

АСИМПТОТИКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ, НАГРУЖЕННОМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ЭКРАНОМ

А. Д. Барков

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова, НАН Украины
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: ire@ire.kharkov.ua*

Предложена методика расчета энергетических характеристик поля, рассеянного двумерной металлодиэлектрической структурой в случае, когда её геометрические или материальные параметры равны или близки к критическим. Рассмотрены резонансные режимы в малоугловом приближении для значений параметров, близких к критическим. Ил. 1. Библиогр.: 6 назв.

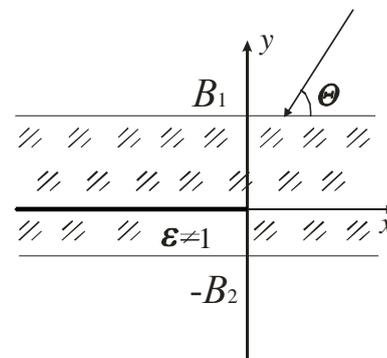
Ключевые слова: металлодиэлектрическая структура, факторизация, критические частоты, сингулярности, асимптотики, малоугловое приближение, энергетические характеристики.

При решении задач дифракции на двумерных металлодиэлектрических структурах волноводного типа методом Винера - Хопфа - Фока (В - Х - Ф) выполнение процедуры факторизации сопряжено с определенными принципиальными математическими трудностями [1]. В работе [2] показано, что процедура факторизации для значений параметров структуры, равных критическим, связана с вычислением интегралов от функций, не интегрируемых в классическом смысле. При этом особенности этих функций имеют специальный вид, позволяющий получить для соответствующих интегралов замкнутые аналитические (или асимптотические для параметров близких к критическим) выражения. Это обстоятельство дает возможность для таких значений параметров выписать аналитические выражения основных энергетических характеристик рассеянного структурой поля как внутри диэлектрического слоя (ДС) - модули амплитуд собственных мод в ДС, так и вне ДС - поле в дальней зоне.

Для возможно более «чистого» выделения именно математических вопросов процедуры факторизации в качестве исследуемой выбрана простейшая из металлодиэлектрических структур волноводного типа, а именно, бесконечный в обе стороны ДС, содержащий внутри себя полубесконечный, идеально проводящий, бесконечно тонкий экран. Для обеих (E -, H -) поляризаций рассматривается задача о падении плоской электромагнитной волны соответствующей поляризации на данную структуру. Здесь основное внимание уделено случаю E -поляризации, попутно, в процессе решения проводится сравнение с результатами [2] для H -поляризации.

1. Постановка задачи. Анализ дисперсионных уравнений и функции факторизации. На бесконечный в обе стороны ДС с постоянным $\varepsilon \neq 1$ толщины $b_1 + b_2$, содержащий внутри себя идеально проводящий, бесконечно тонкий экран,

под углом Θ падает плоская E -поляризованная электромагнитная волна (рисунок).



Геометрия структуры

Обозначим единственную, отличную от нуля z -составляющую электрического поля этой волны через

$$U^{(i)}(x, y) = \exp(-ik(\alpha x + \beta y)); \quad (1)$$

составляющую E_z , соответствующую полному полю - через $U^{(t)}(x, y)$. В (1) $k = 2\pi/\tilde{\lambda}$, где $\tilde{\lambda}$ - длина волны падающего поля в вакууме; $\alpha = \cos \Theta$, $\beta = \sin \Theta$; угол Θ отсчитывается от положительного направления оси Ox : $0 < \Theta < \pi$. Задачу решаем в безразмерных координатах, все линейные размеры отнесены к полутолщине ДС

$$\xi = \frac{2x}{b_1 + b_2}, \quad \eta = \frac{2y}{b_1 + b_2}, \quad \tau = \frac{2b_1}{b_1 + b_2};$$

$$\kappa = k \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

При решении задачи пользуемся принципом предельного поглощения: считаем $k = k_1 + ik_2$; $k_1, k_2 > 0$, в конечных результатах полагаем $k_2 = 0$; для определенности считаем $0 < \Theta < \pi/2$;

конечные результаты справедливы для всех Θ : $0 < \Theta < \pi$.

Опуская технические детали метода факторизации, приведем окончательное функциональное уравнение В - X - Ф для данной задачи:

$$F_+(\lambda, \tau)K(\lambda, \tau) = \frac{1}{2\pi i} R_2^{(1)}(\kappa\alpha, \tau) \frac{e^{-i\kappa\beta\tau}}{\lambda + \kappa\alpha} + F_-(\lambda, \tau). \quad (2)$$

Здесь неизвестные функции $F_+(\lambda, \tau)$, $F_-(\lambda, \tau)$ аналитичны соответственно в полуплоскостях $\text{Im}\lambda > 0$, $\text{Im}\lambda < 0$, алгебраически убывают при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в этих полуплоскостях.

