

КОЛЕБАНИЯ "ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ" В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ НА НЕИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Ю. Ф. Филиппов

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова, НАН Украины,
12, ул. Ак. Проскуры, Харьков, 61085, Украина
E-mail: fil@ire.kharkov.ua*

Развита теория собственных колебаний в полусферическом резонаторе, расположенном на неидеально проводящей плоскости. При удовлетворении граничным условиям на этой плоскости получено функциональное уравнение, решения которого определяют комплексные полярные индексы. Непрерывность компонент напряженностей электромагнитных полей, тангенциальных к сферической поверхности резонатора, приводит к дисперсионным уравнениям. Решения их определяют спектральные характеристики собственных колебаний "шепчущей галереи". Ил. 1. Библиогр.: 17 назв.

Ключевые слова: полусферический диэлектрический резонатор, колебания "шепчущей галереи", функциональное уравнение, полярный индекс, дисперсионное уравнение.

В последнее время все большее внимание уделяется высокочастотным собственным колебаниям "шепчущей галереи", которые возникают в открытых диэлектрических резонаторах. Почти полное внутреннее отражение полей от гладкой криволинейной поверхности приводит к слабому излучению их энергии. Оно впервые наблюдалось на звуковых колебаниях, распространяющихся по цилиндрической поверхности галереи, и физически было объяснено Рэлеем [1]. Распространяющиеся по криволинейным диэлектрическим поверхностям слабозатухающие электромагнитные колебания также получили название колебаний "шепчущей галереи" [2-3]. Возможность применения их в технике связана с высокой добротностью, тонким слоем локализации полей на границах раздела между различными средами. В настоящее время диэлектрические резонаторы широко применяются при неразрушающем измерении диэлектрических проницаемостей веществ, для фильтрации сигналов, стабилизации частоты генераторов и т. д. Имея одну и ту же частоту при всех значениях азимутальных индексов $m \leq n$, собственные колебания с полярным индексом n в однородном изотропном шаре $2n+1$ -кратно вырождены. В эллипсоидальном резонаторе наблюдается снятие вырождения [4]. Влияние одноосной анизотропии приводит также к появлению обыкновенных и необыкновенных собственных колебаний [5-6].

Функционально новыми возможностями обладает открытый диэлектрический полусферический резонатор. В частности, источники возбуждения могут быть размещены на его подложке в виде щели связи [7]. При отсутствии азимутальной симметрии их распределение энергии колебаний "шепчущей галереи" на сферической поверхности принимает вид поясков. Для колебаний H типа они параллельны поверхности подложки, а для E типа проходят через полюс. Форма и

размеры полей этих поясков определяются местом расположения источника [7-11]. При идеальной проводимости подложки в резонаторе наблюдается $n+1$ кратное частотное вырождение. Исчезают колебания, для которых у H типа сумма значений m и n нечетна, а для E типа - четная. Влияние поверхностного сопротивления оказывает существенное влияние на параметры собственных колебаний. Действительная часть его определяет потери энергии колебаний при отражении от подложки резонатора. Мнимая часть (реактанс) определяет энергию, запасенную в поверхностном слое подложки. При очень малых значениях импеданса в работе [12] приведено приближенное решение полученного интегрального уравнения. Показано, что с увеличением значений полярного индекса добротность резонатора асимптотически приближается к максимальному значению, наблюдаемому в эксперименте.

Ниже приведены дисперсионные уравнения возбужденного на колебаниях "шепчущей галереи" полусферического резонатора с неидеально проводящей плоскостью.

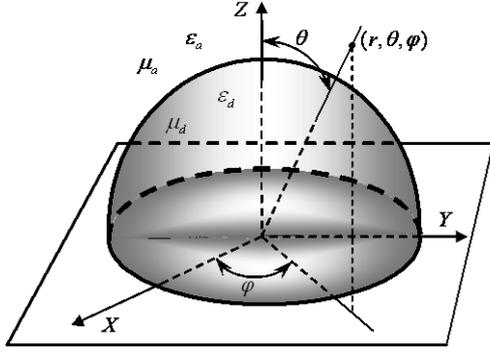
1. Постановка задачи. Основные уравнения. Открытый однородный изотропный полусферический резонатор расположен в среде с проницаемостями ε_a, μ_a , а основанием на неидеально проводящей плоскости. Резонатор изготовлен из материала с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_d, μ_d .

На подложке должно удовлетворяться граничное условие Леонтовича-Щукина [13]

$$[\vec{i}_z \times \vec{E}^w] = \zeta [\vec{i}_z \times [\vec{i}_z \times \vec{H}^w]]. \quad (1)$$

Здесь \vec{E} и \vec{H} электрическая и магнитная напряженности электромагнитных полей, вектор \vec{i}_z определяет нормаль к плоскости. Индекс w , принимающий значения d, a , относится соответственно

к полям внутри и вне полусферы (рисунок).



$$\zeta = \zeta_1 - i\zeta_2$$

Диэлектрический полусферический резонатор на идеально проводящей плоскости

Для монохроматических колебаний, зависящих от времени в виде опускаемого ниже множителя $\exp(-i\omega t)$, из системы уравнений Максвелла

$$\text{rot}\vec{E}^w = ik\mu_w\vec{H}^w; \text{rot}\vec{H}^w = -ik\varepsilon_w\vec{E}^w \quad (2)$$

