УДК 539.12: 519.63

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПО ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Д.А. Овсянников, Е.Д. Котина
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ekotina123@mail.ru

В работах В.И. Зубова разрабатывался подход к построению электромагнитных полей, вызывающих движения заряженных частиц в соответствии с заданным полем скоростей. Нахождение стационарных магнитных полей, обеспечивающих требуемую динамику частиц, получило развитие в работах Е.Д. Котиной. Однако в предыдущих исследованиях не рассматривалась проблема построения поля скоростей, которая представляет собой самостоятельную задачу. В частности, проблему определения поля скоростей можно рассматривать как некоторую задачу теории оптимального управления. В данной работе впервые предлагается искать поле скоростей по заданной плотности распределения заряженных частиц в конфигурационном пространстве. В работе на основе обобщенного уравнения Лиувилля ставится оптимизационная задача, позволяющая свести решение исходной задачи к решению системы уравнений Эйлера-Лагранжа, являющейся системой эллиптического типа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблемы решения различных обратных задач всегда находились в центре внимания многих исследователей. В частности, решение обратных задач электродинамики, когда по заданным движениям (по заданному полю скоростей) определялись электромагнитные поля, изучалось в работах Г.А. Гринберга, В.Т. Овчарова, В. Мельтцера, А.Р. Лукаса, В.И. Зубова, Е.Д. Котиной [1-9]. Следует отметить, что задание поля скоростей, вообще говоря, представляет собой самостоятельную задачу. В частности, возможны различные постановки оптимизационных задач управления ансамблем траекторий с целью получения необходимой динамики частиц [10]. В данной работе предлагается искать поле скоростей по заданной плотности распределения заряженных частиц в конфигурационном пространстве. Предлагается рассмотреть оптимизационную задачу, позволяющую свести решение исходной проблемы к решению уравнений Эйлера-Лагранжа для соответствующего функционала. Этот подход используется в дальнейшем для определения поля скоростей при решении задачи формирования пучка заряженных частиц в стационарном магнитном поле.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем предполагать, что динамика частиц осуществляется в силу уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(t,x,y,z), \\ \dot{y} &= v(t,x,y,z), \\ \dot{z} &= w(t,x,y,z). \end{aligned} \qquad (1)$$

Обозначим $\rho = \rho(t,x,y,z)$ – плотность распределения частиц, которая в общем случае зависит от времени t и пространственных координат x,y,z. Нашей задачей является определение поля скоростей, т.е. нахождение функций u,v,w по известной функции $\rho(t,x,y,z)$.

Будем предполагать, что плотность распределения частиц удовлетворяет, с учетом (1), уравнению переноса (обобщенному уравнению Лиувилля) [10]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}u + \frac{\partial\rho}{\partial y}v + \frac{\partial\rho}{\partial z}w + \rho\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}u + \frac{\partial\rho}{\partial y}v + \frac{\partial\rho}{\partial z}w + \rho\cdot div f = 0, \qquad (2)$$

где $f = (u,v,w)^T$ – поле скоростей системы (1).

Уравнение (2) – это уравнение с частными производными первого порядка, линейное относительно u,v,w и их частных производных. Но так как в данном уравнении содержатся три неизвестные функции, то его недостаточно для их определения. В общем случае – это некорректная задача. В связи с этим мы будем использовать метод регуляризации по А.Н. Тихонову [11] и исследовать соответствующую вариационную задачу.

Введем ряд стандартных обозначений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho_t, \frac{\partial\rho}{\partial x} = \rho_x, \frac{\partial\rho}{\partial y} = \rho_y, \frac{\partial\rho}{\partial z} = \rho_z,$$

$$\frac{\partial\rho_t}{\partial x} = \rho_{tx}, \frac{\partial\rho_t}{\partial y} = \rho_{ty}, \frac{\partial\rho_t}{\partial z} = \rho_{tz}, \frac{\partial u}{\partial x} = u_x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \frac{\partial u}{\partial z} = u_z, \frac{\partial v}{\partial x} = v_x, \frac{\partial v}{\partial y} = v_y, \frac{\partial v}{\partial z} = v_z,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_x, \frac{\partial w}{\partial y} = w_y, \frac{\partial w}{\partial z} = w_z, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x} = u_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = u_{xy}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = u_{xz}, \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = u_{yz}, \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial y} = v_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = v_{xy}, \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z} = v_{xz}, \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z} = v_{yz}, \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial x} = w_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = w_{xy}, \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} = w_{xz}, \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} = w_{yz}.$$