В уравнении (2)

$$R_2^{(1)}(\kappa\alpha, \tau) = \frac{\beta \sin \chi \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) + i\sqrt{\varepsilon - \alpha^2} \cos \chi \left(1 - \frac{\tau}{2}\right)}{A(\Theta) \sin \chi + 2i\beta\sqrt{\varepsilon - \alpha^2} \cos \chi};$$

$$A(\Theta) = (\varepsilon - 1) + 2\beta^2, \quad (3)$$

$$\chi = \chi(\Theta) = 2\kappa\sqrt{\varepsilon - \alpha^2};$$

$$K(\lambda, \tau) = \frac{1}{\gamma'} \frac{M(\lambda, \tau)M(\lambda, 2 - \tau)}{M(\lambda, 1)L(\lambda, 1)}.$$

Здесь

$$L(\lambda, 1) = \gamma' \text{sh} \gamma' - \gamma \text{ch} \gamma';$$

$$M(\lambda, \tau) = \gamma' \text{ch} \gamma' \tau - \gamma \text{sh} \gamma' \tau;$$

$$\gamma = i\sqrt{\kappa^2 - \lambda^2}; \quad \gamma' = i\sqrt{\kappa^2 \varepsilon - \lambda^2}.$$

Заметим, что $K(\lambda, \tau)$ не имеет точки ветвления $\lambda = \kappa\sqrt{\varepsilon}$, однозначную ветвь γ выбираем из условия: $\text{Re} \gamma < 0$ для $|\lambda| > \kappa$ вдоль вещественной оси комплексной плоскости λ .

Проведя факторизацию $K(\lambda, \tau)$, т. е. представив в виде

$$K(\lambda, \tau) = K_+(\lambda, \tau)K_-(\lambda, \tau),$$

для решения $F_+(\lambda, \tau)$ уравнения (2) получим

$$F_+(\lambda, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \frac{R_2^{(1)}(\kappa\alpha, \tau)}{K_+(\kappa\alpha, \tau)} \frac{e^{-i\kappa\beta\tau}}{(\lambda + \kappa\alpha)K_+(\lambda, \tau)}.$$

Знание $F_+(\lambda, \tau)$ позволяет выписать выражение для $U^{(r)}(\xi, \eta)$ - поля, рассеянного ребром экрана как в ДС, так и вне его.

Поле внутри ДС: $-(2 - \tau) < \eta < \tau$;
 $0 < \eta < \tau$ - часть ДС над экраном;
 $-(2 - \tau) < \eta < 0$ - под экраном;

$$U^{(r)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{R_2^{(1)}(\kappa\alpha, \tau)}{K_+(\kappa\alpha, \tau)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda\xi}}{\gamma'(\lambda + \kappa\alpha)K_+(\lambda, \tau)M(\lambda, 1)L(\lambda, 1)} \times \left\{ \frac{M(\lambda, 2 - \tau)M(\lambda, \tau - \eta)}{M(\lambda, \tau)M(\lambda, (2 - \tau) + \eta)} \right\} d\lambda;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \eta < \tau \\ -(2 - \tau) < \eta < 0 \end{array} \right.$$

Поле вне ДС в полупространствах: $\eta > \tau$ (над ДС), $\eta < -(2 - \tau)$ (под ДС);

$$U^{(r)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{R_2^{(1)}(\kappa\alpha, \tau)}{K_+(\kappa\alpha, \tau)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma'K_-(\lambda, \tau)}{\lambda + \kappa\alpha} \left\{ \frac{e^{\gamma(\eta - \tau)} / M(\lambda, \tau)}{e^{-\gamma(\eta + (2 - \tau))} / M(\lambda, 2 - \tau)} \right\} \times e^{i\lambda\xi} d\lambda, \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta > \tau \\ \eta < -(2 - \tau) \end{array} \right.$$

В этом разделе работы основным является анализ $|K_+(\lambda, \tau)|$ и связанное с ним исследование корней соответствующих дисперсионных уравнений.

Представление (3) для $K(\lambda, \tau)$ допускает прозрачную физическую интерпретацию. При $\varepsilon = 1$ $K(\lambda, \tau) = \frac{1}{\gamma}$, эта функция возникает при решении задачи дифракции на полуплоскости в свободном пространстве [3]. Функции $L(\lambda, 1)$, $M(\lambda, 1)$ связаны с волноводным каналом в части ДС свободной от экрана ($\xi > 0$); решения дисперсионных уравнений $L(\lambda, 1) = 0$, $M(\lambda, 1) = 0$ ($h_i(1)$, $\hat{h}_m(1)$ соответственно) определяют постоянные распространения четных и нечетных мод в этой части ДС; функции $M(\lambda, \tau)$, $M(\lambda, 2 - \tau)$ связаны с частью ДС над (под) экраном при $\xi < 0$; уравнения $M(\lambda, \tau) = 0$, $M(\lambda, 2 - \tau) = 0$ определяют постоянные распространения $\hat{h}_m(\tau)$, $\hat{h}_m(2 - \tau)$ нечетных собственных мод в соответствующих волноводных каналах.

Факторизацию $K(\lambda, \tau)$ проводим с использованием методики, предложенной в работе [4]. В результате приходим к следующему выражению:

$$|K_+(\lambda, \tau)| = |K(\lambda, \tau)\Pi(\lambda, \tau)|^{\frac{1}{2}} \exp(I(\lambda, \tau)).$$

Приняты следующие обозначения:

$$\Pi(\lambda, \tau) = \prod_{l=1}^{L(1)} \frac{h_l(1) - \lambda}{h_l(1) + \lambda} \prod_{m=1}^{M(1)} \frac{\hat{h}_m(1) - \lambda}{\hat{h}_m(1) + \lambda} \times \\ \times \prod_{m=1}^{M(\tau)} \frac{\hat{h}_m(\tau) + \lambda}{\hat{h}_m(\tau) - \lambda} \prod_{m=1}^{M(2-\tau)} \frac{\hat{h}_m(2-\tau) + \lambda}{\hat{h}_m(2+\tau) - \lambda};$$

$$I(\lambda, \tau) = \\ = \frac{\kappa}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \psi \Sigma(\kappa, \varepsilon, \tau, \psi) \ln \left| \frac{\lambda + \kappa \cos \psi}{\lambda - \kappa \cos \psi} \right| d\psi. \quad (6)$$