получаются дифференциальные уравнения [14-15]:

$$\begin{aligned} (L_w + \frac{\Delta_{\perp}}{r^2})U_w^E(r, \theta, \varphi) &= 0; \\ (L_w + \frac{\Delta_{\perp}}{r^2})U_w^H(r, \theta, \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции $U_w^{E,H}(r, \theta, \varphi)$ связаны с радиальными компонентами $E_r^w(r, \theta, \varphi)$, $H_r^w(r, \theta, \varphi)$ соотношениями

$$\begin{aligned} E_r^w(r, \theta, \varphi) &= L_w U_w^E(r, \theta, \varphi), \\ H_r^w(r, \theta, \varphi) &= L_w U_w^H(r, \theta, \varphi), \end{aligned}$$

где

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};$$

$L_w = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_w^2$; $\chi_w = \sqrt{\varepsilon_w \mu_w} k$; $k = \omega/c$; c - скорость света; ω частота собственных колебаний.

Остальные компоненты определяются через эти функции следующим образом:

$$\begin{aligned} r \sin\theta H_{\theta}^w &= \sin\theta \frac{\partial^2 U_w^H}{\partial r \partial\theta} - ik\varepsilon_w \frac{\partial U_w^E}{\partial\varphi}; \\ r \sin\theta H_{\varphi}^w &= \frac{\partial^2 U_w^H}{\partial r \partial\varphi} + ik\varepsilon_w \sin\theta \frac{\partial U_w^E}{\partial\theta}; \\ r \sin\theta E_{\theta}^w &= \sin\theta \frac{\partial^2 U_w^E}{\partial r \partial\theta} + ik\mu_w \frac{\partial U_w^H}{\partial\varphi}; \\ r \sin\theta E_{\varphi}^w &= \frac{\partial^2 U_w^E}{\partial r \partial\varphi} - ik\mu_w \sin\theta \frac{\partial U_w^H}{\partial\theta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решения (3) должны удовлетворять граничным условиям [14-16]:

- конечности амплитуд полей колебаний в центре полусферы $r=0$;

- отсутствию входящей и наличию уходящей волны при радиальной координате $r \rightarrow \infty$;

- условию (1) при полярной координате $\theta = \pi/2$; - непрерывности тангенциальных компонент напряженностей электромагнитных полей на сферической поверхности $r = r_d$.

Эти решения представим в виде разложения

$$\begin{aligned} U_w^E(r, \theta, \varphi) &= \sum_{v,m} U_{v,m}^{w,E}(r, \theta, \varphi) = \\ &= \sum_{v,m} A_{v,m}^w R_v(x_w) P_v^m(\cos\theta) \Psi_{\varphi}; \\ U_w^H(r, \theta, \varphi) &= \sum_{v,m} U_{v,m}^{w,H}(r, \theta, \varphi) = \\ &= \sum_{v,m} B_{v,m}^w R_v(x_w) P_v^m(\cos\theta) \Psi_{\varphi}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Psi_{\varphi} = \exp(im\varphi)$; $x_w = \chi_w r$; $A_{v,m}^w$ и $B_{v,m}^w$ постоянные. Функции $U_{v,m}^{w,S}$ описывают поля собственных мод. Под функцией $P_v^m(\cos\theta)$ подразумеваются присоединенные функции Лежандра первого рода. Азимутальные индексы m , принимая целые значения, характеризуют число вариаций полей по азимутальной координате. Влияние импеданса ζ приводит к нецелым и к комплексным значениям полярных индексов v . Этот параметр удобно представлять в виде $v = n + \xi$. Индекс n определяет число вариаций полей по полярной координате при азимутальном индексе m равном нулю. Параметр ξ характеризует влияние импеданса на спектральные характеристики колебаний.

Функции $R_v(x_w)$, описывающие зависимость полей от радиальной координаты и удовлетворяющие указанным выше граничным условиям, запишем в виде

$$\begin{aligned} R_v(x_d) &= j_v(\chi_d r), \text{ при } r \leq r_d; \\ R_v(x_a) &= h_v^{(1)}(\chi_d r), \text{ при } r \geq r_d, \end{aligned} \quad (6)$$

где $j_v(x) = \sqrt{\pi x/2} J_{v+1/2}(x)$; $h_v^{(1)}(x) = \sqrt{\pi x/2} H_{v+1/2}^{(1)}(x)$; $f_v = 1/(2v+1)$; $J_v(x)$, $H_v^{(1)}(x)$ - цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля первого рода. Для функций $R_v(x)$ справедливы рекуррентные соотношения [16-17]:

$$\begin{aligned} R_v(x) &= f_v x [R_{v+1}(x) + R_{v-1}(x)]; \\ x R_v'(x) &= f_v [(v+1)R_{v-1}(x) - vR_{v+1}(x)], \end{aligned} \quad (7)$$

штрих у цилиндрических функций обозначает дифференцирование по аргументу. Многократно используя первое соотношение в (7), легко показать, что

$$2xR_\nu(x) = \frac{R_{\nu+1}(x)}{f_{\nu+1}} + \frac{R_{\nu-1}(x)}{f_{\nu-1}} - \frac{R_{\nu+3}(x)}{f_{\nu+3}} - \dots \quad (7, a)$$

Замечаем, что правая часть в (7, а) состоит из знакопеременного бесконечного ряда.

