

УДК 622.831.27

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗРУШАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ПРОГИБА СЛОЕВ НАД ВЫРАБОТАННЫМ ПРОСТРАНСТВОМ.

к.т.н. Лобков Н.И., м.н.с. Сергиенко А.И., асп. Сергиенко Л.В. (ИФГП НАНУ),

к.т.н. Куцерубов В.М. (ДонНТУ)

инж. Халимендигов Е.Н. (ш. Красноармейская-Западная №1)

Проведено аналітичні дослідження напружено-деформованого стану породних шарів гірничого масиву над виробленим простором. Запропоновано метод розрахунку руйнівних напружень та крок первинного обвалення основної покрівлі.

METHODS OF THE FORECASTING OF THE BEHAVIOUR OF THE ROCK TO ROOFINGS ON BREAKAGE FACES

Lobkov N.I., Sergienko A.I., Sergienko L.V., Halimendikov E.N.

The analytical studies tense-deformed conditions rock layers of the mining massive on worked out by space. The method of computation of destructive tensions and step of the primary bringing down of basic roof is offered.

В процессе выемки угля, породы кровли пласта прогибаются, разрушаются и обрушаются в выработанном и призабойном пространствах лавы. Слой слабой породы, залегающий над пластом, разрушается под действием опорного давления. Порода, в виде мелких фракций, просыпается в призабойное пространство, образуя пустоты в кровле значительных размеров. Секции крепи не имеют распора, что делает невозможным работу механизированного комплекса. При залегании слоя более крепких пород, кровля обрушается крупными блоками, что приводит к посадке механизированной крепи на «жесткую». В обоих случаях имеем аварийную ситуацию ведущую: к потере добычи, увеличению себестоимости угля, снижению безопасности ведения работ. Особенно интенсивно проявляются указанные явления в периоды первичной и вторичных посадок основной кровли, представленной мощным и прочным слоем, залегающим как непосредственно над пластом, так и на некотором удалении от него. Определение шага первичной посадки кровли значительно снижает риск завала лав и повышает уровень безопасности ведения горных работ.

Для определения шага первичной посадки кровли необходимо установить закономерности сдвижения и взаимодействия породных слоев, разрушения пород в зоне влияния очистных работ.

Общей тенденцией в мировой практике добычи угля подземным способом является увеличение глубины разработки. С увеличением глубины отмечается рост числа мощных и прочных породных слоев в горном массиве кровли угольных пластов. Поочередно сдвигаясь над выработанным пространством эти слои, формируют горное давление, изменяя его величину в пределах выемочного поля лавы.

Вопросами сдвижения породного массива над выработанным пространством, занимался ряд выдающихся ученых таких как: Канлыбаева Ж.М., Хохлов И.В., Борисов А.А., Турчанинов И.А., Кузнецов Г.Н., Фисенко Г.Л. и др. В результате исследований установлено, что над выработанным пространством происходит последовательное сдвижение породных слоев в направлении от выработанного пространства до поверхности. Особое значение для подтверждения теоретических разработок имеют натурные исследования сдвижения породных слоев над выработанным пространством [1, 2]. Как показали результаты наблюдений за глубинными реперами на шахтах Карагандинского и Донецкого бассейнов, средняя часть подработанного массива независимо от состава и чередования отдельных слоев в ней, сдвигается с образованием расслоения между слоями. Нижележащие породные слои изгибаются с некоторым опережением вышележащих слоев. Расслоение распространяется снизу вверх, от пласта к поверхности.

По мере отхода лавы от разрезной печи и при развитии фронта очистных работ, породные слои, прогибаясь под собственным весом, ведут себя как плиты, жестко защемленные с 4-х, 3-х и 2-х сторон [3].

Для определения прогиба и распределения напряжений в породном слое, возникает необходимость расчета толстых и тонких плит, под действием собственного веса и пригрузки с соответствующими краевыми условиями.

Вначале, при отходе лавы от разрезной печи, породный слой кровли ведет себя, как толстая плита, т.к. величина отхода меньше десятикратной мощности слоя. По мере подвигания очистного забоя, размеры выработанного пространства увеличиваются, величина отхода превышает десятикратную мощность слоя, породный слой в этом случае можно рассматривать как тонкую плиту [4].

