

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОПЕРЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ
В УСКОРИТЕЛЯХ**

А.Д. Овсянников

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ovs74@mail.ru

Рассматривается подход, основанный на решении математически формализованной оптимизационной задачи. В случае линейности уравнений поперечного движения частиц в качестве характеристик пучка удобно рассматривать огибающие. В нелинейном случае можно рассматривать RMS-характеристики пучка траекторий частиц для оценки параметров движения и задания функционалов качества. Основными являются задачи минимизации роста эффективного эмиттанса, а также задача согласования параметров пучка на входе в структуру с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования поперечного движения заряженных частиц в различных ускоряющих структурах представляют значительный интерес [1-8]. Проблемы определения параметров поперечного движения могут быть сформулированы как сложные многопараметрические оптимизационные задачи. В случае линейности уравнений поперечного движения частиц в качестве характеристик пучка удобно рассматривать огибающие. В нелинейном случае можно рассматривать RMS-характеристики пучка траекторий частиц для оценки параметров движения и задания функционалов качества.

Проблемы оптимизации поперечного движения эффективно решать поэтапно. Среди различных возможных задач основными являются задачи фокусировки, минимизации роста эффективного эмиттанса, а также задача согласования параметров пучка на входе в ускоритель с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой.

В настоящей работе рассматривается подход для решения упомянутых проблем, основанный на решении математически формализованной оптимизационной задачи. Показано, что для выбранной формы функционала качества можно получить вариацию функционала в аналитическом виде. Это позволяет на практике значительно увеличить количество управляющих параметров. В этом случае класс возможных решений оказывается существенно шире.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем полагать, что на вход ускорителя поступает равномерно заряженный непрерывный поток частиц, имеющий эллиптическое сечение в поперечной плоскости. В этом случае продольное и поперечное движения частиц пучка описываются следующими уравнениями:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = 4\pi \frac{eUT}{W_0L} \cos(Kz) \cos(\theta\tau + \varphi_0) x = F_z, \quad (1)$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \left(4\pi \frac{eUT}{W_0L^2} \sin(Kz) + \frac{eU\kappa}{W_0a^2} \right) \cos(\theta\tau + \varphi_0) x - \frac{4I/I_0}{\beta_z r_x (r_x + r_y)} x = Q_x(\tau, z, \varphi_0, r_x, r_y) x, \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \left(4\pi \frac{eUT}{W_0L^2} \sin(Kz) - \frac{eU\kappa}{W_0a^2} \right) \cos(\theta\tau + \varphi_0) y - \frac{4I/I_0}{\beta_z r_y (r_x + r_y)} y = Q_y(\tau, z, \varphi_0, r_x, r_y) y, \quad (3)$$

где $\tau = ct$; $\theta = 2\pi\omega/c$; U – напряжение между электродами; T – эффективность ускорения; W_0 – энергия покоя заряженной частицы; ω – частота ускоряющего поля; φ_0 – начальная фаза; c – скорость света; a – радиус апертуры; β_z – приведенная продольная скорость частиц; r_x и r_y – огибающие пучка, $K = 2\pi/L$; L – длина периода; $\kappa = 1 - 4T/\pi$; I – ток пучка; I_0 – ток Альфвена.

Перейдем к независимой переменной z . Уравнение продольного движения (1) в этом случае можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tilde{\omega}}{\beta}, \quad \frac{d\beta}{dz} = \frac{F_z}{\beta}, \quad (4)$$

где $\varphi = \tilde{\omega}\tau + \varphi_0$ – текущая фаза частицы, $\beta = \frac{\dot{z}}{c}$ – приведенная скорость.

Уравнения поперечного движения (2), (3) будут иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{\beta^2} \left(Q_x x - \frac{dx}{dz} F_z \right), \quad (5)$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{\beta^2} \left(Q_y y - \frac{dy}{dz} F_z \right). \quad (6)$$

Уравнения (5), (6) могут быть переписаны в виде системы уравнений

$$\frac{d\xi}{dz} = A_x \xi, \quad \frac{d\eta}{dz} = A_y \eta, \quad (7)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$; $\xi_1 = x$; $\xi_2 = \frac{dx}{dz}$; $\eta = (\eta_1, \eta_2)$; $\eta_1 = y$;

$\eta_2 = \frac{dy}{dz}$, а матрицы A_x и A_y имеют вид:

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q_x/\beta^2 & -F_z/\beta^2 \end{pmatrix}; \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q_y/\beta^2 & -F_z/\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть множество состояний системы (7) запол-

нают в плоскостях $\left(x, \frac{dx}{dz}\right)$ и $\left(y, \frac{dy}{dz}\right)$ при значении $z=0$ эллипсы

$$\xi^* G_x^0(\varphi_0) \xi \leq 1, \eta^* G_y^0(\varphi_0) \eta \leq 1 \quad (8)$$

соответственно.

