналов, работающих в условиях воздействия помех разного рода. Настоящая статья посвящена анализу точности восстановления сигналов с использованием оценки нормированного биспектра, измеряемой в присутствии аддитивных помех.

**1. Восстановление сигнала методом оценивания БП.** Предположим, что на вход цифровой измерительной системы поступает  $M$  независимых реализаций  $x^{(m)}(i)$  случайного дискретного процесса ( $m=1, 2, \dots, M$ ;  $i=1, 2, \dots, I$ ). Зарегистрированный в течение длительного интервала наблюдения процесс разбивают на  $M$  кратковременных сегментов-реализаций. Произвольная  $m$ -я реализация  $x^{(m)}(i)$  наблюдается в виде последовательности временных вещественных отсчетов

$$x^{(m)}(i) = s(i - \tau^{(m)}) + n^{(m)}(i), \quad (1)$$

где  $s(i)$  - сигнал неизвестной формы, которая подлежит оценке;  $\tau^{(m)}$  - целочисленный случайный сдвиг сигнала;  $n^{(m)}(i)$  -  $m$ -я реализация гауссова шума с нулевым средним значением и неизвестной выборочной дисперсией  $\sigma^{2(m)}$ . Неизвестная форма сигнала полагается неизменной для всей наблюдаемой выборки из  $M$  реализаций, и БП сигнала  $s(i)$  полагается отличной от нуля.

Отметим, что уравнение наблюдения (1) типично для ряда практических приложений. В частности, в радиолокационных системах оценивания дальностного профиля воздушной цели [2, 4, 11] параметр сдвига  $\tau^{(m)}$  вызван маневрами воздушной цели, и эта величина может меняться случайным образом по неизвестному закону от одного строка дальности к другому.

Задача заключается в оценке неизвестной формы сигнала по ограниченной выборке наблюдений  $M(1)$  в присутствии шума. В соответствии с прямым методом биспектрального анализа [7] оценку БП  $\hat{B}_x(p, q)$  процесса (1) представим в виде следующей комплексной функции двух частотных отсчетов  $p$  и  $q$ :

$$\begin{aligned} \hat{B}_x(p, q) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{B}_x^{(m)}(p, q) = \\ &= \hat{B}_x^{\text{Re}}(p, q) + j \hat{B}_x^{\text{Im}}(p, q) = \\ &= \left| \hat{B}_x(p, q) \right| e^{j \hat{\beta}_x(p, q)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\hat{B}_x^{(m)}(p, q) = X^{(m)}(p)X^{(m)}(q)X^{(m)*}(p+q)$  - выборочная оценка БП, вычисляемая для произвольной  $m$ -й реализации наблюдаемого процесса (1);  $X^{(m)}(p) = |X^{(m)}(p)| e^{j\phi^{(m)}(p)}$  - преобразование Фурье  $m$ -й реализации;

$$\begin{aligned} \left| \hat{B}_x(p, q) \right| &= \sqrt{(\hat{B}_x^{\text{Re}}(p, q))^2 + (\hat{B}_x^{\text{Im}}(p, q))^2} \quad \text{и} \\ \hat{\beta}_x(p, q) &= \arctg \frac{\hat{B}_x^{\text{Im}}(p, q)}{\hat{B}_x^{\text{Re}}(p, q)} \quad \text{- оценки} \end{aligned}$$

амплитудного биспектра (оценка биамплитуды) и фазового биспектра (оценка бифазы) соответственно;  $p, q=1, 2, \dots, I$  - индексы независимых частотных отсчетов; символ \* означает комплексное сопряжение. Отметим, что оценка бифазы в выражении (2) ограничена пределами изменения главного значения функции арктангенс, т. е.

$$\hat{\beta}_x(p, q) \in [-\pi, \pi].$$

Широкое практическое распространение при решении задач оценивания формы сигналов, наблюдаемых в аддитивном шуме, получил непараметрический метод (метод BLW), впервые предложенный авторами работы [5]. Данный метод заключается в восстановлении оценки спектра Фурье сигнала по комплексной оценке БП наблюдения на входе измерительной системы.