Здесь

$$\left\{ \prod_{m=1}^{M(\tau)} \frac{\hat{h}_m(\tau) + \lambda}{\hat{h}_m(\tau) - \lambda} \right|^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{\kappa}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \psi T^{(+)}(\tau, \psi) \ln \left| \frac{\lambda + \kappa \cos \psi}{\lambda - \kappa \cos \psi} \right| d\psi \right\}. \quad (9)$$

Соответственно здесь проведем анализ дисперсионных уравнений $M(\lambda, \tau) = 0$ и функции $T^{(+)}(\tau, \psi)$.

Уравнение $M(\lambda, \tau) = 0$ путем последовательных замен $\sqrt{\kappa^2 \varepsilon - \lambda^2} = x$, $x = \kappa \sqrt{\varepsilon - 1} \cos \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) приводится к виду

$$\operatorname{tg} \left(\kappa \tau \sqrt{\varepsilon - 1} \cos \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{tg} \varphi. \quad (10)$$

Значения κ (при фиксированных ε, τ), удовлетворяющие равенству $\kappa \tau \sqrt{\varepsilon - 1} - \frac{\pi}{2} = m\pi$ являются точками возникновения новой m -й моды соответствующего волноводного канала. Такие значения параметра κ называют критическими для волноводного канала ДС толщины τ , одна из границ которого металлическая. Соответственно для дальнейшего обозначим

$$\kappa_m^*(\tau) = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\tau \sqrt{\varepsilon - 1}}.$$

Показано, что для $\kappa = \kappa_m^*(\tau) + \hat{\kappa}$, асимптотика $\hat{h}_m(\tau)$ по малому параметру $\hat{\kappa} \ll 1$ имеет вид

$$\hat{h}_m(\tau) \cong \kappa \left(1 + \frac{1}{2} (\hat{\kappa}(\varepsilon - 1)\tau)^2 \right). \quad (11)$$

$$\Sigma(\kappa, \varepsilon, \tau; \psi) = T^{(+)}(\tau, \psi) + T^{(+)}(2 - \tau, \psi) - \\ - T^{(+)}(1, \psi) + T^{(-)}(1, \psi); \quad (7)$$

$$T^{(\pm)}(\tau, \psi) = \frac{(\varepsilon - 1) \frac{\sin \chi \tau}{\chi} \pm \tau \sin^2 \psi}{A(\psi) \pm B \cos \chi \tau}; \quad (8)$$

$$A(\psi) = (\varepsilon - 1) + 2 \sin^2 \psi, \quad B = \varepsilon - 1.$$

Таким образом, анализ $|K_+(\lambda, \tau)|$ в техническом плане сводится к исследованию дисперсионных уравнений (множители функций $\Pi(\lambda, \tau)$) и подынтегральной функции $\Sigma(\kappa, \varepsilon, \tau; \psi)$. Легко видеть, что этот анализ может быть сведен к рассмотрению отдельных сомножителей, например, следующего вида:

Асимптотика $T^{(+)}(\tau, \psi)$ для $\psi \ll 1$, $\kappa = \kappa_n^*(\tau) + \hat{\kappa}$, $|\hat{\kappa}| \ll 1$. Проанализируем особенности $T^{(+)}(\tau, \psi)$. Очевидно, что знаменатель в выражении (8) для $T^{(+)}(\tau, \psi)$ обращается в нуль только при $\psi = 0$ и для параметров $\kappa, \varepsilon, \tau$, удовлетворяющих соотношению $1 + \cos 2\kappa\tau\sqrt{\varepsilon - 1} = 0$, т. е. $\kappa\tau\sqrt{\varepsilon - 1} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Таким образом, особенности $T^{(+)}(\tau, \psi)$ реализуются при $\psi = 0$ для значений параметров κ , совпадающих с $\kappa_n^*(\tau)$.

В выражении (8) разложим в ряд по степеням ψ^2 отдельно числитель и знаменатель, учитывая $|\hat{\kappa}| \ll 1$

$$(\varepsilon - 1) \frac{\sin \chi \tau}{\chi} + \tau \sin^2 \psi \cong -\frac{\hat{\kappa}}{\kappa} (\varepsilon - 1) \tau + \frac{1}{2} \tau \sin^2 \psi,$$

$$A + B \cos \chi \tau \cong 2 \left(\sin^2 \psi + (\hat{\kappa}(\varepsilon - 1)\tau)^2 \right).$$

Таким образом,

$$T^{(+)}(\tau, \psi) \cong -\frac{1}{2} \frac{\frac{\hat{\kappa}}{\kappa}(\varepsilon-1)\tau}{\psi^2 + \left(\hat{\kappa}(\varepsilon-1)\tau\right)^2} + \frac{1}{4} \frac{\tau \sin^2 \psi}{\sin^2 \psi + \left(\hat{\kappa}(\varepsilon-1)\tau\right)^2}.$$