Для решения задачи изгиба толстой плиты используем дифференциальные уравнения [5,9,12], с граничными условиями для вышеуказанных случаев защемления. Тело ограничено плоскостями: $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm h$. Уравнения равновесия в перемещениях (Ляме) записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + K_x &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + K_y &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 \omega + K_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z}$; u , v , ω – перемещение вдоль оси x , y , z ; K_x , K_y , K_z – объемные силы; λ , μ – постоянные Ляме:

$$\lambda = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = G, \quad \mu = \frac{2 \cdot \nu \cdot G}{1 - 2 \cdot \nu} = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)};$$

E, G, ν – модуль упругости, модуль сдвига, модуль поперечной деформации;

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа.

Граничные условия на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} t_x &= \left(\lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos(\bar{n}, \bar{x}) + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(\bar{n}, \bar{y}) + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \cos(\bar{n}, \bar{z}) \\ t_y &= \left(\lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos(\bar{n}, \bar{y}) + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(\bar{n}, \bar{x}) + G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \cos(\bar{n}, \bar{z}) \\ t_z &= \left(\lambda e + 2G \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \cos(\bar{n}, \bar{z}) + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \cos(\bar{n}, \bar{x}) + G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \cos(\bar{n}, \bar{y}) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где t_x, t_y, t_z – поверхностные силы, действующие в направлении осей x, y, z ; \bar{n} – направление внешней нормали к поверхности тела.

Условия, выражающие задачу изгиба толстой жестко защемленной по боковым граням плиты, с распределенной нагрузкой q на грани $z = h$:

1) условия для объемных сил:

$$K_x = K_y = K_z = 0. \quad (3)$$

2) граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} x = \pm a : u = 0, v = 0, \omega = 0; \\ y = \pm a : u = 0, v = 0, \omega = 0; \\ z = h : t_x = 0, t_y = 0, t_z = q; \\ z = -h : t_x = 0, t_y = 0, t_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для решения пространственной задачи теории упругости применяют численные методы: разложение в ряд Тейлора, метод конечных разностей и метод конечных элементов [5,6,10,11] и др. приближенные методы. Но все эти методы трудоемки и требуют немалых вычислительных ресурсов для их реализации.

Исследуя прогиб толстых и тонких плит при различных граничных условиях, с помощью численных методов, было определено, что расчет прогиба плиты можно свести к расчетам прогибов двух пересекающихся балок единичной ширины, расположенных по осям самой плиты. При этом граничные условия для плиты станут граничными условиями балок. Прогиб плиты может быть найден, как среднее геометрическое прогибов двух балок, с корректирующим коэффициентом, который имеет зависимость от величины отношения сторон плиты (рис. 2, 3, 4). Метод расчета плиты можно соотнести к методу расчета балок, а именно нахождение прогиба плиты, максимальных горизонтальных изгибающих напряжений, и вертикальных напряжений от изгиба плиты, для симметричных сторон.

Прогиб жестко защемленной с 4-х сторон плиты, определяется прогибом 2-х жестко защемленных балок (рис. 1,а). Прогиб жестко защемленной с 3-х сторон плиты и один край свободен, определяется прогибом жестко защемленной и консольной балки (рис. 1,б). Прогиб жестко защемленной с 2-х сторон плиты и два края свободных, определяется прогибом одной жестко защемленной балки (рис. 1,в).

Максимальный прогиб двух жестко защемленных балок, по осям x и y можно определить из выражений [11].

