

МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТООПТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ ДИСКРЕТНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Н. Рудякова, А. Ю. Липинский, В. В. Данилов

*Донецкий национальный университет,
ул. Университетская 24, Донецк, 83055, Украина
E-mail: krf@dongu.donetsk.ua*

Успешное проектирование цифровых акустооптических устройств включает в себя этап достаточно сложного моделирования физических процессов взаимодействия оптических и акустических волн в акустооптической среде, требующего привлечения численных методов расчета. В работе использован векторный метод конечных элементов во временной области для моделирования акустооптического взаимодействия в области конечных размеров. Полученные угловые соотношения между дифракционными максимумами нулевого и первого порядков соответствуют физической модели дифракции. Ил. 8. Табл. 1. Библиогр.: 15 назв.

Ключевые слова: моделирование, дискретная обработка.

В современных исследованиях в области разработки цифровой оптической вычислительной техники значительное внимание уделяется акустооптическим устройствам для создания высокоскоростных прецизионных процессоров, выполняющих операции линейной алгебры. К таким устройствам, в частности, относятся акустооптические цифровые процессоры корреляционного типа, реализующие операцию дискретной свертки [1 - 3]. При этом используются методы аналоговой обработки информации и цифрового представления данных.

Успешное проектирование цифровых акустооптических сигнальных процессоров включает в себя этап достаточно сложного моделирования физических процессов взаимодействия оптических и акустических волн в акустооптической среде, требующего привлечения численных методов расчета, позволяющих учесть конечность размеров области взаимодействия.

Как и большинство систем дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующих физические явления, уравнения Максвелла редко имеют строгое аналитическое решение. Случаи, для которых это выполняется, ограничены физическими системами с тривиальной геометрией (например, для кубических и сферических областей), либо системами, обладающими высокой степенью симметрии. Решение уравнений Максвелла, зависящих от времени для областей с нетривиальной геометрией (а также, зачастую, с нетривиальными граничными и начальными условиями) требует применения приближенных методов. Различные типы аппроксимационных схем охватывают широкий спектр разделов прикладной математики; однако они могут быть отнесены к двум различным категориям: аналитические приближенные и численные приближенные решения.

Численная аппроксимация, как правило, использует прямую замену непрерывных полей и их пространственных и временных производных (или

интегралов) дискретными численными аналогами и, таким образом, преобразует непрерывную систему в конечное число алгебраических уравнений, которые могут быть решены либо прямыми методами, либо итерационными с использованием ЭВМ.

Нами проведено моделирование акустооптических устройств дискретной обработки сигналов методом конечных элементов.

1. Моделирование векторным методом конечных элементов во временной области. При совместном распространении световых и акустических волн в упругих прозрачных средах наблюдается их взаимодействие, которое проявляется как дифракция световых волн на акустических. Физическая интерпретация этого явления такова. Световое поле возбуждает в каждом элементарном объеме диэлектрической среды электрический дипольный момент, который становится источником вторичного электромагнитного излучения. Акустическая волна, распространяющаяся в объеме диэлектрика, изменяет дипольные моменты во времени и пространстве, в результате чего электромагнитные и акустические поля оказываются параметрически связанными. Суммарное излучение, создаваемое дипольными моментами, существенно зависит от распределения акустического возмущения в объеме среды. В связи с этим, теоретический анализ проводится на основе уравнений Максвелла, записанных для объема среды с акустическим возбуждением [4]:

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H}; \quad (1)$$

$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}. \quad (2)$$

В предположении отсутствия нелинейных эффектов при распространении звуковой волны, диэлектрическую проницаемость среды можно представить в виде [5]

$$\varepsilon = n^2 + 2n\Delta n \sin(Kz - \Omega t + \Phi),$$

где n - показатель преломления невозмущенной среды; Δn - амплитуда изменения показателя преломления; K , Ω и Φ - соответственно волновое число, частота и начальная фаза акустической волны.

Для решения методом конечных элементов область акустооптического взаимодействия делится на дискретные элементы - тетраэдры. Для каждого из элементов путем разложения по базисным функциям записываются пробные решения. Полученный функционал минимизируется по отношению к неизвестным коэффициентам базисных функций при помощи метода Галеркина. Это приводит к системе алгебраических уравнений, в результате решения которой определяются коэффициенты базисных функций, и таким образом строится кусочно-линейная аппроксимация решения исходной электродинамической задачи [6,7].