Этим представлением мы выделяем сингулярную (первое слагаемое) и регулярную составляющие $T^{(+)}(\tau, \psi)$. Для $\hat{\kappa} \ll 1$ сингулярная составляющая дает основной вклад в интеграл (9). Соответствующий интеграл следующего вида:

$$-\frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\psi^2 + \sigma^2} \ln \left| \frac{\lambda + \kappa \cos \psi}{\lambda - \kappa \cos \psi} \right| d\psi, \quad (12)$$

$$\sigma = \hat{\kappa}(\varepsilon-1)\tau.$$

Последовательность функций $\frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\psi^2 + \sigma^2}$

при $\sigma \rightarrow 0$ является дельтаобразной [5] для значений $\lambda \neq \kappa$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\psi^2 + \sigma^2} \ln \left| \frac{\lambda + \kappa \cos \psi}{\lambda - \kappa \cos \psi} \right| d\psi = \text{sign} \hat{\kappa} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\lambda - \kappa}{\lambda + \kappa} \right|. \quad (13)$$

При вычислении энергетических характеристик рассеянного структурой поля в ДС (амплитуды собственных мод) в полупространствах вне ДС (диаграммы направленности) значениями параметра λ будут соответственно постоянные распространения собственных мод $h_i(\tau)$ (или $\hat{h}_j(\tau)$) и $\kappa \cos \varphi$ (φ угол наблюдения).

Для старшей (m -й) моды вблизи ее критической точки при $\hat{\kappa} \rightarrow 0$, а также для малых углов падения Θ (наблюдения φ) соответствующие значения λ будут иметь пределом κ . В этом случае неприменима техника δ -функций. Для интегралов вида (12) в этих ситуациях необходима асимптотика по параметрам $\sigma \rightarrow 0$, $\beta = \sin \Theta \rightarrow 0$. Используя методы теории вычетов [6], несложно получить

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(a^2 + z^2)}{b^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{b} \ln(a + b),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln|a^2 - z^2|}{b^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{2b} \ln(a^2 + b^2).$$

Учитывая эти соотношения, приходим к требуемым асимптотикам

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{\psi^2 + \sigma^2} \ln \frac{\hat{h}_m(\tau) + \kappa \cos \psi}{\hat{h}_m(\tau) - \kappa \cos \psi} d\psi \cong \quad (14)$$

$$\cong \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sigma} + \mu\sigma + O(\sigma^3),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{\psi^2 + \sigma^2} \ln \frac{\alpha + \kappa \cos \psi}{\alpha - \kappa \cos \psi} d\psi \cong \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\beta} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^2}} + \mu\sigma + O(\sigma^3), \quad (15)$$

где $\mu = \frac{2}{\pi^2} \left(1 + \ln \frac{\pi}{4}\right) \cong 0,1537$.

В случае E -поляризации регулярная составляющая функции $T^{(+)}(\tau, \psi)$ (как и $\Sigma_{rg}(\kappa, \varepsilon, \tau; \psi)$) представима в виде сходящегося ряда по степеням $\sin^2 \psi$:

$$T_{rg}^{(+)}(\tau, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\kappa, \varepsilon, \tau) \sin^{2n} \psi.$$

Для вещественных λ сравнительно просто может быть получено

$$\int_0^{\pi/2} \cos \psi \sin^{2n} \psi \ln \left| \frac{\lambda + \cos \psi}{\lambda - \cos \psi} \right| d\psi = \frac{2\lambda}{2n+1} \left(\sum_{k=0}^n S_{2(n-k)} (1-\lambda^2)^k + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2\lambda} (\lambda^2 - 1)^n \text{Re}(\lambda^2 - 1)^{1/2} \right).$$

Здесь

$$S_{2(n-k)} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2(n-k)} \psi d\psi = \frac{(2(n-k)-1)!! \pi}{(2(n-k))!! 2}.$$

Следовательно

$$\int_0^{\pi/2} \cos \psi T_{rg}^{(+)}(\tau, \psi) \ln \left| \frac{\lambda + \cos \psi}{\lambda - \cos \psi} \right| d\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\kappa, \varepsilon, \tau) \frac{2\lambda}{2n+1} \times \left(\sum_{k=0}^n S_{2(n-k)} (1-\lambda^2)^k - \frac{\pi}{2\lambda} (1-\lambda^2)^n \text{Re}(\lambda^2 - 1)^{1/2} \right).$$

Очевидно, при вычислении модуля амплитуды старшей собственной моды для $\hat{\kappa} \ll 1$

имеет место $\lambda^2 - 1 \ll 1$, следовательно, в этом случае

$$\int_0^{\pi/2} \cos \psi T_{rg}^{(+)}(\tau, \psi) \ln \left| \frac{\lambda + \cos \psi}{\lambda - \cos \psi} \right| d\psi \cong \cong a_0(\kappa, \varepsilon, \tau) \pi \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} \right).$$

До этого момента для E -поляризации рассматривались сингулярности подынтегрального выражения в (6), связанные с условием $2\kappa\sqrt{\varepsilon - 1}\tau = (2n + 1)\pi$. В процессе анализа любой из параметров $(\kappa, \varepsilon, \tau)$ можно считать изменяющимся при фиксированных двух других. Здесь для определенности меняющимся считаем κ , поэтому соответствующие сингулярности дальше называем κ -сингулярностями соответствующего волноводного канала. Заметим, что в представлении $\Sigma(\kappa, \varepsilon, \tau; \psi)$ сингулярными могут быть или одно, или три слагаемых.