2. Граничные условия на идеально проводящей плоскости. Функциональное уравнение. Граничные условия (1) при полярной координате $\theta = \pi/2$ в компонентах записываются в виде

$$E_\varphi^w(r, \pi/2, \varphi) = -\zeta H_r^w(r, \pi/2, \varphi),$$

$$E_r^w(r, \pi/2, \varphi) = \zeta H_\varphi^w(r, \pi/2, \varphi).$$

Подставив в эти условия выражения для компонент полей:

$$r^2 E_r^w(r, \pi/2, \varphi) = \sum_{n,m} \nu(\nu+1) A_{\nu,m}^w P_\nu^m(0) R_\nu(x_w) \Psi_\varphi;$$

$$r^2 H_r^w(r, \pi/2, \varphi) = \sum_{n,m} \nu(\nu+1) B_{\nu,m}^w P_\nu^m(0) R_\nu(x_w) \Psi_\varphi;$$

$$r H_\varphi^w(r, \pi/2, \varphi) = i \sum_{n,m} [m \chi_w B_{\nu,m}^w P_\nu^m(0) R'_\nu(x_w) +$$

$$+ \varepsilon_w k P_\nu^m(0) A_{\nu,m}^w R_\nu(x_w)] \Psi_\varphi;$$

$$r E_\varphi^w(r, \pi/2, \varphi) = i \sum_{n,m} [m \chi_w A_{\nu,m}^w P_\nu^m(0) R'_\nu(x_w) +$$

$$+ \varepsilon_w k P_\nu^m(0) A_{\nu,m}^w R_\nu(x_w)] \Psi_\varphi,$$

приравняем множители, стоящие при функциях Ψ_φ .

Зафиксировав азимутальный индекс, опустив для сокращения записи индексы m и w , введя обозна-

чения $P_\nu = P_\nu^m(0)$, $P'_\nu = P'_\nu^m(0) \equiv (\frac{dP_\nu^m(x)}{dx})_{x=0}$,

получаем систему уравнений, содержащую радиальные функции $R_\nu(x)$ и их производные

$R'_\nu(x)$:

$$\begin{aligned} & \sum_\nu \nu(\nu+1) R_\nu(x) P_\nu A_\nu = \\ & = i\zeta \sum_\nu [m x R'_\nu(x) P_\nu B_\nu + \varepsilon k r R_\nu(x) P'_\nu A_\nu]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sum_\nu [m x R'_\nu(x) P_\nu A_\nu - \mu k r R_\nu(x) P'_\nu B_\nu] =$$

$$= \sum_\nu i\zeta \nu(\nu+1) R_\nu(x) P_\nu B_\nu.$$

Функции $R_\nu(x)$ и их производные зависят от радиальной координаты, что приводит к затруднениям при исследовании (8).

Функции Лежандра в плоскости основания выражаются через тригонометрические функции следующим образом [16]:

$$\begin{aligned} P_\nu^m(0) &= g_{\nu m} \cos(\gamma_{\nu m}) = \\ &= g_{\nu m} [\cos \gamma_{n+m} \cos \gamma_\xi - \sin \gamma_{n+m} \sin \gamma_\xi]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} P_\nu^{m'}(0) &= 2\bar{g}_{\nu m} \sin(\gamma_{\nu m}) = \\ &= 2\bar{g}_{\nu m} [\sin \gamma_{n+m} \cos \gamma_\xi + \cos \gamma_{n+m} \sin \gamma_\xi], \end{aligned}$$

где $\gamma_{\nu,m} = \gamma_{n+m} + \gamma_\xi$; $\gamma_{n+m} = (n+m)\pi/2$;

$$\gamma_\xi = \xi\pi/2; \quad g_{\nu m} = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[(\nu+m+1)/2]}{\Gamma[(\nu-m+2)/2]};$$

$$\bar{g}_{\nu m} = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[(\nu+m+2)/2]}{\Gamma[(\nu-m+1)/2]}.$$

$\Gamma(y)$ описывает гамму функцию, для которой справедливы соотношения

$$\Gamma(y+j) = y(y+1)\dots(y+j-1)\Gamma(y);$$

$$\Gamma(y) = (y-1)\dots(y-j)\Gamma(y-j); \quad \Gamma(1) = 1;$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

На идеально проводящей поверхности параметр $\zeta = 0$, а система (8) принимает вид

$$\sum_\nu \nu(\nu+1) R_\nu(x) P_\nu A_\nu = 0,$$

$$\sum_\nu [m x R'_\nu(x) P_\nu A_\nu - \mu k r R_\nu(x) P'_\nu B_\nu] = 0.$$

При всех значениях радиальной координаты эта система удовлетворяется только при выполнении условий $P_\nu^m(0) = 0$ и $P'_\nu^m(0) = 0$. Приходим к соотношениям

$$\cos(\gamma_{\nu+m}) A_\nu = 0; \quad B_\nu = 0;$$

$$\sin(\gamma_{\nu+m}) B_\nu = 0; \quad A_\nu = 0.$$

Нетривиальные решения их

$$\cos(\gamma_{\nu+m}) = 0 \text{ при } A_\nu \neq 0; B_\nu = 0; \quad (10)$$

$$\sin(\gamma_{\nu+m}) = 0 \text{ при } B_\nu \neq 0; A_\nu = 0$$

выполняются при равенстве $\xi = 0$. Это приводит к тому, что в полусфере с идеально проводящей подложкой полярный индекс принимает только целые значения. В структуре существуют независимые типы колебаний

$$E(H_r = 0) \text{ и } H(E_r = 0).$$

Колебания E типа возникают только при нечетных значениях $n+m$, а H типа при четных значениях этой суммы [7-8]. Частоты их определяются решениями уравнений:

для E колебаний -

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_d}{\mu_d}} \frac{j'_n(x_d)}{j_n(x_d)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} \frac{h_n^{(1)}(x_a)}{h_n^{(1)}(x_a)}; \quad (11, a)$$

для H колебаний -

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} \frac{j'_n(x_d)}{j_n(x_d)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_d}{\mu_d}} \frac{h_n^{(1)}(x_a)}{h_n^{(1)}(x_a)}. \quad (11, б)$$

Рассмотрим теперь резонатор с неидеально проводящим основанием. Исключим в системе (8) функции $xR'_v(x)$ и $xR_v(x)$. Приравняв коэффициенты при функциях $R_v(x)$, разделим обе части в полученных выражениях на $\cos(\gamma_{\nu+m})$. Из (9) следует, что необходимо раздельно рассматривать четные и нечетные значения сумм $n+m$. Зафиксируем азимутальный индекс и обозначим $\tau = \text{tg}(\gamma_\xi)$. Из (9) следует, что

$\text{tg}(\gamma_{\nu+m}) = \tau$ при четных значениях суммы $n+m$ и $\text{tg}(\gamma_{\nu+m}) = -1/\tau$ - при нечетных. В полученных выражениях функции $\text{tg}(\gamma_{n+m})$ отсутствуют.

Исследуем сначала случай, когда суммы индексов n и m принимают четные значения. Полученную бесконечную систему алгебраических уравнений относительно амплитуд A_ν и B_ν приведем, обозначив $\delta = \sqrt{\varepsilon/\mu}$, к следующему виду:

$$\begin{aligned} \nu(\nu+1)g_\nu A_\nu &= -i\zeta\{m[(\nu+2)f_{\nu+1}g_{\nu+1}B_{\nu+1} + (\nu-1)f_{\nu-1}g_{\nu-1}B_{\nu-1}]\tau - \frac{\delta}{f_\nu}[\bar{g}_{\nu+1}A_{\nu+1} - \\ &- \bar{g}_{\nu-1}A_{\nu-1} + \bar{g}_{\nu+3}A_{\nu+3} - \bar{g}_{\nu-3}A_{\nu-3} + \bar{g}_{\nu+5}A_{\nu+5} - \bar{g}_{\nu-5}A_{\nu-5} + \bar{g}_{\nu+7}A_{\nu+7} - \bar{g}_{\nu-7}A_{\nu-7}\dots]\}; \\ i\zeta\nu(\nu+1)g_\nu B_\nu &= -\{m[(\nu+2)f_{\nu+1}g_{\nu+1}A_{\nu+1} + (\nu-1)f_{\nu-1}g_{\nu-1}A_{\nu-1}]\tau + \frac{1}{\delta f_\nu}[\bar{g}_{\nu+1}B_{\nu+1} - \\ &- \bar{g}_{\nu-1}B_{\nu-1} + \bar{g}_{\nu+3}B_{\nu+3} - \bar{g}_{\nu-3}B_{\nu-3} + \bar{g}_{\nu+5}B_{\nu+5} - \bar{g}_{\nu-5}B_{\nu-5}\bar{g}_{\nu+7} + B_{\nu+7} - \bar{g}_{\nu-7}B_{\nu-7}\dots]\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из-за периодичности тригонометрических функций τ в (12) можно выделить блоки

$$\begin{aligned} &A_{\nu-4}, B_{\nu-4}, A_{\nu-5}, B_{\nu-5}, A_{\nu-6}, B_{\nu-6}, A_{\nu-7}, B_{\nu-7}, A_{\nu-8}, B_{\nu-8}; \\ &A_\nu, B_\nu, A_{\nu\pm 1}, B_{\nu\pm 1}, A_{\nu\pm 2}, B_{\nu\pm 2}, A_{\nu\pm 3}, B_{\nu\pm 3}; \\ &A_{\nu+4}, B_{\nu+4}, A_{\nu+5}, B_{\nu+5}, A_{\nu+6}, B_{\nu+6}, A_{\nu\pm 7}, B_{\nu\pm 7}, A_{\nu+8}, B_{\nu+8}. \end{aligned}$$

Значительное упрощение в выражениях возникает для колебаний "шепчущей галереи", которые существуют при больших значениях полярных индексов. Используя асимптотику [17]

$$\Gamma(av+b) \sim \sqrt{2\pi}(av)^{av+b-1/2} \exp(-av),$$

можно показать, что при всех значениях азимутального индекса и больших значениях ν $a > 0$

и $\arg \nu < \pi$, параметр $\bar{g}_{\nu+j} \sim \frac{\nu+j}{2} g_{\nu+j}$. При

исследовании можно пренебречь параметром ξ в

множителях, стоящих перед тригонометрическими функциями и амплитудами $A_{\nu+j}, B_{\nu+j}$.