Значения полей \vec{E} и \vec{H} в произвольной внутренней точке тетраэдра выражаются через так называемые степени свободы e_i и h_i (значения соответствующих полей на ребрах) и базисные функции: \vec{W}_i :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N_E} e_i \vec{W}_i; \quad (3)$$

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{N_E} h_i \vec{W}_i. \quad (4)$$

Систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно e_i и h_i можно получить, используя метод Галеркина. Домножим уравнения (1) и (2) на базисные функции \vec{W}_i и проинтегрируем по объему элемента:

$$\int_V \vec{W}_i \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times \vec{H} \right) dx dy dz = 0; \quad (5)$$

$$\int_V \vec{W}_i \cdot \left(\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} \right) dx dy dz = 0. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) можно записать как

$$\int_V \left(\varepsilon \frac{\partial (\vec{W}_i \cdot \vec{E})}{\partial t} - \vec{W}_i \cdot (\nabla \times \vec{H}) \right) dx dy dz = 0;$$

$$\int_V \left(\mu \frac{\partial (\vec{W}_i \cdot \vec{H})}{\partial t} + \vec{W}_i \cdot (\nabla \times \vec{E}) \right) dx dy dz = 0.$$

Меняя порядок интегрирования и дифференцирования, а также используя (3) и (4), можно получить:

$$C^e \frac{\partial \vec{e}^e}{\partial t} = K^e \vec{h}^e; \quad (7)$$

$$G^e \frac{\partial \vec{h}^e}{\partial t} = -K^e \vec{e}^e, \quad (8)$$

где $e^e = \{e_1, \dots, e_{N_E}\}^T$; $h^e = \{h_1, \dots, h_{N_E}\}^T$; C^e , G^e , K^e - матрицы, элементы которых вычисляются следующим образом:

$$C_{ij}^e = \int_V \varepsilon (\vec{W}_i \cdot \vec{W}_j) dx dy dz;$$

$$G_{ij}^e = \int_V \mu (\vec{W}_i \cdot \vec{W}_j) dx dy dz;$$

$$K_{ij}^e = \int_V \vec{W}_i \cdot (\nabla \times \vec{W}_j) dx dy dz.$$

Функции формы \vec{W}_i можно выразить через барицентрические координаты L_i тетраэдра следующим образом:

$$\vec{W}_k = l_{ij} (L_i \nabla L_j - L_j \nabla L_i), \quad (9)$$

где l_{ij} - длина k -го ребра тетраэдра:

$$l_{ij} = l_k = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

В таблице приведено соответствие между номерами ребер и составляющих их узлов.

Номер ребра k	Номер узла i	Номер узла j
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	4	2
6	3	4

Координаты L_i выражаются через декартовы координаты внутренней точки тетраэдра $P(x, y, z)$ как отношения соответствующих внутренних объемов V_i ко всему объему V [8,9]

$$L_i = \frac{V_i}{V}, \quad (10)$$

где

$$V_1 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

$$V_2 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

$$V_3 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

$$V_4 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix};$$

$$V = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

Выражение (10) можно записать в виде

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{3!V}, \quad (11)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i - соответствующие миноры V_i :

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad b_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad d_1 = - \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix};$$

$$a_2 = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

$$c_2 = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix};$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad b_3 = - \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad d_3 = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix};$$

$$a_4 = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad b_4 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

$$c_4 = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad d_4 = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Для интегрирования по объему тетраэдра удобна следующая формула [8, 9]:

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dx dy dz = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V.$$

Частные производные барицентрических координат по декартовым можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{3!V}, \quad \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{3!V}, \quad \frac{\partial L_i}{\partial z} = \frac{d_i}{3!V}. \quad (12)$$

Таким образом, с использованием (9), (11) и (12) компоненты базисных функций $W_{i,x}$,