Детальное рассмотрение свойств функции $\Sigma(\kappa, \varepsilon, \tau; \psi)$ показывает, что в случае H -поляризации помимо ε -сингулярности возможна сингулярность принципиально другой природы. Предварительно заметим, что для H -поляризации

$$\Sigma(\kappa, \varepsilon, \tau; \psi) = T^{(-)}(\tau; \psi) + T^{(-)}(2 - \tau; \psi) - -T^{(-)}(1, \psi) + T^{(+)}(1, \psi).$$

Для $T^{(\pm)}(\tau; \psi)$ справедливо (8), но здесь в отличие от E -поляризации

$$A(\psi) = (\varepsilon - 1) + (\varepsilon^2 + 1) \sin^2 \psi,$$

$$B(\psi) = (\varepsilon - 1) + (\varepsilon^2 - 1) \sin^2 \psi.$$

Рассмотрим следующий частный случай задачи. Пусть κ и ε связаны соотношением

$$\kappa\sqrt{\varepsilon - 1} = \frac{\pi}{4}, \quad \varepsilon \gg 1, \quad \tau = 1.$$

Тогда

$$\Sigma(\kappa, \varepsilon; \psi) = T^{(-)}(1, \psi) + T^{(+)}(1, \psi).$$

При сделанных предположениях

$$\chi(\psi) \cong \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \frac{1}{\varepsilon - 1} \sin^2 \psi.$$

Пренебрегая слагаемым $B \cos \chi(\psi)$ по сравнению с $A(\psi)$, для $\Sigma(\kappa, \varepsilon, \tau = 1; \psi)$ при $\psi \ll 1$, $\varepsilon \gg 1$ получим

$$\Sigma(\kappa, \varepsilon, \tau = 1; \psi) \cong \frac{1}{\kappa\sqrt{\varepsilon^2 + 1}} \frac{\sigma}{\psi^2 + \sigma^2},$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2 + 1}}.$$

Сингулярность этого типа будем называть ε -сингулярностью. Асимптотика корня дисперсионного уравнения $L(\lambda, 1) = 0$ при $\sigma \rightarrow 0$ в этом случае, как и для κ -сингулярности, имеет вид $h(\varepsilon, 1) \cong \kappa\sqrt{1 + \sigma^2}$.

В случае κ -сингулярности для H -поляризации сингулярная составляющая $I(\lambda, 1)$ имеет вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\psi^2 + \sigma^2} \ln \left| \frac{\lambda + \kappa \cos \psi}{\lambda - \kappa \cos \psi} \right| d\psi, \quad \sigma = \hat{\kappa} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon};$$

для ε -сингулярности имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\psi^2 + \sigma^2} \ln \left| \frac{\lambda + \kappa \cos \psi}{\lambda - \kappa \cos \psi} \right| d\psi, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2 + 1}}.$$

В дальнейшем это отличие (множитель перед интегралом) существенно сказывается на виде асимптотик поля в дальней зоне и модулей амплитуд собственных мод в ДС. Для ε -сингулярности относительная погрешность $\Delta_{\text{отн}}$ вычисления $I(\lambda, 1)$ при использовании приближе-

ния δ -функции порядка $\varepsilon^{-1/2}$. Однако в широком диапазоне значений ε (практически для $\varepsilon \geq 10$) асимптотические формулы вида (14), (15) обеспечивают $\Delta_{\text{отн}}$, не превосходящую 1%.

2. Особенности энергетических характеристик рассеянного поля в окрестности критических значений частотного параметра. Формулы (4), (5) - исходные для анализа энергетических характеристик рассеянного поля. Модовая структура в ДС своя для каждого из волноводных каналов и полностью определяется граничными условиями.

В ДС для $\xi > 0$ в дискретном спектре собственных мод содержатся как четные, так и нечетные моды; в волноводных каналах части ДС, содержащей экран ($\xi < 0$), могут распространяться только нечетные моды. Приведем выражения для модулей амплитуд соответствующих мод.

$$\begin{aligned} |A_i^{(c)}(\xi > 0; \kappa, \varepsilon, \tau; \Theta)| &= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h_i^2(1) - \kappa^2 \alpha^2}} ME(\Theta, \tau) \sqrt{\Omega(h_i(1), 1)} \times \\ &\times |\Gamma'((L, 1), i; \kappa \alpha)|^{-1/2} \times \\ &\times |\Gamma'((L, 1), i; h_i(1))|^{-1/2} \times \\ &\times \exp(-I(\kappa \alpha, \tau)) \exp(-I(h_i(1), \tau)); \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \left| A_i^{(s)}(\xi > 0; \kappa, \varepsilon, \tau; \Theta) \right| &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\hat{h}_j^2(1) - \kappa^2 \alpha^2}} ME(\Theta, \tau) \sqrt{\Omega(\hat{h}_j(1), 1)} \times \\ &\times \left| \Pi'((M, 1), j; \kappa \alpha) \right|^{-1/2} \left| \Pi'((M, 1), i; \hat{h}_j(1)) \right|^{-1/2} \exp(-I(\kappa \alpha, \tau)) \exp(-I(\hat{h}_j(1), \tau)); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left| A_j^{(s)}(\xi < 0; \kappa, \varepsilon, \tau; \Theta) \right| &= \frac{2}{\sqrt{\hat{h}_j^2(\tau) - \kappa^2 \alpha^2}} ME(\Theta, \tau) \sqrt{\Omega(\hat{h}_j(\tau), \omega, 1)} \times \\ &\times \left| \Pi'((M, \tau), j; \kappa \alpha) \right|^{-1/2} \left| \Pi'((M, \tau), j; \hat{h}_j(\tau)) \right|^{1/2} \exp(-I(\kappa \alpha, \tau)) \exp(-I(\hat{h}_j(\tau), \tau)). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$ME(\Theta, \tau) = \left| \frac{R_2^{(1)}(\kappa \alpha, \tau)}{K^{1/2}(\kappa \alpha, \tau)} \right|;$$