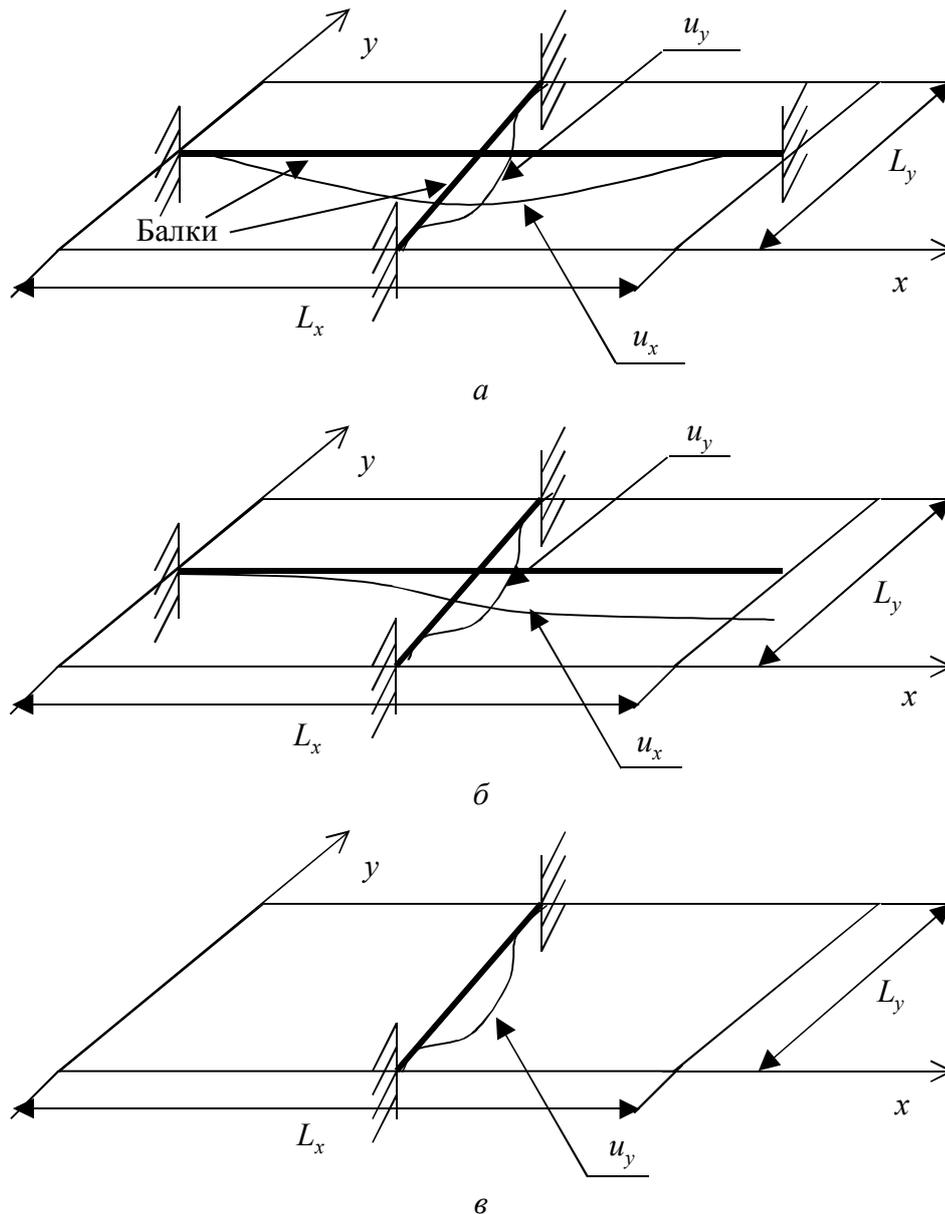


Рис. 1. Расчетная схема для определения прогиба плиты: *а* – жестко защемленной с 4-х сторон, *б* – жестко защемленной с 3-х сторон и с одной свободной стороной, *в* – жестко защемленной с 2-х сторон и с двумя свободными сторонами

$$u_x = -\frac{q \cdot L_x}{384 \cdot E \cdot J}, \quad u_y = -\frac{q \cdot L_y}{384 \cdot E \cdot J}; \quad (5)$$

где q – распределенная нагрузка действующая на плиту Н/м²; L_x, L_y – длина балок соответственно расположенных по осям x и y , м; E – модуль упругости, Па; J – момент инерции, М⁴.

Максимальный прогиб плиты w определяется, как среднее геометрическое прогибов балок u_x и u_y , с корректирующим коэффициентом, зависящий от отношения сторон плиты.

$$w = \left[-1.3227 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^3 + 2.0009 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^2 - 0.2229 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right) + 0.0448 \right] \times \\ \times \sqrt{u_x \cdot u_y}, \quad (L_x \leq L_y). \quad (6)$$

Учитывая то, что параметры напряжений, создаваемые в балках, не соответствуют истинным значениям напряжений в толстой плите, необходимо рассмотреть так называемую эквивалентную длину балки $L_{экр}$. Напряжения, получаемые при изгибе балки с эквивалентной длиной, будут соответствовать напряжениям, создаваемые в плите.

$$L_{экр,x} = k_x \sqrt[4]{\frac{384 \cdot w \cdot E \cdot J}{q}}, \quad L_{экр,y} = k_y \sqrt[4]{\frac{384 \cdot w \cdot E \cdot J}{q}}, \quad (7)$$

где k_x и k_y – корректирующие коэффициенты для эквивалентной длины балки, соответственно, расположенной по оси x или y .