$W_{i,y}$, $W_{i,z}$ могут быть записаны как:

$$W_{1,x} = \frac{l_1}{3!V} (L_1 b_2 - L_2 b_1),$$

$$W_{1,y} = \frac{l_1}{3!V} (L_1 c_2 - L_2 c_1), \quad (13)$$

$$W_{1,z} = \frac{l_1}{3!V} (L_1 d_2 - L_2 d_1);$$

$$W_{2,x} = \frac{l_2}{3!V} (L_1 b_3 - L_3 b_1),$$

$$W_{2,y} = \frac{l_2}{3!V} (L_1 c_3 - L_3 c_1), \quad (14)$$

$$W_{2,z} = \frac{l_2}{3!V} (L_1 d_3 - L_3 d_1);$$

$$W_{3,x} = \frac{l_3}{3!V} (L_1 b_4 - L_4 b_1),$$

$$W_{3,y} = \frac{l_3}{3!V} (L_1 c_4 - L_4 c_1), \quad (15)$$

$$W_{3,z} = \frac{l_3}{3!V} (L_1 d_4 - L_4 d_1);$$

$$W_{4,x} = \frac{l_4}{3!V} (L_2 b_3 - L_3 b_2),$$

$$W_{4,y} = \frac{l_4}{3!V} (L_2 c_3 - L_3 c_2), \quad (16)$$

$$W_{4,z} = \frac{l_4}{3!V} (L_2 d_3 - L_3 d_2);$$

$$W_{5,x} = \frac{l_5}{3!V} (L_4 b_2 - L_2 b_4),$$

$$W_{5,y} = \frac{l_5}{3!V} (L_4 c_2 - L_2 c_4), \quad (17)$$

$$W_{5,z} = \frac{l_5}{3!V} (L_4 d_2 - L_2 d_4);$$

$$\begin{aligned} W_{6,x} &= \frac{l_6}{3!V} (L_3 b_4 - L_4 b_3), \\ W_{6,y} &= \frac{l_1}{3!V} (L_3 c_4 - L_4 c_3), \\ W_{6,z} &= \frac{l_1}{3!V} (L_3 d_4 - L_4 d_3). \end{aligned} \quad (18)$$