ISSN 1562-6016. ВАНТ. 2012. №3(79)

Рассмотрим функционал

$$J(u,v,w)=\int_0^T\int_M(\varphi_1+\alpha^2\varphi_2)dxdydzdt\ , \qquad (3)$$

где $T-$ время, $M-$некоторая область из R^3 ненулевой меры, α^2- параметр регуляризации,

$$\varphi_1=(\rho_t+\rho_x u+\rho_y v+\rho_z w+\rho(u_x+v_y+w_z))^2,$$

$$\varphi_2=u_x^2+u_y^2+u_z^2+v_x^2+v_y^2+v_z^2+w_x^2+w_y^2+w_z^2.$$

Таким образом, мы ищем поле скоростей в классе достаточно гладких функций.

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ

Уравнения Эйлера-Лагранжа в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
&-\alpha^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})-\rho^2(u_{xx}+v_{xy}+w_{xz})-\\
&\rho(\rho_{xx}u+\rho_{xy}v+\rho_{xz}w)-\rho(\rho_x(2u_x+v_y+w_z)+\\
&\rho_y v_x+\rho_z w_x))=\rho\rho_{tx},\\
&-\alpha^2(v_{xx}+v_{yy}+v_{zz})-\rho^2(u_{xy}+v_{yy}+w_{yz})-\\
&\rho(\rho_{xy}u+\rho_{yy}v+\rho_{yz}w)-\rho(\rho_x u_y+ \qquad (4)\\
&\rho_y(u_x+2v_y+w_z)+\rho_z w_y)=\rho\rho_{ty},\\
&-\alpha^2(w_{xx}+w_{yy}+w_{zz})-\rho^2(u_{xz}+v_{yz}+w_{zz})-\\
&\rho(\rho_{xz}u+\rho_{yz}v+\rho_{zz}w)-\rho(\rho_x u_z+\rho_y v_z+\\
&\rho_z(u_x+v_y+2w_z))=\rho\rho_{tz}.
\end{aligned}$$

Или в векторной форме:

$$-\alpha^2\begin{pmatrix}u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\\ v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}\\ w_{xx}+w_{yy}+w_{zz}\end{pmatrix}-\rho^2\begin{pmatrix}u_{xx}+v_{xy}+w_{xz}\\ u_{xy}+v_{yy}+w_{yz}\\ u_{xz}+v_{yz}+w_{zz}\end{pmatrix}-$$

$$\rho\begin{pmatrix}2\rho_x & \rho_x & \rho_x\\ \rho_y & 2\rho_y & \rho_y\\ \rho_z & \rho_z & 2\rho_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\ v_y\\ w_z\end{pmatrix}-$$

$$\rho\begin{pmatrix}\rho_y & 0 & 0\\ 0 & \rho_x & 0\\ 0 & 0 & \rho_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}-\rho\begin{pmatrix}\rho_z & 0 & 0\\ 0 & \rho_z & 0\\ 0 & 0 & \rho_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_x\\ w_y\\ v_z\end{pmatrix}-$$

$$\rho\begin{pmatrix}\rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz}\\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & \rho_{yz}\\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & \rho_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}\rho_{tx}\\ \rho_{ty}\\ \rho_{tz}\end{pmatrix}.$$

Для двумерного случая, т.е., если мы рассматриваем плотность в виде $\rho=\rho(t,x,y)$ и ищем поле скоростей (1) в виде

$$\dot{x}=u(t,x,y),$$
$$\dot{y}=v(t,x,y),$$

уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned}
&-\alpha^2(u_{xx}+u_{yy})-\rho^2(u_{xx}+v_{xy})-\rho(\rho_{xx}u+\rho_{xy}v)-\\
&\rho(\rho_x(2u_x+v_y)+\rho_y v_x))=\rho\rho_{tx},\\
&-\alpha^2(v_{xx}+v_{yy})-\rho^2(u_{xy}+v_{yy})-\rho(\rho_{xy}u+\rho_{yy}v)- \qquad (5)\\
&\rho(\rho_x u_y+\rho_y(u_x+2v_y))=\rho\rho_{ty},
\end{aligned}$$

