PACS: 02.10.De, 02.30.Tb, 45.20.–d, 45.50.–j

С.В. Терехов

ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА. III. ЦЕЛЛЯРНЫЙ И СУБСТАНЦИОНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОРЫ. ДЕФЕКТ КВАТЕРНИОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины

Статья поступила в редакцию 5 мая 2014 года

Предложен дифференциальный кватернионный анализ и исследованы волновые свойства сплошных сред. Получены правило вычисления гиперкомплексной производной от произведения двух кватернионных функций и выражение для дефекта этой производной, обращение в нуль которого приводит к классическому выражению для производной от произведения двух вещественных или комплексных функций.

Ключевые слова: локальные свойства, частная производная, кватернион, волна

Запропоновано диференціальний кватерніонний аналіз і досліджено хвильові властивості суцільних середовищ. Отримано правило обчислення гіперкомплексної похідної від добутку двох кватерніонних функцій і вираження для дефекту цієї похідної, перетворення на нуль якого призводить до класичного вираження для похідної від добутку двох дійсних або комплексних функцій.

Ключові слова: локальні властивості, приватна похідна, кватерніон, хвиля

1. Введение

Для исследования локальных свойств материального объекта проводят его разбиение на малые целлы ([1, с. 103]; от лат. *cella* – внутренняя ограниченная часть помещения). При выводе уравнений эволюционных преобразований локальной области во времени используют частную (целлярную) производную (в безразмерных единицах [2]) $\frac{\partial}{\partial \tau}$, а в пространстве – оператор Гамильтона (оператор «набла»):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \quad (1)$$

Если центр масс целлы перемещается со скоростью $\mathbf{u}$, то в транспортных уравнениях применяют субстанциональную (материальную) производную [1,3] $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{u}\cdot\nabla$, где второе слагаемое с математической точки зрения определяет производную по направлению скорости, а с физической – является конвективной составляющей движения. Следовательно, частные производные описывают изменения локальной области в случае неподвижного центра масс целлы, а полная производная – при его перемещении.

Сформулируем утверждение, связанное с оператором (1), которое понадобится для последующих рассуждений: для векторных функций пространственных координат **A** и **B** справедливо равенство

$$\left[\left[\mathbf{A}\times\nabla\right]\times\mathbf{B}\right]=\left[\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}\right]+\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{B}-\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}, \tag{2}$$

здесь операции ротора (вихрь) $\operatorname{rot}\mathbf{B}=\left[\nabla\times\mathbf{B}\right]$ и дивергенции (расходимость векторных линий) $\operatorname{div}\mathbf{B}=\nabla\cdot\mathbf{B}$ (см. формулы (4) и (16) работы [2]). Отметим, что для любой скалярной ϕ и векторной **B** функций справедливы соотношения: $\operatorname{rot}(\nabla\phi)\equiv 0$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{B})\equiv 0$ и $\operatorname{div}(\nabla\phi)=\Delta\phi$ ($\Delta=\nabla\cdot\nabla$ – оператор Лапласа).

Для изучения поведения локальных областей гиперпространства разработаем дифференциальное исчисление кватернионов, т.е. математический аппарат, учитывающий неассоциативность, некоммутативность и изменение произведения кватернионов при комплексном сопряжении (формула (18) работы [2]).

2. Целлярный и субстанциональный операторы

Целлярный оператор $\Diamond$. Для характеристики изменений неподвижной целлы введем в рассмотрение гиперкомплексный 4-градиент (целлярный оператор; оператор «тетра»):

$$\Diamond=\frac{\partial}{\partial\tau}+\gamma\nabla, \tag{3}$$

норма которого

$$\left\|\Diamond\right\|^2=\Diamond\Diamond^*=\Diamond^*\Diamond=\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\Delta=-\Box, \tag{4}$$

где $\Box$ – оператор Даламбера.