Частные производные компонент базисных функций по декартовым координатам, с использованием (12) - (18) можно записать как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{1,x}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial W_{1,x}}{\partial y} = \frac{l_1}{(3!V)^2} (c_1 b_2 - c_2 b_1), \\ \frac{\partial W_{1,x}}{\partial z} &= \frac{l_1}{(3!V)^2} (d_1 b_2 - d_2 b_1), \\ \frac{\partial W_{1,y}}{\partial x} &= \frac{l_1}{(3!V)^2} (b_1 c_2 - b_2 c_1), \quad \frac{\partial W_{1,y}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial W_{1,y}}{\partial z} &= \frac{l_1}{(3!V)^2} (d_1 c_2 - d_2 c_1), \\ \frac{\partial W_{1,z}}{\partial x} &= \frac{l_1}{(3!V)^2} (b_1 d_2 - b_2 d_1), \\ \frac{\partial W_{1,z}}{\partial y} &= \frac{l_1}{(3!V)^2} (c_1 d_2 - c_2 d_1), \quad \frac{\partial W_{1,z}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial W_{2,x}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial W_{2,x}}{\partial y} = \frac{l_2}{(3!V)^2} (c_1 b_3 - c_3 b_1), \\ \frac{\partial W_{2,x}}{\partial z} &= \frac{l_2}{(3!V)^2} (d_1 b_3 - d_3 b_1), \\ \frac{\partial W_{2,y}}{\partial x} &= \frac{l_2}{(3!V)^2} (b_1 c_3 - b_3 c_1), \quad \frac{\partial W_{2,y}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial W_{2,y}}{\partial z} &= \frac{l_2}{(3!V)^2} (d_1 c_3 - d_3 c_1), \\ \frac{\partial W_{2,z}}{\partial x} &= \frac{l_2}{(3!V)^2} (b_1 d_3 - b_3 d_1), \\ \frac{\partial W_{2,z}}{\partial y} &= \frac{l_2}{(3!V)^2} (c_1 d_3 - c_3 d_1), \quad \frac{\partial W_{2,z}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial W_{3,x}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial W_{3,x}}{\partial y} = \frac{l_3}{(3!V)^2} (c_1 b_4 - c_4 b_1), \\ \frac{\partial W_{3,x}}{\partial z} &= \frac{l_3}{(3!V)^2} (d_1 b_4 - d_4 b_1), \\ \frac{\partial W_{3,y}}{\partial x} &= \frac{l_3}{(3!V)^2} (b_1 c_4 - b_4 c_1), \quad \frac{\partial W_{3,y}}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{3,y}}{\partial z} &= \frac{l_3}{(3!V)^2} (d_1 c_4 - d_4 c_1), \\ \frac{\partial W_{3,z}}{\partial x} &= \frac{l_3}{(3!V)^2} (b_1 d_4 - b_4 d_1), \\ \frac{\partial W_{3,z}}{\partial y} &= \frac{l_3}{(3!V)^2} (c_1 d_4 - c_4 d_1), \quad \frac{\partial W_{3,z}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial W_{4,x}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial W_{4,x}}{\partial y} = \frac{l_4}{(3!V)^2} (c_2 b_3 - c_3 b_2), \\ \frac{\partial W_{4,x}}{\partial z} &= \frac{l_4}{(3!V)^2} (d_2 b_3 - d_3 b_2), \\ \frac{\partial W_{4,y}}{\partial x} &= \frac{l_4}{(3!V)^2} (b_2 c_3 - b_3 c_2), \quad \frac{\partial W_{4,y}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial W_{4,y}}{\partial z} &= \frac{l_4}{(3!V)^2} (d_2 c_3 - d_3 c_2), \\ \frac{\partial W_{4,z}}{\partial x} &= \frac{l_4}{(3!V)^2} (b_2 d_3 - b_3 d_2), \\ \frac{\partial W_{4,z}}{\partial y} &= \frac{l_4}{(3!V)^2} (c_2 d_3 - c_3 d_2), \quad \frac{\partial W_{4,z}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial W_{5,x}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial W_{5,x}}{\partial y} = \frac{l_5}{(3!V)^2} (c_4 b_2 - c_2 b_4), \\ \frac{\partial W_{5,x}}{\partial z} &= \frac{l_5}{(3!V)^2} (d_4 b_2 - d_2 b_4), \\ \frac{\partial W_{5,y}}{\partial x} &= \frac{l_5}{(3!V)^2} (b_4 c_2 - b_2 c_4), \quad \frac{\partial W_{5,y}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial W_{5,y}}{\partial z} &= \frac{l_5}{(3!V)^2} (d_4 c_2 - d_2 c_4), \\ \frac{\partial W_{5,z}}{\partial x} &= \frac{l_5}{(3!V)^2} (b_4 d_2 - b_2 d_4), \\ \frac{\partial W_{5,z}}{\partial y} &= \frac{l_5}{(3!V)^2} (c_4 d_2 - c_2 d_4), \quad \frac{\partial W_{5,z}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial W_{6,x}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial W_{6,x}}{\partial y} = \frac{l_6}{(3!V)^2} (c_3 b_4 - c_4 b_3), \\ \frac{\partial W_{6,x}}{\partial z} &= \frac{l_6}{(3!V)^2} (d_3 b_4 - d_4 b_3), \\ \frac{\partial W_{6,y}}{\partial x} &= \frac{l_6}{(3!V)^2} (b_3 c_4 - b_4 c_3), \quad \frac{\partial W_{6,y}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial W_{6,y}}{\partial z} &= \frac{l_6}{(3!V)^2} (d_3 c_4 - d_4 c_3), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W_{6,z}}{\partial x} = \frac{l_6}{(3!V)^2} (b_3 d_4 - b_4 d_3),$$

$$\frac{\partial W_{6,z}}{\partial y} = \frac{l_6}{(3!V)^2} (c_3 d_4 - c_4 d_3), \quad \frac{\partial W_{6,z}}{\partial z} = 0.$$

Выбор способа разбиения, формы и размеров элемента в значительной степени определяет успешное решение задачи моделирования методом конечных элементов. В работе используется метод тесселяции Делонэ [10]. Основным принципом, лежащим в основе метода, является то, что в сферу, описанную вокруг данного тетраэдра, не должны попадать точки другого тетраэдра. Пример разбиения области моделирования слабого акустооптического взаимодействия на 12979 элементов приведен на рис. 1.