Согласно методу BLW [5] оценки амплитудного  $|\hat{X}(p+q)|$  и фазового  $\hat{\phi}(p+q)$  спектров Фурье наблюдения (1) рассчитывают с помощью рекурсивного решения системы уравнений вида:

$$|\hat{X}(p+q)| = \hat{B}_x(p, q) / (|\hat{X}(p)| |\hat{X}(q)|), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(p+q) &= \hat{\phi}(p) + \hat{\phi}(q) - \\ &- \arctg[\hat{B}_x^{\text{Im}}(p, q) / \hat{B}_x^{\text{Re}}(p, q)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что алгоритм (3) восстановления оценки амплитудного фурье-спектра не вносит искажений, а вычислительная процедура (4) сопряжена с методическими искажениями, которые вызваны выше отмеченными «заворотами», «перескоками» или « $\pi$ -скачками» фазы. Скорость изменения функции  $\hat{\beta}_x(p, q)$  (количество « $\pi$ -скачков») зависит от формы и длительности восстанавливаемого сигнала  $s(i)$ . Из-за того, что поведение бифазы  $\hat{\beta}_x(p, q)$  сопровождается характерными « $\pi$ -скачками», при восстановлении оценки фазового спектра Фурье  $\hat{\phi}(p+q)$  согласно (4) возникает фазовая неопределенность.

Для фиксированного шага дискретизации на бичастотной плоскости  $(p, q)$ , равного  $\Delta p = \Delta q = 1/I$ , ошибки дискретизации разрывной функции бифазы зависят от закона изменения данной функции, который априорно неизвестен. Следовательно, при фиксированном шаге дискретизации, который на практике выбирают, ориентируясь на максимальную неизвестную частоту Найквиста, в оценке восстанавливаемого фазового спектра Фурье (4) возникают искажения.

Результаты исследования методических ошибок, сопряженных с фазовыми измерениями, подробно изложенные в работе [10], показывают, что при восстановлении цифровых сигналов прямоугольной формы величина ошибки восстановления формы сигнала растет с увеличением длительности сигнала.

Настоящая статья посвящена развитию подхода, предложенного в [10]. Цель данной работы заключается в исследовании помехоустойчивости метода [10].

Основная идея предлагаемого подхода заключается, во-первых, в замене расчета разрывной функции бифазы  $\beta_x(p, q)$  на расчет гладких функций  $\cos \beta_x(p, q)$  и  $\sin \beta_x(p, q)$  и, во-вторых, в восстановлении функций  $\sin \hat{\varphi}(p+q)$  и  $\cos \hat{\varphi}(p+q)$  вместо традиционного восстановления функций  $\hat{\varphi}(p+q)$  в методе BLW (4).

Предлагаемый метод основан на оценке нормированной БП наблюдения (1) вида

$$\frac{B_x(p, q)}{|B_x(p, q)|} = \cos \beta_x(p, q) + \sin \beta_x(p, q). \quad (5)$$

Алгоритм восстановления оценок квадратурных компонент фазового фурье-спектра сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \cos \hat{\varphi}(p+q) &= \\ &= \cos [\hat{\varphi}(p) + \hat{\varphi}(q)] \cos \beta_x(p, q) + \\ &+ \sin [\hat{\varphi}(p) + \hat{\varphi}(q)] \sin \beta_x(p, q); \end{aligned} \quad (6, a)$$

$$\begin{aligned} \sin \hat{\varphi}(p+q) &= \\ &= \sin [\hat{\varphi}(p) + \hat{\varphi}(q)] \cos \beta_x(p, q) - \\ &- \cos [\hat{\varphi}(p) + \hat{\varphi}(q)] \sin \beta_x(p, q). \end{aligned} \quad (6, б)$$

Для количественной оценки показателей предлагаемого алгоритма (6,а) (6,б) и алгоритма BLW (3), (4) восстановления оценки спектра Фурье сигнала по оценкам нормированной (5) и ненормированной БП (2) соответственно нами вычислялись следующие величины:

1) выборочная дисперсия флуктуаций  $\bar{\sigma}_{inp}^2$  и отношение сигнал/шум  $SNR_{inp}$  на входе системы восстановления сигналов

$$\bar{\sigma}_{inp}^2 = \left\langle \frac{1}{I-1} \sum_{i=0}^{I-1} [x^{(m)}(i) - s(i)]^2 \right\rangle_M; \quad (7)$$

$$SNR_{inp} = P_s / \bar{\sigma}_{inp}^2, \quad (8)$$

где  $\langle \dots \rangle_M$  означает усреднение по ансамблю реализаций  $M$ ,  $P_s = 1/I \sum_{i=0}^{I-1} [s(i) - m_s]^2$  - мощность сигнала  $s(i)$  и  $m_s = 1/I \sum_{i=0}^{I-1} s(i)$ ;