Производной вдоль кватерниона $A=a+\gamma\mathbf{A}$ назовем произведение этого кватерниона с оператором «тетра»:

$$A\Diamond=a\frac{\partial}{\partial\tau}+\mathbf{A}\cdot\nabla+\gamma\left(a\nabla+\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial\tau}-\left[\mathbf{A}\times\nabla\right]\right). \tag{5}$$

Тогда субстанциональной (материальной) производной является производная вдоль безразмерного кватерниона $1+\gamma\mathbf{u}$, т.е. его произведение с целлярным оператором (3):

$$\mathrm{D}=\left(1+\gamma\mathbf{u}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\gamma\nabla\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{r}}, \tag{6}$$

здесь $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{\partial}{\partial\tau}+\mathbf{u}\cdot\nabla$ и $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{r}}=\nabla+\mathbf{u}\dfrac{\partial}{\partial\tau}-[\mathbf{u}\times\nabla]$ – субстанциональные производные по времени и пространству соответственно. Эти производные связаны между собой соотношениями

$$S_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}-\mathbf{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{r}}=\left(1-u^2\right)\frac{\partial}{\partial\tau}, \tag{7}$$

$$S_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+\mathbf{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{r}}=\left(1+u^2\right)\frac{\partial}{\partial\tau}+2(\mathbf{u}\cdot\nabla). \tag{8}$$

Оператор S_1 описывает гиперцеллярную производную, а оператор S_2 – гиперсубстанциональную производную по времени для частицы, которая движется со скоростью u; для неподвижной частицы операторы S_1 и S_2 совпадают и равны частной производной по времени.

Перепишем субстанциональный оператор (6) в виде

$$\mathrm{D}=\Diamond+\Re, \tag{9}$$

где оператор перемещения целлы $\Re=\gamma\mathbf{u}\Diamond=\mathbf{u}\cdot\nabla+\gamma\left(\mathbf{u}\dfrac{\partial}{\partial\tau}-[\mathbf{u}\times\nabla]\right)$ описывает конвективную составляющую движения.

Область гипераналитичности. Функция Лагранжа. Область, в которой для гиперкомплексной функции $F=f(\tau,\mathbf{r})+\gamma\mathbf{F}(\tau,\mathbf{r})$ выполняются равенства

$$\Diamond F=0:\quad \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial\tau}+\operatorname{div}\mathbf{F}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\mathbf{F}}{\partial\tau}+\operatorname{grad}f-\operatorname{rot}\mathbf{F}=0,\end{cases} \tag{10}$$

назовем областью гипераналитичности (гиперрегулярности) кватернионной функции F. С математической точки зрения первое уравнение системы (10) показывает, что в выделенной целле расходимость векторного поля $\mathbf{F}$ противоположна по знаку скорости изменения скалярной составляющей f кватернионной функции F. Для интерпретации второго уравнения системы (10) обозначим целлярную производную $\dfrac{\partial\mathbf{F}}{\partial\tau}=\mathbf{X}$, тогда второе уравнение системы (10) отображает теорему Гельмгольца [4, с. 177–178; 5, с. 209–220; 6, с. 59] ($\operatorname{div}\mathbf{F}=0$) с другим выбором вида скалярного потенциала f (например, в работе [6, с. 59] скалярный потенциал f выбран в виде $\operatorname{div}\mathbf{W}=-f$, а в данной работе – в виде $\operatorname{div}\mathbf{W}=f$): $\mathbf{X}=-\nabla f+\operatorname{rot}\mathbf{F}$.