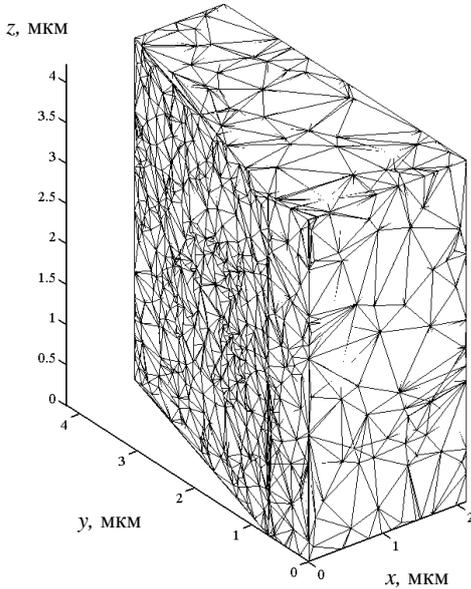


Рис. 1. Разбиение области акустооптического взаимодействия на 12979 тетраэдров

При вычислении матриц C^e и G^e , с использованием соответствующих базисных функций учитывается изменение показателя преломления под воздействием акустической волны в области акустооптического взаимодействия.

Симметричность, разреженность и положительная определенность этих матриц [11] делает возможным применение метода сопряженных градиентов с предобуславливателем (неполная факторизация Холецкого) [12] на этапе численного решения дифференциальных уравнений (7), (8). Иллюстрация разреженности матриц C^e и G^e представлена на рис. 2.

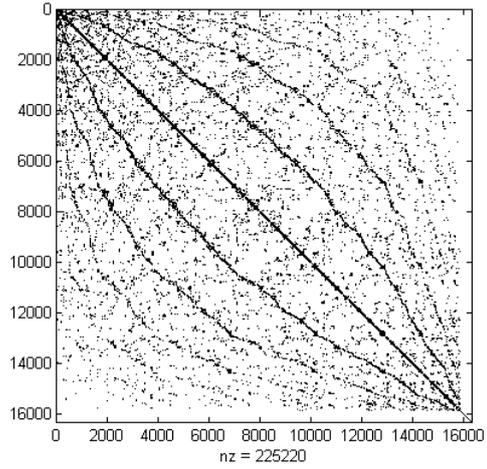


Рис. 2. Иллюстрация разреженности матриц C^e и G^e

По осям абсцисс и ординат отложены номера столбцов и строк матриц, соответственно. Ненулевые значения элементов матриц обозначены точками.

Для световой волны, имеющей гауссов профиль распределения интенсивности в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения, в однородной среде компоненты поля можно записать [13]:

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(x)} \times \exp \left\{ -i[kx - \eta(x)] - i \frac{kr^2}{2q(x)} \right\} = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(x)} \times \exp \left\{ -i[kx - \eta(x)] - r^2 \left(\frac{1}{\omega^2(x)} + \frac{ik}{2R(x)} \right) \right\}, \quad (19)$$

где

$$\omega^2(x) = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda x}{\pi \omega_0^2 n} \right)^2 \right] = \omega_0^2 \left(1 + \frac{x^2}{x_0^2} \right); \quad (20)$$

$$R = x \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda x} \right)^2 \right] = z \left(1 + \frac{x_0^2}{x^2} \right); \quad (21)$$

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{x + i(\pi \omega_0^2 n / \lambda)} = \frac{1}{R(x)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(x) n}; \quad (22)$$

$$\eta(x) = \arctg \left(\frac{\lambda x}{\pi \omega_0^2 n} \right) = \arctg \left(\frac{x}{x_0} \right); \quad (23)$$

$$x_0 = \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda}.$$

Фундаментальный гауссов пучок определяется выражением (19). Параметр $\omega(x)$ задает радиус пучка, равный расстоянию r , на котором амплитуда поля убывает в e раз по сравнению со значением на оси. Параметр R представляет собой радиус кривизны волновых фронтов в сечении x .