2) выборочная дисперсия флуктуаций  $\bar{\sigma}_{out}^2$  на выходе системы восстановления сигнала

$$\bar{\sigma}_{out}^2 = 1/K \sum_{k=1}^K \sigma_{out k}^2, \quad (9)$$

где

$$\sigma_{out k}^2 = \min_t \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} [(\hat{s}_k(i) - s(i-t)) - \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} (\hat{s}_k(i) - s(i-t))]^2,$$

$\hat{s}_k(i)$  - оценка восстановленного сигнала, полученная в  $k$ -м эксперименте ( $k=1, 2, \dots, K$ );  $K$  - количество повторений эксперимента, необходимое для получения достоверной оценки;  $t$  - индекс ( $t=0, 1, \dots, I-1$ ), который введен с учетом влияния известной инвариантности БП к сдвигу сигнала [7];

3) отношение сигнал/шум  $\overline{SNR}_{out}$  на выходе

$$\overline{SNR}_{out} = P_s / \bar{\sigma}_{out}^2; \quad (10)$$

4) критерий  $\varepsilon$ , который показывает улучшение отношения сигнал/шум на выходе по сравнению со входом системы восстановления сигнала

$$\varepsilon = \overline{SNR}_{out} / \overline{SNR}_{inp}. \quad (11)$$

**2. Анализ результатов статистического моделирования.** Для сравнения качества восстановления формы сигнала известным методом BLW с предлагаемым методом рассмотрим пример тестового сигнала  $s(i)$  ( $i=1, 2, \dots, 256$ ), заданного в виде двух импульсов прямоугольной формы и разной амплитуды. Положение импульсов на временной оси менялось случайно от одной  $m$ -й наблюдаемой реализации к другой ( $m=1, 2, \dots, 200$ ) с девиацией случайного сдвига равной  $\tau^{(m)}=40$  отсчетов. Данная модель тестового сигнала хорошо согласуется с моделью радиолокационного дальностного портрета воздушной цели [11]. При статистическом моделировании исследовалось воздействие помех двух типов: аддитивный белый гаус-

сов шум (АБГШ) с дисперсией  $\bar{\sigma}_{inp}^2$ ; смесь АБГШ и импульсного шума. Компонента импульсного шума генерировалась с заданными амплитудами и вероятностями положительных импульсов (использовалась модель импульсного шума «соль и перец»). Амплитуды положительных импульсов выбирались равными  $A_{pos}=2$ , а вероятность их появления определялась величиной  $P$ .

Для исследования показателей системы восстановления сигналов длительность импульсов изменялась в широких пределах: она варьировалась в пределах от 3 до 35 отсчетов. На рис. 1, 2 представлены примеры восстановления сигналов разной длительности в присутствии АБГШ ( $\sigma_{inp}^2=0,3$ ).

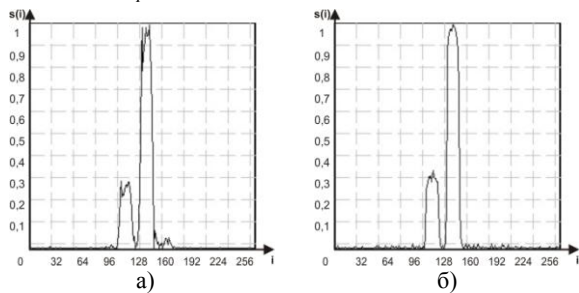


Рис. 1. Пример восстановления сигналов (длительность импульсов равна 15 отсчетам): а) метод BLW,  $\varepsilon = 2,63$ ; б) предлагаемый метод,  $\varepsilon = 4,99$

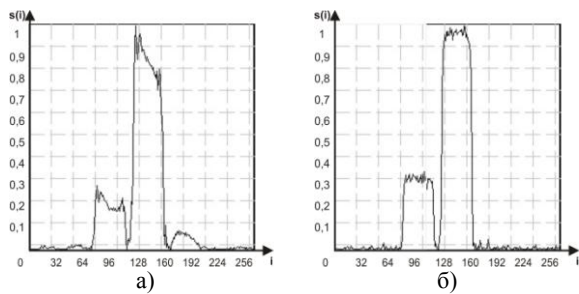


Рис. 2. Пример восстановления сигналов (длительность импульсов равна 35 отсчетам): а) метод BLW,  $\varepsilon = 1,26$ ; б) предлагаемый метод,  $\varepsilon = 3,91$