$$\Omega(\hat{h}_j(\tau), \tau) = \left| \hat{h}_j(\tau) \frac{L(\lambda, \tau)}{\gamma' \frac{d}{d\lambda} M(\lambda, \tau)} \right|_{\lambda=\hat{h}_j(\tau)};$$

$$\Pi'((L, 1), i; \kappa \alpha) = \frac{h_i(1) + \kappa \alpha}{h_i(1) - \kappa \alpha} \Pi(\kappa \alpha, \tau);$$

$$\Pi'((M, 1), j; \kappa \alpha) = \frac{\hat{h}_j(1) + \kappa \alpha}{\hat{h}_j(1) - \kappa \alpha} \Pi(\kappa \alpha, \tau);$$

$$\Pi'((M, \tau), j; \kappa \alpha) = \frac{\hat{h}_j(\tau) + \kappa \alpha}{\hat{h}_j(\tau) - \kappa \alpha} \Pi(\kappa \alpha, \tau);$$

$$\Pi'((L, 1), i; h_i(1)) = \lim_{\lambda \rightarrow h_i(1)} \frac{h_i(1) + \lambda}{h_i(1) - \lambda} \Pi(\lambda, \tau);$$

$$\Pi'((M, 1), j; \hat{h}_j(1)) = \lim_{\lambda \rightarrow \hat{h}_j(1)} \frac{\hat{h}_j(1) + \lambda}{\hat{h}_j(1) - \lambda} \Pi(\lambda, \tau).$$

Для диаграммы направленности $D_E(\varphi, \Theta; \tau)$ составляющей поля, рассеянной на кромке полуплоскости, в полупространстве $\eta > \tau$ получено выражение

$$D_E(\varphi, \Theta; \tau) = \frac{\Phi_E(\Theta, \tau) \Phi_E(\varphi, \tau)}{|\cos \Theta + \cos \varphi|},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_E(\Theta, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa}} ME(\Theta, \tau) \Pi^{-1/2}(\Theta, \tau) \times \\ &\times \exp(-I(\kappa \alpha, \tau)); \end{aligned} \quad (19)$$

полярные координаты с началом в точке $\xi = 0$, $\eta = \tau$; $\xi = r \cos \varphi$, $\eta - \tau = r \sin \varphi$; угол φ отсчитывается от положительного направления оси OX .

Непосредственно из представлений (16) - (19) видно, что выражения для модулей амплитуд, диаграммы направленности представлены в виде произведений однотипных сомножителей.

Различие в приведенных выражениях для модулей амплитуд мод, диаграммы направленности заключается в аргументах функций - сомножителей. Для каждого из множителей в этих представлениях в предельных случаях: $\hat{\kappa} \ll 1$, $\beta \ll 1$ для κ -сингулярностей; $\hat{\kappa} \sqrt{\varepsilon - 1} = \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon \gg 1$, $\beta \ll 1$ для ε -сингулярностей. Используя (14), (15), легко выписать соответствующие асимптотики.

Используя результаты предыдущего раздела, рассмотрим для примера асимптотику $\left| A_j^{(s)}(\xi < 0; \kappa, \varepsilon, \tau; \Theta) \right|$ старшей моды ($j = M(\tau)$) при $\hat{\kappa}, \beta \ll 1$ в случае, когда в $\Sigma(\kappa, \varepsilon, \tau; \psi)$ сингулярны три слагаемых. Учитывая асимптотики: (11) для $\hat{h}_m(\tau)$; (14), (15) соответственно для $I(\kappa \alpha, \tau)$, $I(\hat{h}_m(\tau), \tau)$, получим

$$\frac{2}{\sqrt{\hat{h}_m^2(\tau) - \kappa^2 \alpha^2}} \cong \frac{2}{\kappa \beta} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \tau^2}}, \quad t = \frac{\hat{\kappa}}{\beta} (\varepsilon - 1);$$

$$ME(\kappa \alpha, \tau) \cong \sqrt{\kappa \beta} \sqrt[4]{\frac{1 + t^2 (2 - \tau)^2}{(1 + t^2)(1 + t^2 \tau^2)}};$$

$$\sqrt{\Omega(\hat{h}_m(\tau), \tau)} \cong \sqrt{\kappa \beta} \sqrt{t \tau};$$

$$\left| \frac{\Pi'((M, \tau), j; \hat{h}_j(\tau))}{\Pi'((M, \tau), j; \kappa\alpha)} \right|^{\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2} \sqrt{1+\tau} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1+t^2(2-\tau)^2}{(1+t^2)}};$$

$$\exp(I(\hat{h}_j(\tau), \tau)) \exp(-I(\kappa\alpha, \tau)) \cong 2 \sqrt{\frac{t\tau}{1+\tau}} \times$$

$$\times \sqrt[4]{\frac{1+t^2}{(1+t^2\tau^2)(1+t^2(2-\tau)^2)}}.$$

Учитывая приведенные асимптотики, получим

$$\left| A_j^{(s)}(\xi < 0; \kappa, \varepsilon, \tau; \Theta) \right| \cong \frac{2t\tau}{1+t^2\tau^2} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1+t^2(2-\tau)^2}{1+t^2}}; t = \frac{\hat{\kappa}}{\beta}(\varepsilon-1). \quad (20)$$