В плоскости $x=0$ из (19) - (23) можно получить $\omega^2(x) = \omega_0^2$, $R = 0$, $\eta(x) = 0$,

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{i \left(\frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda} \right)},$$

$$E(x, y, z) = E_0 \exp \left\{ -i \frac{kr^2}{2i \left(\frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda} \right)} \right\} = E_0 \exp \left\{ -\frac{r^2}{\omega_0^2} \right\}. \quad (24)$$

Выражение (24) задает граничное условие для напряженностей электрического и магнитного полей в плоскости ввода световой волны в область акустооптического взаимодействия.

В качестве граничного условия для боковых поверхностей оптимально использовать импедансное граничное условие (Absorbing Boundary Condition, ABC), одной из разновидностей которого является идеально согласованный слой (Perfectly Matched Layer, PML). Математическое описание такого слоя (PML) существенно усложняет задачу моделирования акустооптического взаимодействия в области конечных размеров, кроме того, требует дополнительных вычислительных мощностей, что не всегда является приемлемым. Если же при моделировании ограничиться участком распространения световой волны, на котором она не достигает боковых поверхностей вследствие расходимости, то допустимо использование граничного условия Дирихле.

Большинство наиболее часто используемых методов численного интегрирования (Эйлера, Рунге-Кутта, Адамса-Башфорта) являются по существу диссипативными. Это может привести к некорректным результатам для систем, которые необходимо моделировать для достаточно больших временных интервалов [14].

Для электродинамических задач, в которых нет физического рассеяния энергии из-за проводимости или поглощающих граничных условий, общая электромагнитная энергия должна оставаться постоянной. Использование же диссипативных методов приводит к экспоненциальному затуханию численных значений полной энергии.

С учетом выше сказанного, для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7), (8) выбран условно устойчивый недиссипативный метод второго порядка "leap-frog" [8]. При этом первые производные интенсивностей электрического и магнитного полей заменялись конечно-разностными аппроксимациями следующим образом:

$$\frac{de}{dt} \approx \frac{e_n - e_{n-1}}{\Delta t}; \quad (25)$$

$$\frac{dh}{dt} \approx \frac{h_{n+\frac{1}{2}} - h_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \quad (26)$$

где Δt - шаг по времени; n - номер шага. Как видно из (25) и (26), значения поля E вычисляются для полных временных шагов, а поля H - для половинных.

2. Результаты моделирования. На рис. 3, 4 представлены распределения модулей напряженности электрического поля, а на рис. 5, 6 - магнитного, в области акустооптического взаимодействия размерами $6\lambda \times 6\lambda \times 3\lambda$, световой пучок падает под углом Брэгга. Для рис. 3, 5 изменение коэффициента преломления, обусловленное звуковой волной, распространяющейся вдоль оси y , составляет 0,5; для рис. 4, 6 это изменение составляет 0,25.