Коэффициенты k_x и k_y зависят от отношения сторон плиты:

$$k_x = -4.0723 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^4 + 10.4870 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^3 - 9.5464 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^2 + 3.4285 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right) + 0.7121, \quad (4)$$

$$k_y = -0.1250 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^2 + 0.3427 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right) + 0.7723. \quad (5)$$

Горизонтальные напряжения в местах заделки плиты можно определить из расчета максимального действующего момента при изгибе балки [9] с эквивалентной длиной, с использованием выражения (3).

$$\sigma_x = h \cdot k_x^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot w \cdot E}{3 \cdot J}}, \quad \sigma_y = h \cdot k_y^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot w \cdot E}{3 \cdot J}}. \quad (6)$$

Соотношение между горизонтальными напряжениями и максимальными вертикальными, создаваемыми в плите при ее изгибе, составляет (табл. 1):

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4}, \quad (7)$$

Таблица 1.
Исследования прогибов плиты по предложенной методике расчета и с помощью численных методов

L_x	L_y	Аналитический расчет				МКЭ				Погрешность							
		L_x/L_y	W	$S_x, 10^6$	$S_y, 10^6$	$S_z, 10^6$	W	$S_x, 10^6$	$S_y, 10^6$	$S_z, 10^6$	$W\%$	$S_x, \%$	$S_y, \%$	$S_z, \%$			
20		0,100	0,00009194	0,852	0,588	0,360	0,0009000	0,937	0,619	0,398	2,16	9,10	5,07	9,58			
30		0,150	0,00026072	1,67	1,03	0,673	0,00026400	1,67	1,06	0,702	1,24	0,26	3,01	4,07			
40		0,200	0,00062199	2,82	1,65	1,12	0,00063000	3,08	1,99	1,31	1,27	8,56	17,28	14,83			
50		0,250	0,00130369	4,28	2,47	1,69	0,00129200	4,18	2,68	1,78	0,90	2,46	8,00	5,22			
60		0,300	0,00245648	6,00	3,49	2,37	0,00240700	5,83	3,81	2,48	2,06	2,85	8,28	4,33			
70		0,350	0,00424263	7,87	4,73	3,15	0,00417100	7,79	5,13	3,32	1,72	1,07	7,75	5,07			
80		0,400	0,00682499	9,84	6,17	4,00	0,00677800	10,1	6,59	3,98	0,69	2,55	6,31	0,61			
90		0,450	0,01035591	11,9	7,81	4,92	0,01041100	12,5	8,34	5,30	0,53	5,17	6,37	7,25			
100		0,500	0,01496614	13,9	9,62	5,88	0,01500000	13,3	8,82	5,61	0,23	4,39	9,09	4,75			
110	200	0,550	0,02075382	15,9	11,6	6,88	0,02116200	17,8	12,3	7,56	1,93	10,48	5,73	8,97			
120		0,600	0,02777334	18,0	13,7	7,93	0,02831500	18,8	13,3	7,82	1,91	4,16	3,03	1,41			
130		0,650	0,03602433	20,2	15,9	9,02	0,03666600	21,1	16,2	8,96	1,75	4,49	1,73	0,65			
140		0,700	0,04544055	22,3	18,2	10,1	0,04608300	23,6	18,0	9,31	1,39	5,33	1,18	8,90			
150		0,750	0,05587883	24,6	20,5	11,3	0,05623300	25,8	21,2	10,3	0,63	4,76	3,11	9,49			
160		0,800	0,06710802	26,8	22,9	12,4	0,06714500	27,7	23,3	10,8	0,06	3,33	1,89	14,90			
170		0,850	0,07879791	28,8	25,1	13,5	0,07838000	29,1	25,8	12,4	0,53	0,87	2,63	8,81			
180		0,900	0,09050813	30,6	27,3	14,5	0,08990300	30,4	28,2	13,0	0,67	0,65	3,31	11,28			
190		0,950	0,10167713	31,8	29,2	15,3	0,10125600	32,2	30,8	13,4	0,42	1,34	5,09	13,81			
200		1,000	0,11161107	32,0	30,9	15,7	0,11200000	32,2	32,2	13,8	0,35	0,47	3,93	14,10			
										Средняя погрешность				1,08	3,8	5,41	7,79

Примечание. Здесь w – прогиб плиты, m ; s_x – напряжения по оси x , Па; s_y – напряжения по оси y , Па; s_z – напряжения по оси z , Па

Вертикальные сжимающие напряжения σ_z , возникающие от изгиба слоя, увеличивают величину опорного давления и способствуют разрушению породы на мелкие фракции.