Тогда матрицы G_x и G_y , описывающие эллипсы в соответствующих плоскостях при изменении z , будут удовлетворять следующей системе матричных уравнений:

$$\frac{d}{dz} G_x = -A_x^* G_x - G_x A_x, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dz} G_y = -A_y^* G_y - G_y A_y. \quad (10)$$

Будем решать систему уравнений (9),(10) от входа в ускоритель до конца структуры, т.е. от $z=0$ до $z=Z$. При этом начальными условиями для системы (9),(10) являются матрицы эллипсов (8), определяющих аксептансы регулярной части ускорителя при начальном допустимом управлении (законе изменения радиуса канала) и зависящих от начальной фазы φ_0 :

$$G_x(0, \varphi_0) = G_x^0(\varphi_0), G_y(0, \varphi_0) = G_y^0(\varphi_0).$$

Под задачей минимизации эффективного эмиттанта будем понимать нахождение закона изменения минимального радиуса канала $a(z)$ вдоль ускорителя, обеспечивающего при заданных начальных значениях максимальное перекрытие семейства эллипсов, зависящих от начальной фазы ($0 < \varphi_0 < 2\pi$), на выходе из ускорителя.

При решении задачи оптимизации согласователя уравнения (1)-(3) значительно упрощаются, так как в согласователе эффективность ускорения T равна нулю и продольная составляющая скорости не меняется. При этом соответствующие уравнения (9), (10) решаются при тех же начальных условиях, но интегрирование ведется от $z=0$ до $z=-h$, где h – длина согласующей секции.

Под задачей оптимизации согласователя будем понимать нахождение закона изменения радиуса канала вдоль согласующей секции, обеспечивающего при заданных начальных значениях максимальное перекрытие семейства эллипсов, зависящих от начальной фазы, на входе в согласующую секцию.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Представим элементы матриц $G_x(z, \varphi_0)$ и $G_y(z, \varphi_0)$ следующим образом:

$$G_x = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_x + \alpha_x^2}{v_x} & \alpha_x \\ \alpha_x & v_x \end{pmatrix}, G_y = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_y + \alpha_y^2}{v_y} & \alpha_y \\ \alpha_y & v_y \end{pmatrix},$$

где $v_x/\Delta_x = r_x^2$, $v_y/\Delta_y = r_y^2$, $\Delta_x = \det G_x$, $\Delta_y = \det G_y$.

Теперь уравнения (9), (10) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\frac{dv_x}{dz} = 2 \left(v_x \frac{F_z}{\beta^2} - \alpha_x \right), \quad (11)$$

$$\frac{d\alpha_x}{dz} = \alpha_x \frac{F_z}{\beta^2} - v_x \frac{Q_x}{\beta^2} - \frac{\Delta_x + \alpha_x^2}{v_x}, \quad (12)$$

$$\frac{dv_y}{dz} = 2 \left(v_y \frac{F_z}{\beta^2} - \alpha_y \right), \quad (13)$$

$$\frac{d\alpha_y}{dz} = \alpha_y \frac{F_z}{\beta^2} - v_y \frac{Q_y}{\beta^2} - \frac{\Delta_y + \alpha_y^2}{v_y}, \quad (14)$$

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_0 \left(\frac{\beta(z)}{\beta_0} \right)^2. \quad (15)$$

Введем функционал, оценивающий степень взаимного перекрытия эллипсов на выходе из ускорителя (на входе в согласователь) и отвечающий различным начальным фазам. В связи с этим рассмотрим пучок квадратичных форм, порожденный парой эллипсов с матрицами G и B , и найдем его характеристические числа λ_1 и λ_2 :

$$\chi(\lambda) = \det(G - \lambda B) = 0, \quad \chi(\lambda_1) = \chi(\lambda_2) = 0.$$

Величина, обратная минимальному характеристическому числу $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$, характеризует степень рассогласованности пары эллипсов [9]. В случае совпадающих эллипсов эта величина равна единице. Таким образом, всегда $\lambda^{-1} \geq 1$. Будем рассматривать рассогласование эллипсов с матрицами $G_x(Z, \varphi_0)$ и $G_y(Z, \varphi_0)$ с некоторыми заданными эллипсами с матрицами B_x и B_y :

$$\lambda_x^{-1}(\varphi_0) = \lambda^{-1}(G_x(Z, \varphi_0), B_x),$$

$$\lambda_y^{-1}(\varphi_0) = \lambda^{-1}(G_y(Z, \varphi_0), B_y).$$

Матрицы B_x и B_y описывают желаемый фазовый портрет пучка на выходе ускорителя, либо на входе согласователя.