Физическая интерпретация системы равенств (10) состоит в следующем: если векторная часть кватерниона F описывает поток его скалярной составляющей ($\mathbf{F}=f\mathbf{u}=\alpha\nabla f$, α – кинетический коэффициент), то первое уравнение системы (10) описывает локальный закон сохранения величины f (кинетический закон). При этом второе уравнение задает эволюцию потока во времени (т.е. течение) и является динамическим законом. Для полевых переменных первое уравнение системы (10) описывает калибровку Лоренца (см., напр., [6]), а второе – отсутствие внешних сил и определение внутренних локальных сил. Если же правые части уравнений системы (10) будут отличными от нуля, то первое из них описывает эволюцию скалярной компоненты f кватернионной функции F при наличии источников (или стоков) величины f, а второе – обобщение теоремы Гельмгольца на случай нестационарного векторного поля $\mathbf{F}$ при наличии внешних сил. Таким образом, использование кватернионной алгебры Гамильтона в сочетании с векторной алгеброй Гиббса позволяет объединить кинетический и динамический аспекты движения целлы. Другими словами, система уравнений (10) отображает дуалистическое единство необратимости и обратимости механического перемещения целлы.

Используя соотношения теории поля [7], легко показать, что система уравнений (10) преобразовывается к виду

$$\begin{cases} \Box f(\tau, \mathbf{r}) = 0, \\ \Box \mathbf{F}(\tau, \mathbf{r}) + 2\,\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где первое уравнение системы (11) описывает продольную, а второе – поперечную волну [6]. Система (11) для кватернионной функции записывается в виде $\Diamond^*(\Diamond F) = 0$. Из-за неассоциативности кватернионной алгебры это уравнение отличается от уравнения, гиперкомплексная форма которого имеет вид уравнения Даламбера $\Box F = (\Diamond^* \Diamond) F = 0$ (оно описывает распространение волны, которая движется с предельной скоростью c [6, с. 100]). Эти уравнения совпадают при выполнении равенства $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) = 0$, общее решение которого можно записать, например, в виде $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \nabla f$ (случай стационарного векторного поля $\mathbf{F}$ или отсутствия локальной силы $\mathbf{X}$, так как целлярная производная $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} = \mathbf{X} = -\nabla f + \mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$) в силу выполнения очевидного равенства $\mathrm{rot}(\nabla f) \equiv 0$. Следовательно, при нарушении равенства $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) = 0$ поперечная волна с предельной скоростью перемещения c превращается в волну с уравнением распространения, соответствующим второму уравнению (11).

Процесс движения в гиперпространстве может сопровождаться сохранением каких-либо кватернионных функций. Поэтому сформулируем и докажем теорему для таких функций, а также выясним условия, при которых они остаются неизменными.

Теорема 5. Если целла является областью гипераналитичности функции F, то условием сохранения функции F ($\mathrm{D}F = 0$) при движении в гиперпространстве является компланарность векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{F}$ и $\mathrm{rot}\mathbf{F}$.

Доказательство. В силу того, что целла является областью гипераналитичности функции F, выполняются соотношения системы (10), т.е. $\Diamond F = 0$. С учетом равенства (9) кватернионная функция F сохраняется при движении в гиперпространстве ($\mathrm{D}F = 0$), если выполняется условие $\Re F = 0$. Использование соотношений системы (10) приводит к равенству

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{F}-\mathbf{u}\,\mathrm{div}\,\mathbf{F}=0. \qquad (12)$$

Используя равенство (2), перепишем (12) в виде $\left[[\mathbf{u}\times\nabla]\times\mathbf{F}\right]-[\mathbf{u}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{F}]=0$. Умножив это соотношение скалярно на вектор **F**, получим выражение $\mathbf{F}\cdot[\mathbf{u}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{F}]=0$, которое указывает на компланарность векторов **F**, **u** и rot**F**. Следовательно, гиперрегулярная кватернионная функция F сохраняется при движении целлы в гиперпространстве, если векторы **F**, **u** и rot**F** лежат в одной или параллельных плоскостях.