Давление, передаваемое балкой в заделке или опорное давление, создаваемое изгибающим моментом [11]:

$$P_M = \frac{q \cdot L_{\text{экс.х.}}}{2}. \quad (12)$$

Суммарное максимальное напряжение с учетом опорного давления [12]:

$$P_{on} = P_M + \sigma_z + \gamma \cdot H. \quad (13)$$

Коэффициент концентрации опорного давления:

$$k = \frac{P_{on}}{\gamma \cdot H}.$$

Разрушение слоя в местах заделки происходит под действием опорного давления. Характер обрушения кровли над очистным забоем зависит от того, какое предельно-допустимое напряжение возникнет в слое раньше. Если при изгибе слоя, горизонтальные напряжения на разрыв в кровле пласта превысят допустимые, раньше, чем сжимающие вертикальные напряжения, произойдет обрушение крупными блоками. Если наоборот, то произойдет высыпание мелкими фракциями.

Пример расчета для одного слоя.

Длина лавы $L_y = 200$ м; длина выработанного пространства $L_x = 63$ м; глубина ведения очистных работ $H = 600$ м; непосредственная кровля – «сланец песчаный»; мощность кровли $h = 10$ м; удельный вес пород $\gamma = 2500 \cdot 9,81 = 24225$ Н/м³; механические свойства пород кровли: $E = 2,6 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 0,3$, $\sigma_p = 6,6 \cdot 10^6$ Па, $\sigma_r = 38,8 \cdot 10^6$ Па.

Нагрузка, действующая на непосредственную кровлю:

$$q = \gamma \cdot h = 2.4525 \cdot 10^5 \frac{H}{m^2}, \quad J = \frac{h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} = \frac{10^3}{12 \cdot (1 - 0.3^2)} = 91.6.$$

Прогиб кровли:

$$\begin{aligned} w &= \left[-1.3227 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^3 + 2.0009 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^2 - 0.2229 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right) + 0.0448 \right] \cdot \sqrt{u_x \cdot u_y} = \\ &= \left[-1.3227 \cdot \left(\frac{63}{200} \right)^3 + 2.0009 \cdot \left(\frac{63}{200} \right)^2 - 0.2229 \cdot \left(\frac{63}{200} \right) + 0.0448 \right] \times \\ &\times \sqrt{\frac{2.4525 \cdot 10^5 \cdot 63}{384 \cdot 2.6 \cdot 10^{10} \cdot 91.6} \cdot \frac{2.4525 \cdot 10^5 \cdot 200}{384 \cdot 2.6 \cdot 10^{10} \cdot 91.6}} = 5.6 \cdot 10^{-3} \text{ м} \end{aligned}$$

Прогноз и управление состоянием горного массива

Корректирующие коэффициенты и расчет напряжений:

$$\begin{aligned}k_x &= -4.0723 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y}\right)^4 + 10.4870 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y}\right)^3 - 9.5464 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y}\right)^2 + 3.4285 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y}\right) + 0.7121 = \\&= -4.0723 \cdot \left(\frac{63}{200}\right)^4 + 10.4870 \cdot \left(\frac{63}{200}\right)^3 - 9.5464 \cdot \left(\frac{63}{200}\right)^2 + 3.4285 \cdot \left(\frac{63}{200}\right) + 0.7121 = \\&= 1.132\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_y &= -0.1250 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y}\right)^2 + 0.3427 \cdot \left(\frac{L_x}{L_y}\right) + 0.7723 = -0.1250 \cdot \left(\frac{63}{200}\right)^2 + 0.3427 \cdot \left(\frac{63}{200}\right) + \\&+ 0.7723 = 0.867\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= h \cdot k_x^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot w \cdot E}{3 \cdot J}} = 10 \cdot 1.132^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2.4525 \cdot 10^5 \cdot 5.612 \cdot 10^{-3} \cdot 2.6 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 91.575}} = \\&= 6.5 \cdot 10^6 \text{ Па}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= h \cdot k_y^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot w \cdot E}{3 \cdot J}} = 10 \cdot 0.867^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2.4525 \cdot 10^5 \cdot 5.612 \cdot 10^{-3} \cdot 2.6 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 91.575}} = \\&= 3.8 \cdot 10^6 \text{ Па}\end{aligned}$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} = \frac{6.5 \cdot 10^6 + 3.8 \cdot 10^6}{4} = 2.6 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Опорное давление и коэффициент концентрации напряжений на момент посадки кровли:

$$P_M = \frac{q \cdot L_{\text{экв.х}}}{2} = \frac{2.45 \cdot 10^5 \cdot 76.6}{2} = 9.4 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Суммарное опорное давление:

$$P_{on} = P_M + \sigma_z + \gamma \cdot H = 9.4 \cdot 10^6 + 2.6 \cdot 10^6 + 2.45 \cdot 10^5 \cdot 600 = 26.7 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Коэффициент концентрации опорного давления:

$$k = \frac{P_{on}}{\gamma \cdot H} = \frac{26.7 \cdot 10^6}{2.45 \cdot 10^5 \cdot 600} = 1.81.$$

Сравнивая расчетные напряжения с предельно допустимыми

$$\sigma_x \leq \sigma_p, \quad P_{on} \leq \sigma_c,$$

$$6.5 \cdot 10^6 \leq 6.6 \cdot 10^6, \quad 26.7 \cdot 10^6 \leq 48.4 \cdot 10^6$$

определяем, что слой кровли мощностью 10 м при отходе лавы на 63 м не обрушается.

При дальнейшем подвигании лавы на 1 м ($L_x=64$ м), используя вышеописанный алгоритм расчета, получим следующие показания напряжений:

$$\sigma_x = 6.7 \cdot 10^6 \text{ Па}, P_{on} = 26.9 \cdot 10^6 \text{ Па}, k = 1.83.$$

Сравнивая их с предельно допустимыми: $\sigma_x \leq \sigma_p$, $P_{on} \leq \sigma_c$,

$$6.7 \cdot 10^6 > 6.6 \cdot 10^6, 26.9 \cdot 10^6 \leq 48.4 \cdot 10^6$$

Видим, что растягивающие напряжения в слое превышают предельно допустимые. При этом возможно обрушение слоя блоками.

Выводы

1. Предложенный расчетный метод, является универсальным для определения разрушающих напряжений и шага первичной посадки основной кровли, представленной толстой или тонкой плитами (слоями).

2. Применение предложенного расчетного метода позволяет уменьшить время расчета шага посадки кровли, по сравнению с расчетом плиты.

3. Предложенный метод дает возможность прогнозировать поведение пород кровли над очистным забоем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канлыбаева Ж.М. Закономерности сдвижения горных пород в массиве. Изд-во «Наука», 1968; 108 с. с ил.
2. Хохлов И.В. Комплексное исследование массива горных пород. – М.: Наука. 1986. – 163с .
3. Борисов А.А. Расчеты горного давления в лавах пологих пластов. – М.: Недра, 1964. – 278 с.
4. Жуков В.Е., Лобков Н.И., Сергиенко А.И. Исследование процесса деформирования слоистого горного массива над очистной выработкой. В сб. «Физико-технические проблемы горного производства» №9, под ред. А.Д. Алексева, Донецк: ИФГП НАН Украины, 2006. – С. 219–225.
5. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. К., «Наук. думка», 1972. – 506 с.
6. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. – Л.: Недра, 1989. – 488 с. с ил.
7. Кузнецов Г.Н. Моделирование проявлений горного давления. – М.: Недра, 1964. – 420 с.
8. Фисенко Г.Л. Предельные состояния горных пород вокруг выработок. – М.: Недра, 1976. – 272 с.
9. Справочник по теории упругости (для инженеров-строителей) под редакцией Варвака П.М. и Рябова А.Ф. Киев, «Будівельник», 1971. – С. 418.
10. Бубнов И.Г. Труды по теории пластин. – М., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 423 с. с ил.
11. Соппротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. учебник под ред. Г.С. Варданяна – М., Издательство АСВ, 1995. – 568 с.
12. Лобков Н.И., Сергиенко А.И., Сергиенко Л.Г., Моделирование характера поведения породного массива над выработанным пространством лав. Збірник наукових праць НГУ №26, Т. 1. – Дніпропетровськ: РВК НГУ, 2006. – С. 56–65.