Качество ускоряющей структуры будем оценивать следующей величиной:

$$J(a) = \max_{\varphi_0} \lambda_x^{-1}(\varphi_0) + \max_{\varphi_0} \lambda_y^{-1}(\varphi_0). \quad (16)$$

Задача минимизации функционала (16) является задачей минимаксной оптимизации. Минимизацию функционала можно осуществлять методами направленного спуска.

Запишем систему уравнений (11)-(15) в виде системы уравнений общего вида:

$$\frac{d\sigma}{dz} = f(z, \sigma, \varphi_0, u), \quad (17)$$

с соответствующими начальными условиями:

$$\sigma(0) = \sigma(0, \varphi_0), \quad \varphi_0 \in [\varphi_1, \varphi_2]. \quad (18)$$

Здесь $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, $\sigma_1 = \alpha_x$, $\sigma_2 = v_x$, $\sigma_3 = \alpha_y$, $\sigma_4 = v_y$; $u = u(z)$ – управление (закон изменения радиуса канала вдоль секции); величина начальной фазы φ_0 принимает значения из некоторого интервала. Функционал (16) запишем в следующем виде:

$$J(u) = \max_{\varphi_0} g_1(\sigma(Z, \varphi_0), \varphi_0) + \max_{\varphi_0} g_2(\sigma(Z, \varphi_0), \varphi_0). \quad (19)$$

Аналогично [10] можно показать, что в этом случае справедливо следующее представление вариации функционала (19):

$$\delta J = - \int_0^Z p^*(z) \Delta u(z) dz, \quad (20)$$

где вектор-функция $p(z)$ определяется по формуле

$$p(z) = \frac{\partial f(z, \sigma(z, \varphi_x), \varphi_x, u(z))^*}{\partial u} \psi_1(z, \varphi_x) + \frac{\partial f(z, \sigma(z, \varphi_y), \varphi_y, u(z))^*}{\partial u} \psi_2(z, \varphi_y). \quad (21)$$

Здесь φ_x и φ_y – «наихудшие» фазы в соответствующих плоскостях, т.е. $\max_{\varphi} g_1(\sigma(Z, \varphi), \varphi) = g_1(\sigma(Z, \varphi_x), \varphi_x)$ и $\max_{\varphi} g_2(\sigma(Z, \varphi), \varphi) = g_2(\sigma(Z, \varphi_y), \varphi_y)$; вектор-функции ψ_1 и ψ_2 являются решениями следующих вспомогательных систем дифференциальных уравнений со специальными условиями на правом конце (для согласователя $Z = -h$, т.е. на левом конце):

$$\frac{d\psi_i}{dz} = - \left(\frac{\partial f(z, \sigma(z, \varphi), \varphi, u(z))^*}{\partial \sigma} \right) \psi_i, \quad (22)$$

$$\psi_i(Z, \varphi) = \frac{\partial g_i(\sigma(Z, \varphi), \varphi)}{\partial \sigma}, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Вектор-функция $p(z)$, полученная из представления (21), определяет направление спуска при минимизации функционала (19) в пространстве допустимых управлений (например, непрерывных функций, принимающих значения в заданном диапазоне):

$$u_{\varepsilon}(z) = u(z) + p(z)\varepsilon, \quad (24)$$

где $\varepsilon > 0$, и $u_{\varepsilon}(z)$ есть новое (измененное) управление.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Для иллюстрации оптимизационного подхода рассмотрена задача оптимизация профиля согласующей секции ускорителя с ПОКФ на энергию 5 МэВ при частоте 352 МГц. Данный канал предназначен для ускорения пучка протонов с начальной энергией 95 кэВ и током 75 мА. Напряжение между электродами – 100 кВ. Ниже, на Рис.1 и 2, представлены результаты выбора одного из возможных вариантов функции, описывающей изменение радиуса канала в согласующей секции. А также показаны акцептансы на входе в согласующую секцию канала для различных значений фазы входа в ускоритель, полученные в результате оптимизации. На Рис.3 приведен соответствующий оптимизированный профиль согласующей секции. В качестве желаемого на входе выбирался расходящийся эллипс.