Из сравнения результатов восстановления сигналов на рис. 1 и 2 отчетливо видно, что прямоугольная форма исходного сигнала на рис. 1,а и 2,а искажена вследствие выше отмеченных фазовых искажений. Уровень искажений растет с увеличением длительности сигнальных импульсов, так как количество «*л*-скачков» фазы возрастает с увеличением длительности импульсов. В то же время предлагаемый метод, в котором для восстановления сигналов использованы гладкие функции синус и косинус вида (6), сохраняет форму сигнала, обеспечивая большую величину улучшения  $\varepsilon$  (11) отношения сигнал/помеха на выходе по сравнению со входом системы восстановления сигнала.

На рис. 3, 4 представлены графики зависимостей параметра «улучшение»  $\varepsilon$  от длительности

сигнальных импульсов для известного BLW [5] и предлагаемого метода. Параметр  $\varepsilon$  учитывает как искажения формы восстановленного сигнала, так и шум на выходе системы восстановления сигналов.



Рис. 3. Зависимость параметра «улучшение» (11) от длительности сигнальных импульсов,  $\bar{\sigma}_{inp}^2=0,5$ : --- BLW; — предлагаемый метод

Графики на рис. 3, 4 демонстрируют преимущество показателей предлагаемого метода восстановления сигналов по сравнению с методом BLW практически во всем диапазоне исследуемых длительностей сигнальных импульсов.

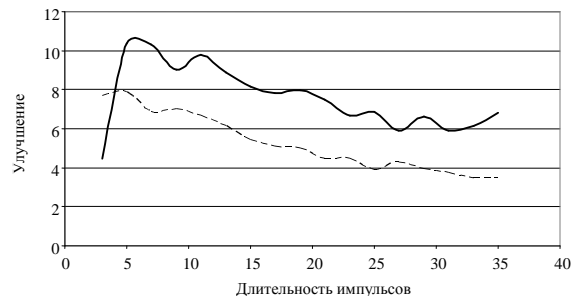


Рис. 4. Зависимость параметра «улучшение» (11) от длительности сигнальных импульсов,  $\bar{\sigma}_{inp}^2=1,0$ : --- BLW; — предлагаемый метод

На рис. 5, 6 показаны графики, иллюстрирующие зависимость параметра улучшения  $\varepsilon$  от длительности сигнальных импульсов в условиях воздействия аддитивной смеси АБГШ и импульсной помехи.

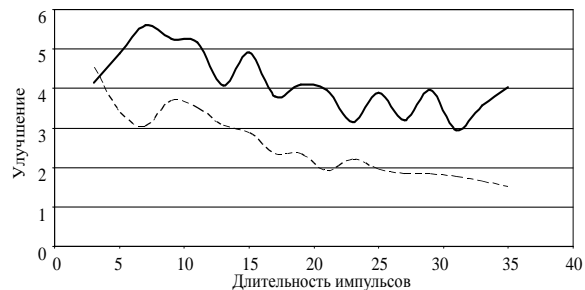


Рис. 5. Зависимость параметра «улучшение» (11) от длительности сигнальных импульсов,  $\bar{\sigma}_{inp}^2=0,3$ ,  $P=5\%$ : --- BLW; — предлагаемый метод

Практически во всем исследуемом диапазоне изменения длительности сигналов (за ис-

ключением коротких импульсов) предлагаемый метод обеспечивает лучшие показатели по сравнению с известным методом BLW.



Рис. 6. Зависимость параметра «улучшение» (11) от длительности сигнальных импульсов,  $\sigma_{inp}^2=0,3$ ,  $P=30\%$ : --- BLW; ——— предлагаемый метод

Сравнение результатов восстановления сигналов известным методом BLW и результатов, полученных предлагаемым методом с использованием алгоритма (6), позволяет сделать заключение о существенном уменьшении искажений формы сигнала в последнем случае.