Выделим блок, содержащий амплитуды A_ν, B_ν , введем обозначения $\bar{A}_{\nu+j} = g_{\nu+j}A_{\nu+j}$;

$a_m = \frac{m}{2n^2} \ll 1$. Разделив обе части на $g_{\nu+j}$, систему полученных уравнений в этом блоке приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \bar{A}_\nu &= -i\zeta[a_m(\bar{B}_{\nu+1} + \bar{B}_{\nu-1})\tau - \delta(\bar{A}_{\nu+1} - \bar{A}_{\nu-1} + \bar{A}_{\nu+3} - \bar{A}_{\nu-3} + \bar{A}_{\nu+5} - \bar{A}_{\nu-5} + \dots)]; \\ i\zeta\bar{B}_\nu &= -[a_m(\bar{A}_{\nu+1} + \bar{A}_{\nu-1})\tau + (\bar{B}_{\nu+1} - \bar{B}_{\nu-1} + \bar{B}_{\nu+3} - \bar{B}_{\nu-3} + \bar{B}_{\nu+5} - \bar{B}_{\nu-5} + \dots)/\delta]; \\ \tau\bar{A}_{\nu\pm 1} &= i\zeta[a_m(\bar{B}_\nu + \bar{B}_{\nu\pm 2}) + (\delta\tau)(\mp\bar{A}_\nu + \bar{A}_{\nu\pm 2} - \bar{A}_{\nu-2} + \bar{A}_{\nu\pm 4} - \bar{A}_{\nu-4} + \dots)]; \\ i\zeta\tau\bar{B}_{\nu\pm 1} &= a_m(\bar{A}_\nu + \bar{A}_{\nu\pm 2}) - (\mp\bar{B}_\nu + \bar{B}_{\nu\pm 2} - \bar{B}_{\nu-2} + \bar{B}_{\nu\pm 4} - \bar{B}_{\nu-4} + \dots)\tau/\delta; \\ \bar{A}_{\nu\pm 2} &= -i\zeta\{a_m(\bar{B}_{\nu\pm 1} + \bar{B}_{\nu\pm 3})\tau - \delta[\mp(\bar{A}_{\nu+1} + \bar{A}_{\nu-1}) + \bar{A}_{\nu+3} - \bar{A}_{\nu-3} + \bar{A}_{\nu+5} - \dots]\}; \\ i\zeta\bar{B}_{\nu\pm 2} &= -\{a_m(\bar{A}_{\nu\pm 1} + \bar{A}_{\nu\pm 3})\tau + [\mp(\bar{B}_{\nu+1} + \bar{B}_{\nu-1}) + \bar{B}_{\nu+3} - \bar{B}_{\nu-3} + \bar{B}_{\nu+5} - \dots]/\delta\}; \\ \tau\bar{A}_{\nu\pm 3} &= i\zeta\{a_m(\bar{B}_{\nu\pm 2} + \bar{B}_{\nu\pm 4}) + \delta\tau[\mp(\bar{A}_\nu + \bar{A}_{\nu\pm 2} + \bar{A}_{\nu-2}) + \bar{A}_{\nu\pm 4} - \dots]\}; \\ i\zeta\tau\bar{B}_{\nu\pm 3} &= a_m(\bar{A}_{\nu\pm 2} + \bar{A}_{\nu\pm 4}) - [\mp(\bar{B}_\nu + \bar{B}_{\nu\pm 2} + \bar{B}_{\nu-2}) + \bar{B}_{\nu\pm 4} - \dots]\tau/\delta. \end{aligned}$$

Замечаем, что в этот блок помимо постоянных $A_\nu, B_\nu, A_{\nu\pm 1}, B_{\nu\pm 1}, A_{\nu\pm 2}, B_{\nu\pm 2}, A_{\nu\pm 3}, B_{\nu\pm 3}$ входят амплитуды, описывающие влияние колебаний других

блоков. Можно показать, что вклад их в результате компенсации пропадает. Приходим к замкнутой однородной системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \bar{A}_\nu + i\zeta[(\bar{B}_{\nu+1} + \bar{B}_{\nu-1})a_m\tau - (\bar{A}_{\nu+1} - \bar{A}_{\nu-1} + \bar{A}_{\nu+3} - \bar{A}_{\nu-3})\delta] = 0; \\
 & i\zeta\bar{B}_\nu + (\bar{A}_{\nu+1} + \bar{A}_{\nu-1})a_m\tau + (\bar{B}_{\nu+1} - \bar{B}_{\nu-1} + \bar{B}_{\nu+3} - \bar{B}_{\nu-3})/\delta = 0; \\
 & \tau\bar{A}_{\nu\pm 1} = i\zeta[a_m(\bar{B}_\nu + \bar{B}_{\nu\pm 2}) \mp (\bar{A}_\nu - \bar{A}_{\nu\pm 2} + \bar{A}_{\nu\mp 2})\delta\tau]; \\
 & i\zeta\tau\bar{B}_{\nu\pm 1} = a_m(\bar{A}_\nu + \bar{A}_{\nu\pm 2}) \pm (\bar{B}_\nu - \bar{B}_{\nu\pm 2} + \bar{B}_{\nu\mp 2})\frac{\tau}{\delta}; \\
 & \bar{A}_{\nu\pm 2} + i\zeta[(\bar{B}_{\nu\pm 1} + \bar{B}_{\nu\pm 3})a_m\tau \pm (\bar{A}_{\nu\pm 1} + \bar{A}_{\nu\mp 1} - \bar{A}_{\nu\pm 3} + \bar{A}_{\nu\mp 3})\delta] = 0; \\
 & i\zeta\bar{B}_{\nu\pm 2} + (\bar{A}_{\nu\pm 1} + \bar{A}_{\nu\pm 3})a_m\tau \mp (\bar{B}_{\nu\pm 1} + \bar{B}_{\nu\mp 1} - \bar{B}_{\nu\pm 3} + \bar{B}_{\nu\mp 3})/\delta = 0; \\
 & \tau\bar{A}_{\nu\pm 3} = i\zeta[a_m\bar{B}_{\nu\pm 2} \mp (\bar{A}_\nu + \bar{A}_{\nu\pm 2} + \bar{A}_{\nu\mp 2})\delta\tau]; \\
 & i\zeta\tau\bar{B}_{\nu\pm 3} = a_m\bar{A}_{\nu\pm 2} \pm (\bar{B}_\nu + \bar{B}_{\nu\pm 2} + \bar{B}_{\nu\mp 2})\frac{\tau}{\delta}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Исключив $A_{\nu\pm 1}, B_{\nu\pm 1}, A_{\nu\pm 3}, B_{\nu\pm 3}$ из уравнений для $A_{\nu\pm 2}$ и $B_{\nu\pm 2}$, находим, что