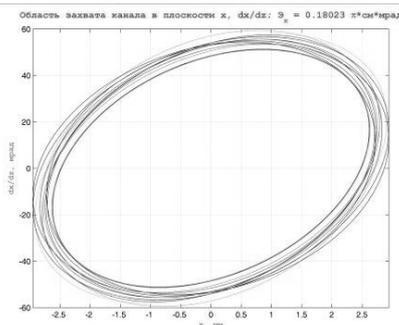


Рис.1. Акцептансы в плоскости x, x'

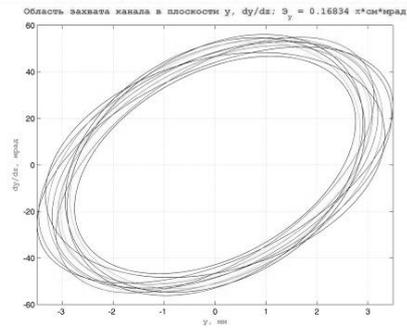


Рис.2. Акцептансы в плоскости y, y'

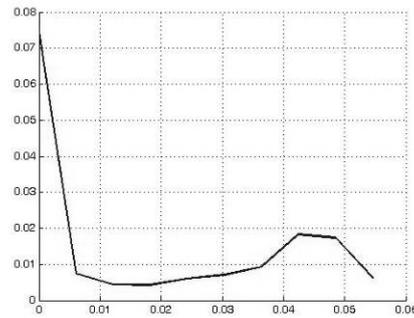


Рис.3. Профиль согласователя

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе задача оптимизации параметров поперечного движения ускорителя с ПОКФ формализуется в виде задачи математической оптимизации. Рассматриваются задачи оптимизации профиля согласующей секции и задача минимизации эффективного эмиттанса. Данный подход существенно расширяет класс возможных управлений, так как не опирается изначально на конкретные законы изменения жесткости в ускоряющем канале. Приведенный пример использования разработанной методики показывает возможность нахождения профиля согласователя, обеспечивающего расходящийся согласованный пучок на входе в согласующую секцию. Найденное аналитическое представление вариации функционала качества может быть использовано при построении других численно-аналитических методов оптимизации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Д.А. Овсянников. *Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990, с.312.
2. D.A. Ovsyannikov, A.D. Ovsyannikov, Yu.A. Svistunov, A.P. Durkin, M.F. Vorogushin. *Beam Dynamics Optimization: Models, Methods and Applications // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, section A 558*. 2006. p.11-19.
3. K.R. Crandall, R.H. Stokes, T.P. Wangler. *RF Quadrupole Beam Dynamics Design Studies // Proceedings of 1979 Linear Accelerator Conference, Montauk, 1979*, p.205.
4. N. Tokuda, S. Yamada. *New Formulation of the RFQ Radial Matching Section // Proceedings of the 1981 Linear Accelerator Conference, Santa Fe, 1981*, p.313.
5. И.М. Капчинский. *Теория линейных резонансных ускорителей*. М.: «Энергоиздат», 1982, с.310.

6. M. Reiser. *Theory and Design of Charged Particle Beams*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1994, p.607.
7. E.S. Masunov, S.M. Polozov, P.N. Ostroumov, N.E. Vinogradov. RF Focusing Methods for Heavy Ions in Low Energy Accelerators // *Proceedings of the IEEE Particle Accelerator Conference PAC 2003*, Portland, OR, 2003, p.2963-2965.
8. Proceeding of the 15-th International Workshop on Beam Dynamics and Optimization (BDO 2008)/ editors: D. Ovsyannikov, M. Berz and P. Snopok // *International Journal of Modern Physics A*. 2009. v.24, №5. *World Scientific*, Florida, USA.
9. Ф.Р. Гантмахер. *Теория матриц*. М.: «Наука», 1967, с.576.
10. В.Ф. Демьянов, Т.К. Виноградова, В.Н. Никулина и др. *Негладкие задачи теории оптимизации и управления*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982, с.324.

Статья поступила в редакцию 06.03.2012 г.

TRANSVERSE MOTION PARAMETERS OPTIMIZATION IN ACCELERATORS

A.D. Ovsyannikov

An approach based on solving a mathematically formalized optimization problem is considered. In the case of linear equations of transverse motion of particles it is convenient to consider envelopes as characteristics of the beam. In nonlinear case one can consider RMS characteristics of beam of trajectories to estimate the parameters of motion and to set functional of quality. The main problem is effective emittance growth minimization, as well as the problem of matching the parameters of the beam at the entrance to the RFQ structure.

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ПОПЕРЕЧНОГО РУХУ В ПРИСКОРЮВАЧАХ

О.Д. Овсянников

Розглядається підхід, заснований на вирішенні математично формалізованої оптимізаційної задачі. У разі лінійності рівнянь поперечного руху частинок в якості характеристик пучка зручно розглядати огинаючі. У нелінійному випадку можна розглядати RMS-характеристики пучка траєкторій частинок для оцінки параметрів руху і завдання функціоналів якості. Основними є завдання мінімізації зростання ефективного емітанса, а також завдання узгодження параметрів пучка на вході в структуру з просторово-однорідним квадрупольним фокусуванням.