Проводя подобную процедуру вычисления асимптотики $\left| A_i^{(c)}(\xi < 0; \kappa, \varepsilon, \tau; \Theta) \right|$, $\hat{\kappa}, \beta \ll 1$ для старшей i -й моды в случае H -поляризации, получим выражение, совпадающее с (20), с параметром $t = \frac{\hat{\kappa}}{\beta} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$. Рассматривая асимптотики (20), как функции переменной t и параметра τ , легко видеть, что в (20) зависимость от t имеет резонансный характер. Точка максимума $t_{\max}(\tau)$ и величина максимума $\left| A_j^{(s)}(t_{\max}, \tau) \right|$ - монотонно убывающие функции τ , причем для $\tau=1$, $t_{\max}=1$ и $\left| A_j^{(s)}(t_{\max}, \tau) \right|=1$. Сравнивая параметры t для E - и H -поляризации, получим: резонансы в случае E -поляризации в ε раз добротнее соответствующих резонансов для H -поляризации.

3. Длинноволновое приближение. Учитывая, что в случае H -поляризации нулевое значение κ является критическим, можно сделать

E -поляризация

$$D_E(\varphi, \Theta; \tau) \cong \frac{2}{|\cos \Theta + \cos \varphi|} \frac{1}{\sqrt{1+t^2(\Theta)}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2(\varphi)}}, t(\psi) = \frac{\kappa}{\sin \psi}(\varepsilon-1);$$

H -поляризация

$$D_H(\varphi, \Theta; \tau) \cong \frac{1}{2} \frac{\sin \Theta \sin \varphi}{|\cos \Theta + \cos \varphi|} \sqrt{\frac{1+t^2(\Theta)(2-\tau)^2}{1+t^2(\Theta)}} \sqrt{\frac{1+t^2(\varphi)(2-\tau)^2}{1+t^2(\varphi)}}, t(\psi) = \frac{\kappa}{\sin \psi} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}.$$

В случае H -поляризации при $\tau=1$ ε -сингулярность реализуется при условии:

вывод, что $\left| A_i^{(c)}(\xi < 0; \kappa, \varepsilon, \tau; \Theta) \right|$ при $\kappa \ll 1$ описывается формулой (20) с $t = \frac{\kappa}{\beta} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$. Для

$\kappa \ll 1$, учитывая (19), легко получить асимптотики для $D_E(\varphi, \Theta; \tau)$. Асимптотики имеют разный вид в зависимости от величины β (соответственно $\sin \varphi$), при этом, для $\sin \Theta$, $\sin \varphi = O(1)$ необходимо пользоваться приближением δ -функции.

$$I(\kappa\alpha, \tau) \cong \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sigma}{\psi^2 + \sigma^2} \ln \left| \frac{\cos \psi + \cos \Theta}{\cos \psi - \cos \Theta} \right| d\psi$$

$$\sigma = \frac{\kappa}{\beta}(\varepsilon-1);$$

$$ME(\kappa\alpha, \tau) \cong \sqrt{\kappa\beta}, \left| \Pi(\kappa\alpha, \tau) \right|^{-1/2} \cong \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}}.$$

Отсюда для $\hat{\kappa} \ll 1$; $\sin \Theta, \sin \varphi = O(1)$ получим

$$D_E(\varphi, \Theta; \tau) \cong 2 \frac{\cos \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{|\cos \Theta + \cos \varphi|}.$$

Аналогично, для H -поляризации при $\kappa \ll 1$, $\sin \Theta, \sin \varphi = O(1)$

$$D_H(\varphi, \Theta; \tau) \cong 2 \frac{\sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2}}{|\cos \Theta + \cos \varphi|}.$$

Полученные асимптотики не зависят от параметров ДС и совпадают с составляющей диаграммы направленности, связанной с рассеянием плоской волны на полуплоскости в свободном пространстве [3] (для соответствующей поляризации). В случае $\kappa \ll 1$, $\sin \Theta, \sin \varphi = O(1)$,

$\frac{\kappa}{\sin \Theta}, \frac{\kappa}{\sin \varphi} = O(1)$ пользуемся асимптотиками

(14), (15). В результате получим

$$\varepsilon \gg 1, 2\kappa\sqrt{\varepsilon-1} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, \dots \text{ . Рас-}$$

смотрим случай одномодового режима: $(n = 0 \Rightarrow 2\kappa\sqrt{\varepsilon - 1} = \frac{\pi}{2})$ в части ДС, содержащей

экран ($\xi < 0$) в канале над экраном. Для $|A_i^{(c)}(\xi < 0; \kappa, \varepsilon, \tau = 1; \Theta)|$ получим

$$|A_i^{(c)}(\xi < 0; \kappa, \varepsilon, \tau = 1; \Theta)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h^2 - \kappa^2 \alpha^2}} MH(\Theta, 1) \sqrt{\Omega(h(1), 1)} \exp(I(\kappa \alpha, 1) - I(h, 1)),$$

здесь $h = h(\tau = 1)$ - постоянная распространения единственной распространяющейся моды в ДС; $\xi < 0; 0 < \eta < 1$.