$$\begin{aligned}
 g_0 A_{\nu\pm 2} &= (b_2 g_1 + a_2 b_1) A_\nu \mp b_1 (b_2 + g_2) B_\nu; \\
 g_0 B_{\nu\pm 2} &= (g_2 a_1 + a_2 b_1) B_\nu \pm a_2 (a_1 + g_1) A_\nu.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 g_0 &= a_1 b_2 - 4T; \quad T = a_m^2 (\rho\tau - 1/\tau)(\tau - 1/\rho\tau); \\
 a_1 &= 1 + 2a_m^2 - 4\rho; \quad a_2 = 2a_m \delta (\tau\rho - 1/\tau); \\
 b_1 &= 2a_m (\tau - \rho/\tau)/\delta; \quad b_2 = (1 + 2a_m^2)\rho - 4; \\
 g_1 &= 2\rho - a_m^2; \quad g_2 = 2 - \rho a_m^2; \quad \rho = \varepsilon\zeta^2/\mu.
 \end{aligned}$$

Подставив $A_{\nu\pm 2}, B_{\nu\pm 2}$ в (13), имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{g_0\tau}{i\zeta}\bar{A}_{\nu\pm 1} &= a_m(b_2 + g_2)(a_m a_1 - 2b_1\delta\tau)\bar{B}_\nu \mp \\
 & \mp [a_m a_2(a_1 + g_1) + g_0\delta\tau]\bar{A}_\nu; \\
 i\zeta g_0\tau\bar{B}_{\nu\pm 1} &= (a_1 + g_1)(a_m b_2 - 2a_2\tau/\delta)\bar{A}_\nu \mp \\
 & \mp [a_m b_1(b_2 + g_2) - g_0\tau/\delta]\bar{B}_\nu;
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{g_0\tau}{i\zeta}\bar{A}_{\nu\pm 3} &= a_m(a_1 g_2 + 4T)\bar{B}_\nu \mp \\
 & \mp \{a_m a_2(a_1 + g_1) + \delta\tau[b_2(a_1 + 2g_1) + 4T]\}\bar{A}_\nu; \\
 i\zeta g_0\tau\bar{B}_{\nu\pm 3} &= a_m(b_2 g_1 + 4T)\bar{A}_\nu \mp \\
 & \mp \{a_m b_1(b_2 + g_2) + (\tau/\delta)[a_1(b_2 + 2g_2) + 4T]\}\bar{B}_\nu.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Исключив $\bar{A}_{\nu\pm 1}, \bar{B}_{\nu\pm 1}, \bar{A}_{\nu\pm 2}, \bar{B}_{\nu\pm 2}, \bar{A}_{\nu\pm 3}, \bar{B}_{\nu\pm 3}$, из первых двух уравнений системы (13), получаем

$$\begin{aligned}
 [(a_1^2 - 2g_1^2)b_2 - 4T(3a_1 + 4g_1)]\bar{A}_\nu &= 0; \\
 [(b_2^2 - 2g_2^2)a_1 - 4T(3b_2 + 4g_2)]\bar{B}_\nu &= 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Нетривиальные решения (17) существуют при выполнении условий

$$\begin{aligned}
 (a_1^2 - 2g_1^2)b_2 - 4T(3a_1 + 4g_1) &= 0; \bar{A}_\nu \neq 0; \bar{B}_\nu = 0; \\
 (b_2^2 - 2g_2^2)a_1 - 4T(3b_2 + 4g_2) &= 0; \bar{A}_\nu = 0; \bar{B}_\nu \neq 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

В (18) постоянная ξ содержится только в параметре

$$T = a_m^2(\rho\tau - 1/\tau)(\tau - 1/\rho\tau),$$

где $\tau = \text{tg}(\xi\pi/2)$.