а векторная форма принимает следующий вид:

$$-\alpha^2\begin{pmatrix}u_{xx}+u_{yy}\\ v_{xx}+v_{yy}\end{pmatrix}-\rho\begin{pmatrix}\rho_{xx} & \rho_{xy}\\ \rho_{xy} & \rho_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}-$$

$$\rho\begin{pmatrix}2\rho_x & \rho_x\\ \rho_y & 2\rho_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\ v_y\end{pmatrix}-$$

$$\rho\begin{pmatrix}\rho_y & 0\\ 0 & \rho_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\ u_y\end{pmatrix}-\rho^2\begin{pmatrix}u_{xx}+v_{xy}\\ u_{xy}+v_{yy}\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}\rho_{tx}\\ \rho_{ty}\end{pmatrix}.$$

Пусть $M-$ область в R^2 с достаточно гладкой границей Γ. Введем следующий оператор:

$$A(f)=-\alpha^2\Delta f+\begin{Bmatrix}div(\rho f)\rho_{x_1}-\dfrac{\partial}{\partial x_1}\big(\rho div(\rho f)\big)\\ div(\rho f)\rho_{x_2}-\dfrac{\partial}{\partial x_2}\big(\rho div(\rho f)\big)\end{Bmatrix} \qquad (6)$$

или

$$A(f)=-\alpha^2\Delta f-\rho\, grad\, div(\rho f).$$

Здесь

$$f=(f_1,f_2)^T=(u,v)^T,\ \Delta f=(\Delta u,\Delta v)^T,$$
$$u=u(x_1,x_2),\ v=v(x_1,x_2).$$

Систему (5) запишем в виде операторного уравнения

$$A(f)=g \qquad \text{на } M \qquad (7)$$

с граничным условием

$$f=0 \ \text{ на } \Gamma. \qquad (8)$$

Здесь

$$g=\begin{Bmatrix}-\rho_t\rho_{x_1}+\dfrac{\partial}{\partial x_1}\big(\rho\rho_t\big)\\ -\rho_t\rho_{x_2}+\dfrac{\partial}{\partial x_2}\big(\rho\rho_t\big)\end{Bmatrix}=\rho\, grad\,\rho_t.$$

Следует заметить, что уравнение (7), записанное в операторной форме, имеет место при произвольной размерности n вектора $f=(f_1,f_2,...,f_n)$. При этом множество M следует рассматривать в пространстве R^n. Таким образом, система уравнений (4) также записывается в форме (7).

Нетрудно показать, что оператор $A(f)$ является положительно определенным оператором, а система уравнений, определяемых операторным уравнением (7), является сильноэллиптической системой дифференциальных уравнений [12, 13].

Как известно, сильноэллиптические системы ведут себя с точки зрения разрешимости, как одно эллиптическое уравнение.

Отметим, что функционал (3) является квадратичным функционалом, который отличается лишь константой от следующего функционала:

$$J(f)=\big(A(f),f\big)-2\big(g,f\big). \qquad (9)$$

В силу положительной определенности оператора A решение уравнения (7) является также решением задачи минимизации функционала (9) [14]. Более того, обобщенное решение системы (7) с граничным условием (8) в силу положительной определенности оператора A существует, и единственно, а при достаточной гладкости коэффициентов уравнения (7), т.е. функции ρ, и границы множества M существует и классическое решение в силу теорем вложения [14, 15, 16].

4. ФОРМИРОВАНИЕ ПУЧКА В СТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В этом разделе мы приведем частный случай построения поля скоростей для решения задачи формирования пучка заряженных частиц в стационарном магнитном поле. В этом случае по заданной плотности распределения частиц вычисляется в аналитическом виде поле скоростей, реализующее эту плотность.