Например, для кватерниона энергии-импульса (см. формулу (14) работы [7]) уравнения (10) принимают вид:

$$\Diamond\mathbf{P}=0:\ \begin{cases}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}+\mathrm{div}\,\mathbf{p}=0,\\ \dfrac{\partial\mathbf{p}}{\partial\tau}+\mathrm{grad}\,\varepsilon-\mathrm{rot}\,\mathbf{p}=0.\end{cases} \qquad (13)$$

При выполнении условия (12) движение целлы в гиперпространстве происходит так, что сохраняется кватернион энергии-импульса. Первое уравнение системы (13) описывает локальный закон сохранения массы. Второе уравнение (13) с учетом теоремы Гельмгольца (div**A** = 0):

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\tau}=-\nabla U+\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \qquad (14)$$

(U – потенциальная энергия, **A** – потенциал векторного поля) преобразуем к виду

$$\mathrm{grad}\,\Lambda-\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}=0, \qquad (15)$$

здесь $\Lambda = \varepsilon - U$ – функция Лагранжа, $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - \mathbf{A}$ – импульс движущейся частицы с учетом потенциала векторного поля. Если потенциальная энергия U не зависит явно от времени, то первое уравнение системы (13) запишется в виде

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\tau}+\mathrm{div}\,\mathbf{\Pi}=0. \qquad (16)$$

Таким образом, функция Лагранжа будет удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\tau}+\mathrm{div}\,\mathbf{\Pi}=0,\\ \mathrm{grad}\,\Lambda-\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}=0.\end{cases}. \qquad (17)$$

Если импульс частицы-поля **П** является потоком лагранжиана, то первое уравнение системы (17) отображает локальное сохранение функции Лагранжа. Второе уравнение системы (17) эквивалентно равенству div(gradΛ) = ΔΛ = 0 (div(rot**П**) ≡ 0) или rot(rot**П**) = 0 (rot(gradΛ) ≡ 0). Первое из этих равенств отображает в пространстве Евклида фрактальный характер распределения энергии Лагранжа [8, с. 38; 9, с. 142–148], а второе – волну импульса частицы-поля

П, которая распространяется в пространстве-времени с предельной скоростью c (см. формулу (11)).

Собственные и зеркальные состояния целлярного оператора «тетра» $\Diamond$. Собственные состояния оператора $\Diamond$ удовлетворяют уравнению

$$\Diamond G = k_1 G, \tag{18}$$

где $G = g(\tau,\mathbf{r}) + \gamma\mathbf{G}(\tau,\mathbf{r})$ – собственная гиперфункция; k_1 – постоянные собственные значения, принадлежащие множеству действительных чисел.

Введение нового кватерниона $G = F\exp(k_1\tau)$ приводит уравнение (18) к системе уравнений (10). Следовательно, собственными состояниями целлярного оператора являются затухающие ($k_1 < 0$) или нарастающие ($k_1 > 0$) во времени периодические движения в виде продольных и поперечных волн.

Зеркальные состояния оператора $\Diamond$ удовлетворяют уравнению

$$\Diamond G = k_2 G^*, \tag{19}$$

где G^* – кватернион, комплексно-сопряженный к гиперструктуре G; k_2 – постоянные собственные значения, принадлежащие множеству действительных чисел.

Введение замен $g = f\exp(k_2\tau)$ и $\mathbf{G} = \mathbf{F}\exp(-k_2\tau)$ приводит уравнение (19) к виду

$$\Diamond F = 0 : \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \tau}\exp\left(2k_2\tau\right) + \operatorname{div}\mathbf{F} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} - \operatorname{rot}\mathbf{F} + \exp\left(2k_2\tau\right)\nabla f = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Выполнение действий, которые применялись при выводе формул системы (11), приводит к неоднородным уравнениям

$$\Box f = 2k_2\frac{\partial f}{\partial \tau}, \tag{21}$$

$$\Box\mathbf{F} = -2\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right) + \left(2k_2 - 1\right)\exp\left(2k_2\tau\right)\frac{\partial \nabla f}{\partial \tau}. \tag{22}$$

Правая часть уравнения (21) описывает появление трения [6, с. 135] или «заряда» с плотностью [6, с. 200]:

$$\kappa = -\frac{k_2}{2\pi}\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{23}$$

а правая часть уравнения (22) определяет «ток» с плотностью

$$\mathbf{J} = -\frac{c}{2\pi}\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right) + \frac{2k_2 - 1}{4\pi}\exp\left(2k_2\tau\right)\frac{\partial \nabla f}{\partial t}. \tag{24}$$

Отметим, что собственные и зеркальные состояния целлярного оператора $\Diamond$ являются коллинеарными состояниями по их векторной составляющей.