Приведем выражения для асимптотик множителей, входящих в это произведение для малоуглового ($\beta \ll 1$) приближения

$$\left\{ \begin{aligned} h &\cong \kappa \sqrt{1 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2 + 1}}, \text{ обозначим } \sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2 + 1}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h^2 - \kappa^2 \alpha^2}} &\cong \frac{\sqrt{2}}{\kappa \beta} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, t = \frac{\sigma}{\beta} \\ MH(\Theta, 1) &\cong \sqrt{2\kappa\beta\varepsilon} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1 + t^2}} \\ \exp(I(\kappa \alpha, 1) - I(h, 1)) &\cong \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}} \\ \sqrt{\Omega(h, 1)} &\cong \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{2\kappa\beta\varepsilon} t. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Учтя эти асимптотики, получим

$$|A_j^{(\varepsilon)}(\xi < 0; \kappa, \varepsilon, \tau = 1; \Theta)| \cong \frac{4\sqrt{2}t^2}{(1 + t^2)^{3/2}},$$

$$t = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2 + 1}}.$$

Для диаграммы направленности $D_H(\varphi, \Theta; 1)$, составляющей поля рассеяния на кромке полуплоскости, в полупространстве $\eta > \tau$ имеем

$$\begin{aligned} D_H(\varphi, \Theta; 1) &= \frac{\Phi_H(\Theta, 1)\Phi_H(\varphi, 1)}{|\cos \Theta + \cos \varphi|}, \\ \Phi_H(\Theta, 1) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa\varepsilon}} MH(\Theta, 1) \times \\ &\times \Pi^{1/2}(\Theta, 1) \exp(I(\Theta, 1)). \end{aligned} \quad (22)$$

При получении асимптотики $D_H(\varphi, \Theta; 1)$, для φ, Θ отделенных от нуля ($\sin \Theta, \sin \varphi = O(1)$), пользуемся приближением δ -функции, тогда $\exp(I(\Theta, 1)) \cong 1 / \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}$.

В случае «малоуглового» приближения ($\sin \Theta, \sin \varphi = o(1)$):

$$\exp(I(\Theta, 1)) \cong \frac{2}{\sin \Theta} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2(\Theta)}}.$$

В результате получим

$$\sin \Theta, \sin \varphi = O(1);$$

$$D_H(\varphi, \Theta; 1) \cong \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{|\cos \Theta + \cos \varphi|};$$

$$\sin \Theta, \sin \varphi = O(1);$$

$$\begin{aligned} D_H(\varphi, \Theta; 1) &\cong \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{|\cos \Theta + \cos \varphi|} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(1 + t^2(\Theta))(1 + t^2(\varphi))}}. \end{aligned}$$

Выводы. Таким образом, в работе для данной и аналогичных ей металлодиэлектрических структур предложена методика расчета энергетических характеристик поля для критических значений параметров или близких к ним.

В малоугловом приближении для значений параметров близких к критическим в поведении амплитуд соответствующих собственных мод просматривается резонансная зависимость. При этом положение соответствующих максимумов и их величина - монотонно убывающие функции глубины расположения экрана.

Добротность указанных выше резонансных зависимостей в случае E -поляризации в ε раз больше по сравнению с аналогичными для H -поляризации.

1. Журав С. М. Решение задачи о возбуждении диэлектрических пластин методом факторизации// Радиотехника. - 1974, - 19, - С.504-510.
2. Барков А. Д. Об особенностях метода факторизации в задачах дифракции на плоских двумерных металлодиэлектрических структурах// Радиофизика и электроника. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2002. - 7, - №3. - С.437 - 445.
3. Хелл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. - М: Мир, 1964. - 428 с.
4. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. - М: Мир, 1974. - 323 с.
5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия на них. - М.: Физматгиз, 1959. - 472 с.
6. Евграфов М. А. Аналитические функции - М.: «Наука», 1965. - 424 с.

THE ASYMPTOTIC FORMS OF EXTREME
CASES IN DISPERSION PROBLEM ON
DIELECTRIC LAYER LOADED WITH
SEMI-INFINITE METAL SHIELD

A. D. Barkov

The method of energy characteristics calculation of the field scattered by two-dimensional metal-dielectric structure when its geometrics and physical parameters equal or approach the critical has been introduced. The resonant modes in low-angled approach for parameter values close to critical have been considered.

Key words: metal-dielectric structure, factorization, critical frequencies, singularities, asymptotic forms, low-angled approach, energy characteristics.

АСИМПТОТИКИ ГРАНИЧНИХ ВИПАДКІВ
В ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ НА
ДІЕЛЕКТРИЧНОМУ ШАРІ,
НАВАНТАЖЕНОМУ НАПІВНЕСКІНЧЕННИМ
МЕТАЛЕВИМ ЕКРАНОМ

А. Д. Барков

Запропоновано методіку розрахування енергетичних характеристик поля, розсіяного двовірною металодіелектричною структурою у випадку, коли її геометричні або матеріальні параметри дорівнюють або близькі до критичних. Розглянуто резонансні режими в малокутовому наближенні до значень параметрів, близьких до критичних.

Ключові слова: металодіелектрична структура, факторизація, критичні частоти, сингулярності, асимптотики, малокутове наближення, енергетичні характеристики.

Рукопись поступила 5 февраля 2007 г.