Далее используется подход, предложенный В.И. Зубовым. Пусть динамика частиц описывается уравнениями

$$\frac{dX}{dt} = Y, \qquad \frac{d(mY)}{dt} = eY \times B, \tag{10}$$

где $X = (x_1, x_2, x_3)$ – координаты частицы в декартовой системе координат; $Y = (y_1, y_2, y_3)$ – вектор скорости частицы; m – масса частицы; e – заряд частицы; B – векторная функция, определяющая магнитную индукцию; t – время.

Обозначим через η поле скоростей в конфигурационном пространстве, тогда

$$\dot{X} = \eta(t, X). \tag{11}$$

В работах В.И. Зубова показано, что стационарное магнитное поле (т.е. векторная функция B, удовлетворяющая уравнению Максвелла $div\ B = 0$), движение заряженных частиц в котором происходит в соответствии с полем скоростей (11), можно представить в виде $B = -\frac{m}{e}\, rot\ \eta$. Это означает, что в конфигурационном пространстве траектории заряженных частиц, определяемые системой (10), будут совпадать с траекториями системы (11) при одинаковых начальных условиях.

Однако данное представление не исчерпывает всех возможностей, и при практической реализации оказалось более естественным искать магнитное поле в виде [8, 9]

$$B = -\frac{m}{e}\, rot\ \eta + h\eta, \tag{12}$$

где $h = h(x_1, x_2, x_3)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию $div\ (h\eta) = 0$.

Рассмотрим аксиально-симметричное магнитное поле и цилиндрическую систему координат (r, θ, z). Радиальное движение частиц в этом случае описывается уравнением

$$\frac{dr}{dz} = f(r, z). \tag{13}$$

Уравнение (2) в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial\rho(r,z)}{\partial z} + \frac{\partial\rho(r,z)}{\partial r} f(r,z) + \rho(r,z)\frac{\partial f(r,z)}{\partial r} = 0. \tag{14}$$

Надо найти функцию $f = f(r,z)$, обращающую данное уравнение в тождество.

Зная функцию $f = f(r,z)$, мы можем вычислить компоненты магнитного поля

$$B_r = \frac{m}{er}\frac{\partial L}{\partial z} + fh\left(\frac{c_1^2 - L^2/r^2}{1+f^2}\right)^{1/2}, \qquad B_z = -\frac{m}{er}\frac{\partial L}{\partial r} + h\left(\frac{c_1^2 - L^2/r^2}{1+f^2}\right)^{1/2}. \tag{15}$$

Здесь $L = L(r,z)$ и $h = h(r,z)$ – решения следующей системы [8, 9]:

$$\begin{cases} -fl\dfrac{\partial L}{\partial z} + l\dfrac{\partial L}{\partial r} = d_1, \\ -q\dfrac{\partial h}{\partial z} + g\dfrac{\partial L}{\partial z} - fq\dfrac{\partial h}{\partial r} + fg\dfrac{\partial L}{\partial r} = d_2, \end{cases}$$

где $q = c_1^2 - L^2/r^2$, $g = hL/r^2$, $l = \frac{m}{e}L/r^2$,

$$d_1 = \frac{m}{e}L^2/r^3 - \frac{m}{e}Fq + rg\left(q(1+f^2)\right)^{1/2},$$

$$F = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial r}f\right)\Big/\left(1+f^2\right),$$

$$d_2 = h\left(c_1^2\frac{f}{r} + q\left(\frac{\partial f}{\partial r} - fF\right)\right),$$ c_1 – полная скорость частицы.

Зададим функцию плотности распределения в виде нормального распределения

$$\rho(r,z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{(r-\bar{r}(z))^2}{2\sigma^2}\right).$$

Далее пусть $\bar{r}(z) = r_0\cos(z_0 z) + a_0$. Решая уравнение (14), можно показать, что поле скоростей в данном случае представимо в виде

$$f = r_0 z_0 \sin z - r_0 z_0 \sin(z_0 z) \times \exp\left(\frac{r^2 - 2(r_0\cos(z_0 z) + a_0)}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, задавая необходимую плотность распределения, можно определять поле скоростей, по которому далее строить магнитное поле согласно описанному алгоритму.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Г.А. Гринберг. *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.* М.: Изд-во Академии наук, 1948, с.507-535.
2. В.Т. Овчаров. Аксиально-симметричные пучки заданной формы // *Доклады АН СССР.* 1956, т.107, №1, с.47-50.