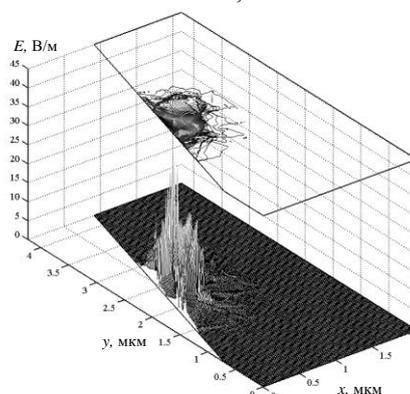


Рис. 3. Модуль напряженности электрического поля, $\Delta n = 0,5$

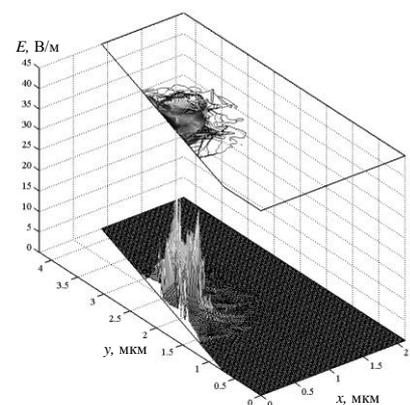


Рис. 4. Модуль напряженности электрического поля, $\Delta n = 0,25$

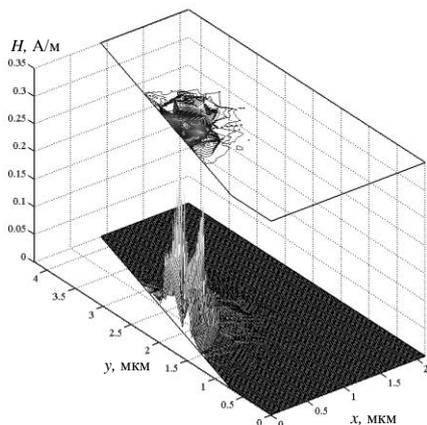


Рис. 5. Модуль напряженности магнитного поля, $\Delta l = 0,5$

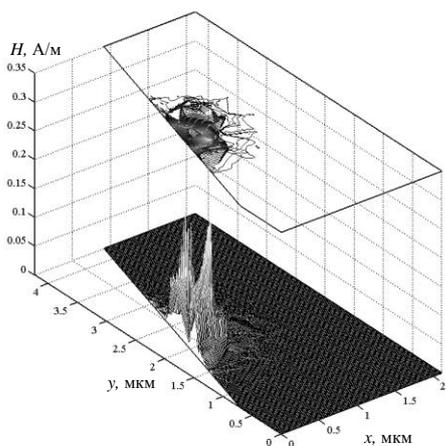


Рис. 6. Модуль напряженности магнитного поля, $\Delta l = 0,25$

Были рассчитаны угловые зависимости модуля вектора Умова-Пойтинга для $\Delta l = 0$ (рис. 7) и $\Delta l = 0,5$ (рис. 8). Как видно из рис. 7, 8 происходит перераспределение энергии оптического пучка, падающего под углом Брэгга θ_B .

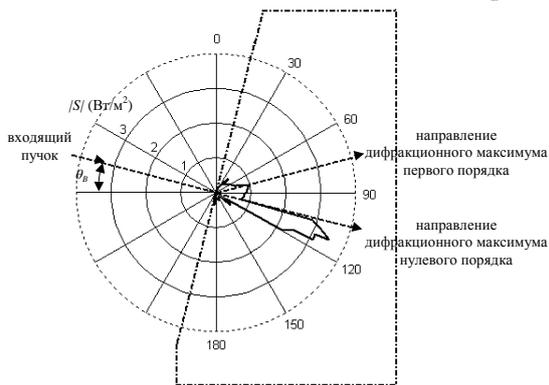


Рис. 7. Угловое распределение модуля вектора Умова - Пойтинга, $\Delta l = 0$

Угловые соотношения между дифракционными максимумами нулевого и первого порядков соответствуют физической модели дифракции [14, 15].

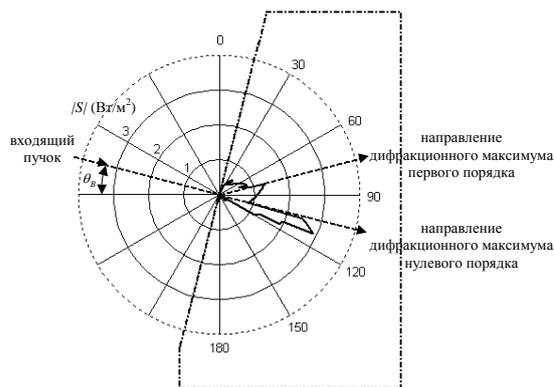


Рис. 8. Угловое распределение модуля вектора Умова - Пойтинга, $\Delta l = 0,5$

Выводы. Использование метода конечных элементов позволяет моделировать работу акустооптических устройств с дискретным распределением акустической мощности.

Метод позволяет эффективно рассчитывать не только «предельные» теоретические режимы дифракции Рамана-Ната и Брэгга, но и промежуточные, на которых часто работают реальные устройства.

Дальнейшее развитие метода связано с использованием в качестве граничных условий идеально поглощающего слоя.