Подразумевая под индексом S индексы E либо H , из (18) получаем функциональные уравнения

$$\text{tg}^4(\gamma_\xi^S) - 2f_S \text{tg}^2(\gamma_\xi^S) + 1 = 0, \tag{19}$$

где

$$2f_E = \frac{(a_1^2 - 2g_1^2)b_2}{4a_m^2\rho(3a_1 + 4g_1)} + \rho + 1/\rho;$$

$$2f_H = \frac{(b_2^2 - 2g_2^2)a_1}{4a_m^2\rho(3b_2 + 4g_2)} + \rho + 1/\rho.$$

Нами был рассмотрен случай, когда сумма индексов $n + m$ четная. Выше было показано, что при нечетных суммах индексов $n + m$ параметр $\tau = -\text{ctg}(\xi\pi/2)$. Из (19) замечаем, что оно справедливо и в этом случае. Поэтому, в отличие от полусферы с идеально проводящей подложкой собственные колебания при неидеальной проводимости существуют при всех значениях $m \leq n$. Решениями (19) являются

$$\text{tg}^2(\gamma_\xi^{(\pm)S}) = f_S \pm \sqrt{f_S^2 - 1}. \tag{20}$$

В отличие от резонаторов с идеально проводящей подложкой существуют по два решения у $\bar{A}_\nu \neq 0; \bar{B}_\nu = 0$ ($S = E$), и $\bar{A}_\nu = 0; \bar{B}_\nu \neq 0$ ($S = H$).

Теория справедлива при параметре $|\xi| < 1$, когда влиянием собственных колебаний со смежными полярными индексами можно пренебречь. Поэтому решения с $|\xi| \geq 1$ должны быть отброшены. При импедансе $|\zeta| \ll 1$ приближенными решениями (19) являются

$$\text{tg}(\gamma_\xi^{(-)H}) \approx 2ia_m\zeta\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}; \quad \text{tg}(\gamma_\xi^{(+)E}) \approx ia_m\zeta\sqrt{\frac{3\varepsilon}{\mu}}.$$

При импедансе $\zeta = 0$ параметр $\xi = 0$. Приходим к решениям для полусферического резонатора с идеально проводящим основанием.

3. Дисперсионное уравнение. Решения характеристического уравнения (20) содержат параметры $\rho_w = \varepsilon_w \zeta^2 / \mu_w$. Они имеют различные значения внутри и вне полусферического резонатора: ξ_d определяет влияние импеданса на поля колебаний при радиальных координатах $r \leq r_d$, а ξ_a - при координате $r \geq r_d$. Разложим $P_\nu^m(\cos\theta)$ в ряд по функциям $P_n^m(\cos\theta)$. Используя ортогональность функций Лежандра и асимптотическое соотношение:

$$P_\nu^m(\cos\theta) = \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{\Gamma(\nu + 3/2)} \left(\frac{\pi \sin\theta}{2} \right)^{-1/2} \times$$

$$\times \{ \cos[(\nu + 1/2)\theta - \pi/4 + m\pi/2] + O(\nu^{-1}) \},$$

в первом приближении разложения по $1/n$ получаем, что

$$P_{n+\xi}^m(\cos\theta) \approx \frac{2 \sin(\gamma_{\xi(w,S)_j}^m)}{\pi \gamma_{\xi(w,S)_j}^m} P_n^m(\cos\theta).$$

После удовлетворения на полусферической поверхности резонатора $r = r_d$ условиям непрерывности E_θ , E_φ , H_θ , H_φ компонент полей получаем следующие дисперсионные уравнения:

$$\begin{aligned} \delta_d \frac{\sin(\gamma_{\xi(d,E)}^m) j'_{n+\xi(d,E)}(x_d)}{\gamma_{\xi(d,E)}^m j_{n+\xi(d,E)}(x_d)} &= \\ = \delta_a \frac{\sin(\gamma_{\xi(a,E)}^m) h'_{n+\xi(a,E)}(x_a)}{\gamma_{\xi(a,E)}^m h_{n+\xi(a,E)}(x_a)}; \end{aligned} \quad (21,a)$$

$$\begin{aligned} \delta_a \frac{\sin(\gamma_{\xi(d,H)}^m) j'_{n+\xi(d,H)}(x_d)}{\gamma_{\xi(d,H)}^m j_{n+\xi(d,H)}(x_d)} &= \\ = \delta_d \frac{\sin(\gamma_{\xi(a,H)}^m) h'_{n+\xi(a,H)}(x_a)}{\gamma_{\xi(a,H)}^m h_{n+\xi(a,H)}(x_a)}. \end{aligned} \quad (21,b)$$

Ввиду ортогональности присоединенных функций Лежандра по полярному индексу, парциальные колебания с амплитудами $A_{\nu\pm 1}$, $B_{\nu\pm 1}$, $A_{\nu\pm 2}$, $B_{\nu\pm 2}$, $A_{\nu\pm 3}$, $B_{\nu\pm 3}$ вносят вклад в спектральные параметры полусферического резонатора только через параметр ξ .

Решения уравнений (21,a) и (21,b) определяют спектральные параметры HE и EH собственных колебаний "шепчущей галереи" в полусферическом резонаторе с неидеально проводящей подложкой. В пределе $\zeta = 0$ дисперсионные уравнения (21,a) и (21,b) переходят в (11,a) и (11,b).

При поверхностном сопротивлении $\zeta = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$ эти уравнения определяют спектральные характеристики колебаний в открытом полусферическом резонаторе, погруженном в среду с проницаемостями ε_a и μ_a .