3. В.Т. Овчаров. Теория формирования электронных пучков // *Радиотехника и электроника*. 1957, т.2, №6, с.696-704.
4. B. Meltzer. Single-Component Stationary Electron Flow under Space-Charge Conditions // *Journal of Electronics*. 1956, v.7, №1, p.118-127.
5. A.R. Lucas, B. Meltzer. A General Theorem for Dense Electron Beams // *Journal of Electronics and Control*. 1957, v.4, №2, p.160-164.
6. В.И. Зубов. К управлению движением заряженных частиц в магнитном поле // *Доклады АН СССР*. 1977, т.232, №4, с.798-799.
7. В.И. Зубов. *Динамика управляемых систем*. М.: «Высшая школа». 1982, с.285.
8. Е.Д. Котина. Формирование заданной динамики пучка в магнитном поле // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.10. «Прикладная математика, информатика, процессы управления»*. 2006, в.4, с.77-82.
9. E.D. Kotina. Beam dynamics formation in magnetic field // *Proceedings of EPAC* 2002, Paris, France, 2002, p.1264-1266.
10. Д.А. Овсянников. *Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц.* Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990, 312 с.
11. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. *Методы решения некорректных задач.* М.: «Наука», 1979, с.288.
12. А.А. Самарский, Е.С. Николаев. *Методы решения сеточных уравнений.* М.: «Наука», 1978, с.324.
13. М.И. Вишик. О сильноэллиптических системах дифференциальных уравнений // *Математический сборник*. 1951, т.29 (71), №3.
14. К. Ректорис. *Вариационные методы в математической физике и технике* / Пер. с англ. М.: «Мир», 1985, с.590.
15. О.А. Ладыженская. *Краевые задачи математической физики.* М.: «Наука», 1973, с.408.
16. С.М. Никольский. *Приближения функций многих переменных и теоремы вложения*. М.: «Наука», 1977, с.456.

Статья поступила в редакцию 05.12.2011 г.

DETERMINATION OF VELOCITY FIELD BY GIVEN DENSITY DISTRIBUTION OF CHARGED PARTICLES

D.A. Ovsyannikov, E.D. Kotina

In V.I. Zubov's works the approach to determination of electromagnetic field causing motion of charged particles in accordance with given velocity field was considered. Construction of stationary magnetic field forming given beam dynamics was developed in E.D. Kotina's work. In previous investigations the problem of determination of velocity field wasn't considered, which is a separate task. In particular, the task of determination velocity field could be considered as the problem of the optimal control theory. In this work it is suggested to find velocity field by given density distribution of charged particles in configuration space. In this work optimization problem is considered as based on Liouville's equation. Thus the problem of determination of velocity field is reduced to solving of elliptic system of Euler-Lagrange equations.

ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛЯ ШВИДКОСТЕЙ ПО ЗАДАНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК

Д.О. Овсянников, О.Д. Котіна

В роботах В.І. Зубова розроблявся підхід до побудови електромагнітних полів, що викликають рух заряджених частинок у відповідності із заданим полем швидкостей. Знаходження стаціонарних магнітних полів, що забезпечують необхідну динаміку частинок, отримало розвиток в роботах О.Д. Котіной. Проте в попередніх дослідженнях не розглядалася проблема побудови поля швидкостей, яка представляє собою самостійну задачу. Зокрема, проблему визначення поля швидкостей можна розглядати як деяку задачу теорії оптимального управління. В даній роботі вперше пропонується шукати поле швидкостей по заданій щільності розподілу заряджених частинок в конфігураційному просторі. В роботі на основі узагальненого рівняння Ліувілля ставиться оптимізаційна задача, що дозволяє звести рішення вихідного завдання до вирішення системи рівнянь Ейлера-Лагранжа, що є системою еліптичного типу.