1. Гуляев Ю. В., Проклов В. В., Соколовский С. В., Сотников В. Н. Акустооптические устройства обработки аналоговой и цифровой информации // Радиотехника и электроника. - 1987. - Вып. 1. - С.169-181.
2. Липинский А. Ю., Рудякова А. Н., Данилов В. В. Физическая модель акустооптического процессора цифровой обработки сигналов // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. - 2006. - №1(61). - С.9-12.
3. Logette P., Goutin P., Rouvaen J. M., Bridoux E., Programmable hybrid acousto-optic processor for transversal and recursive filtering // Proceedings of Ultrasonics Symposium. - 1991. - 1.1 - P.569-572.
4. Функциональные устройства обработки сигналов / С. А. Баруздин, Ю. В. Егоров, Б. А. Калиникос и др. - М.: Радио и связь, 1997. - 286 с.
5. Балакиев В. И., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Физические основы акустооптики. - М.: Радио и связь, 1985. - 280 с.
6. Lipinskii A. Y., Rudiakova A. N., Danilov V. V. Time-domain finite element modeling of weak acousto-optic interaction // MNET'2006 Proceedings. - 2006. - P.309-311.
7. Липинский А. Ю., Рудякова А. Н., Данилов В. В. Моделирование слабого акустооптического взаимодействия методом конечных элементов во временной области // Реєстрація, зберігання і обробка даних. - 2006. - 8, №2. - С.25-37.
8. Volakis J. L., Chatterjee A. and Kempel L. C. Finite Element Method for Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications. //IEEE Press and Oxford University Press. - New York. - 1998. - 368p.
9. Segerlind L. J. Applied Finite Element Analysis. // J. Wiley & Sons. - New York. - 1987. - 427p.
10. Ribeiro Filho M., Pinho J. T., Silva J. P., Nobrega K. Z., Hernandez-Figueroa H. E. A FEM mesh generator for large size aspect ratio problems with applications in optoelectronics // Proceedings of the 2003 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference. - 2003. - 2. - P.589-593.

11. *Rieben R. N., White D. A., Rodrigue G. H.* Improved conditioning of finite element matrices using new high-order interpolatory bases // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. - 2004. - 52, №1. - P.2675-2683.
12. *Rodrigue G., White D.* A vector finite element time-domain method for solving Maxwell's equations on unstructured hexahedral grids // *SIAM J. Sci. Comput.* - 2001. - 23, №3, - P.683-706.
13. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. - М.: Мир, 1987. - 616 с.
14. *Rieben R., White D., Rodrigue G.* High-order symplectic integration methods for finite element solutions to time dependent Maxwell equations // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. - 2004. - 52, №8, - P.2190-2195.
15. *Korpel A.* Acousto-optic - A review of fundamentals // *Proceedings of the IEEE*, 1981. - 69, №1. - P.48-53.

FINITE ELEMENT MODELING OF ACOUSTOOPTIC DISCRETE DATA PROCESSING DEVICES

A. N. Rudiakova, A. Y. Lipinskii, V. V. Danilov

Successful design of digital acoustooptic devices includes the quite complex step of physical phenomena modeling. This phenomenon is interaction between optical and acoustic waves within the acoustooptic media, and its investigation requires the using of numerical

methods. The paper presents the vector time-domain finite-element method for the modeling of finite-size acoustooptic interaction region. Obtained angle relations between the diffraction maximums of zero and first orders are agreeing with the physical model of diffraction.

Key words: modeling, discrete processing.

МОДЕЛЮВАННЯ АКУСТООПТИЧНИХ ПРИСТРОЇВ ДИСКРЕТНОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Г. М. Рудякова, О. Ю. Ліпінський, В. В. Данилов

Успішне проектування цифрових акустооптичних пристроїв містить у собі етап досить складного моделювання фізичних процесів взаємодії оптичних і акустичних хвиль в акустооптичному середовищі, та вимагає залучення чисельних методів розрахунку. У роботі використано векторний метод кінцевих елементів у часовій області для моделювання акустооптичної взаємодії в області кінцевих розмірів. Отримані кутові співвідношення між дифракційними максимумами нульового і першого порядків відповідають фізичній моделі дифракції.

Ключові слова: моделювання, дискретна обробка.

Рукопись поступила 17 июля 2006 г.