**Выводы.** Таким образом, предложен и исследован новый подход к решению задачи восстановления сигналов по оценке БП. Главное отличие предложенного подхода от известных заключается в отказе от непосредственного вычисления фазы биспектра, поскольку эта величина не представляет интереса в задаче биспектрального восстановления сигналов. Поэтому отпадает необходимость традиционных вычислений фазового биспектра, так как их можно успешно заменить измерениями комплексного нормированного биспектра. Использование нормированного биспектра в задаче восстановления сигналов позволяет существенно уменьшить искажения формы восстановленных сигналов, связанные с «π-скачками» фазы. Результаты статистического моделирования восстановления тестовых сигналов, содержащих разрывы первого рода, свидетельствуют о значительном уменьшении искажений формы восстановленных сигналов по сравнению с известным методом.

Предложенный метод обладает простотой и низкой чувствительностью к величине интервала дискретизации в биспектральной области, что представляется важным при восстановлении сигналов априорно неизвестной длительности и формы. При этом пропадает необходимость уменьшения шага дискретизации.

1. Lan Du, Hongway Liu, Zheng Bao and Mengdao Xing. Radar HRRP target recognition based on higher order spectra // IEEE Transactions on Signal Processing. - 2005. - 53, N7. - P.2359-2368.
2. Totsky A. V., Kurbatov I. V., Lukin V. V. et al. Combined bispectrum-filtering techniques for radar output signal reconstruction in ATR applications // Proceedings of International

- Conference "Automatic Target Recognition XIII"; Ed. Firooz A. Sadjadi; Orlando (USA). - 2003. - 5094. - P.301-312.
3. Astola J. T., Egiiazarian K. O., Khlopov G. I. et al. Application of bispectrum estimation for time-frequency analysis of ground surveillance Doppler radar echo signals // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements. - 2007. - accepted for publication.
4. Zhang X., Shi Y., Bao Z. A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition // IEEE Transactions on Signal Processing. - 2001. - 49, N9. - P.1875-1885.
5. Bartelt H., Lohmann A. W., Wirmitzer B. Phase and amplitude recovery from bispectra // Applied Optics. - 1984. - 23. - P.3121-3129.
6. Nakamura M. Waveform estimation from noisy signals with variable signal delay using bispectrum averaging // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. - 1993. - 40, N2. - P.118-127.
7. Nikias C. L., Raghuveer M. R. Bispectral estimation: A digital signal processing framework // Proceedings. IEEE - 1987. - 75, N7. - P.869-891.
8. Petropulu A. P., Nikias C. L. Signal reconstruction from the phase of the bispectrum // IEEE Transactions on Signal Processing. - 1992. - 40, N3. - P.601-610.
9. Petropulu A. P., Pozidis H. Phase reconstruction from bispectrum slices // IEEE Transactions on Signal Processing. - 1998. - 46, N2. - P.527-530.
10. Тоцкий А. В., Костенко П. Ю., Курбатов И. В. и др. Метод восстановления сигналов с использованием нормированного биспектра // Радиоэлектроника. Изв. вузов. - 2006. - 49, №2. - С.53-60.
11. Ширман Я. Д., Горшков С. А., Леценко С. П. и др. Методы радиолокационного распознавания и их моделирование // Зарубежная радиоэлектроника. - 1996. - №11. - С.3-63.

## ACCURACY ANALYSIS OF SIGNAL RECONSTRUCTION BY USING NORMALIZED BISPECTRUM DENSITY ESTIMATION

A. V. Totsky, P. A. Molchanov

The accuracy analysis of unknown signal shape reconstruction is considered for argument bispectrum estimation and normalized bispectrum estimation techniques. Results of computer simulations demonstrate a possibility of signal shape reconstruction accuracy improvement by using smooth functions as normalized bispectrum density estimates computed in the presence of additive Gaussian and impulse noise.

**Key words:** bispectral density estimate, magnitude bispectrum, phase bispectrum.

## АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ МЕТОДОМ ОЦІНЮВАННЯ НОРМОВАНОЇ БІСПЕКТРАЛЬНОЇ ГУСТИНИ

О. В. Тоцкий, П. О. Молчанов

Розглянуто задачу аналізу точності відновлення сигналів невідомої форми методом оцінювання аргумента биспектральної густини та методом оцінювання нормованої биспектральної густини. Подано результати статистичного моделювання, які демонструють можливість покращення точності відновлення сигналів за використанням гладких функцій - оцінок нормованої биспектральної густини, що розраховані в присутності адитивних білого гаусова та імпульсного шумів.

**Ключові слова:** оцінювання биспектральної густини, амплітудний биспектр, фазовий биспектр.

Рукопись поступила 18 июля 2007 г.