Выводы. В полусферическом резонаторе на идеально проводящей плоскости существуют независимые E и H собственные колебания. Влияние неидеально проводящей подложки приводит к зависимости полярных индексов от поверхностного импеданса. Получены дисперсионные уравнения для собственных колебаний "шепчущей галереи". Их решения определяют зависимость комплексных частот этих колебаний от параметров структуры, подложки и окружающей среды.

1. Lord Rayleigh. The problem of whispering gallery // Phil. Mag. - 1910. - 20. - P.1001-1041.
2. Власов С. Н. О колебаниях шепчущей галереи в открытых резонаторах с диэлектрическим стержнем // Радиотехника и электроника. - 1967. - 12, №3. - С.572-573.
3. Wait J. R. Electromagnetic whispering gallery modes in a dielectric rod // Radio Science. - 1967. - 2, №9. - P.1005-1007.
4. Козут А. Е., Кутузов В. В., Еременко З. Е., Филиппов Ю. Ф. Моды шепчущей галереи мм диапазона в эллипсоидальном диэлектрическом резонаторе с малым эксцентриситетом // Журн. техн. физики. - 2004. - 74, №4. - С.94-97.
5. Филиппов Ю. Ф., Еременко З. Е. Резонансные частоты азимутально-однородных колебаний анизотропного шара // Журн. техн. физики. - 2000. - 70, №5. - С.8-11.
6. Прокопенко Ю. В., Смирнова Т. А., Филиппов Ю. Ф. Собственные колебания анизотропного диэлектрического шара // Журн. техн. физики. - 2004. - 74, №4. - С.82-88.
7. Харьковский С. Н., Козут А. Е., Солодовник В. А. Фокусировка волн типа шепчущей галереи в квазиоптическом полусферическом диэлектрическом резонаторе // Письма в Журн. техн. физики. - 1995. - 21, №18. - С.38-42.
8. Козут А. Е., Кутузов В. В., Филиппов Ю. Ф., Харьковский С. Н. Квазиоптический полусферический диэлектрический резонатор с колебаниями типа шепчущей галереи // Распространение радиоволн в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах. - Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 1995. - С.72-85.
9. Козут А. Е., Кутузов В. В., Филиппов Ю. Ф., Харьковский С. Н. Колебания шепчущей галереи в квазиоптическом полусферическом диэлектрическом резонаторе // Изв. вузов. Радиоэлектроника. - 1997. - 40, №2. - С.19-27.
10. Прокопенко Ю. В., Филиппов Ю. Ф., Яковенко В. М. Возбуждение колебаний в полушаровом диэлектрическом резонаторе радиальным магнитным диполем // Журн. техн. физики. - 2005. - 75, №5. - С.107-112.
11. Прокопенко Ю. В., Филиппов Ю. Ф., Шипилова И. А., Яковенко В. М. Моды шепчущей галереи в полусферическом изотропном ДР с идеально проводящей плоской поверхностью // Журн. техн. физики. - 2006. - 76, №2. - С.102-111.
12. Kharkovskiy S. N., Filipov Ju. F., Eremenko Z. E. Whispering gallery modes in open hemispherical imagine dielectric resonator // Microwaves and optical technology letters 1999. - 21, №4. - P.252-257.
13. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. - М.: Сов. радио, 1957. - 385с.
14. Вайнштейн Л. А. Открытые волноводы и открытые резонаторы. - М.: Сов. радио, 1966. - 457 с.
15. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики. - М.: Высшая школа, 1991. - 223 с.

16. Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - М.: Изд. Наука, 1965. - 295 с.
17. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стигана И. - М.: Наука, 1979. - 830 с.

"WHISPERING GALLERY" OSCILLATIONS IN DIELECTRIC HEMISPHERICAL RESONATOR WITH IMPERFECT CONDUCTIVE PLANE

Yu. F. Filipov

Whispering-gallery oscillations in hemispherical dielectric resonator on imperfectly conductive plane.

A theory of eigen oscillations in a hemispherical resonator placed on imperfect conducting surface has been developed. Satisfy the boundary conditions on imperfect conducting surface we give a functional equation. Its solution determines the polar complex index. Satisfy the conditions of continuity of tangential electromagnetic field components we find the characteristic equation. Its determining spectral features of semi-spherical resonator, excited at "whispering gallery" oscillations.

Key Words: hemispherical dielectric resonator, "whispering gallery" oscillations, functional equation, polar index, characteristic equation.

КОЛИВАННЯ "ШЕПОЧУЧОЇ ГАЛЕРЕЇ" В ПІВКУЛЬОВОМУ ДІЕЛЕКТРИЧНОМУ РЕЗОНАТОРІ НА НЕІДЕАЛЬНО ПРОВІДНІЙ ПЛОЩИНІ

Ю. Ф. Філіпов

Розвинуто теорію власних коливань у напівсферичному резонаторі, розташованому на неідеально провідній площині. Граничні умови на неідеально провідній площині приводять до функціонального рівняння, розв'язки якого визначають комплексні полярні індекси. При задоволенні умов безперервності тангенціальних компонент напруженості електромагнітних полів на сферичній поверхні отримано дисперсійне рівняння. Його розв'язки визначають спектральні характеристики власних коливань типу шепчучої галереї.

Ключові слова: півкульовий діелектричний резонатор, коливання "шепочучої галереї", функціональне рівняння, полярний індекс, дисперсійне рівняння.

Рукопись поступила 6 ноября 2006 года.