Таким образом, действие целлярного оператора на собственную кватернионную функцию приводит к возникновению однородных волн (собственные движения). Если его действие порождает зеркальную гиперструктуру, то возникают неоднородные периодические перемещения с образованием «зарядов» и «токов» (зеркальные состояния).

Иерархия периодических движений. Применив действия, которые использовались при выводе формул (11), к уравнению $\Diamond G = V^*$ (кватернион $V^* = v - \gamma\mathbf{V}$), получим уравнения неоднородных продольных и поперечных волн

$$\Box g = -z\,, \tag{25}$$

$$\Box\mathbf{G} + 2\,\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{G}\right) = -\mathbf{Z}\,, \tag{26}$$

где величины $z = \dfrac{\partial v}{\partial\tau} + \mathrm{div}\,\mathbf{V}$ и $-\mathbf{Z} = \dfrac{\partial\mathbf{V}}{\partial\tau} + \nabla v + \mathrm{rot}\,\mathbf{V}$. Повторение описанной процедуры для величин z и $\mathbf{Z}$ приводит к волновым уравнениям для функций v и $\mathbf{V}$:

$$\Box v = -y\,, \tag{27}$$

$$\Box\mathbf{V} + 2\,\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{V}\right) = -\mathbf{Y}\,, \tag{28}$$

где $y = \dfrac{\partial z}{\partial\tau} + \mathrm{div}\,\mathbf{Z}$ и $-\mathbf{Y} = \dfrac{\partial\mathbf{Z}}{\partial\tau} + \nabla z - \mathrm{rot}\,\mathbf{Z}$. Дальнейшее применение описанной процедуры порождает волны величин z и $\mathbf{Z}$, т.е. предлагаемая модель описывает мультимасштабное возникновение волн с различными модами. Этот сценарий развития событий в неравновесной системе, возможно, отвечает за появление аномального диффузионного потока и турбулентного течения.

Построение стохастико-детерминированной иерархии волн может закончиться на любой четной стадии эволюции при (само)зацикливании развивающегося процесса. Рассмотрим, например, самозамыкание второй стадии эволюции на первоначальную ($z = \lambda g$ и $\mathbf{Z} = \lambda\mathbf{G}$ (коллинеарность векторов), λ – коэффициент зацикливания): состояние системы описывают уравнения типа Клейна–Гордона как для исходных характеристик

$$\Box g = -\lambda g\ ,\quad \Box\mathbf{G} + \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{G}\right) = -\lambda\mathbf{G}\,, \tag{29}$$

так и для скоростей их производства (утилизации) и компенсационных течений:

$$\Box v = -\lambda v,\quad \Box\mathbf{V} + \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{V}\right) = -\lambda\mathbf{V}\,. \tag{30}$$

Состояние неравновесной области задается системой из четырех уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial \tau} + \operatorname{div} \mathbf{G} = \nu, \\ \dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tau} - \operatorname{rot} \mathbf{G} + \nabla g = -\mathbf{V}, \\ \dfrac{\partial \nu}{\partial \tau} + \operatorname{div} \mathbf{V} = \lambda g, \\ \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + \operatorname{rot} \mathbf{V} + \nabla \nu = -\lambda \mathbf{G}, \end{cases} , \tag{31}$$

которая описывает возникновение независимых поперечных и продольных волн Клейна–Гордона, т.е. самоорганизующийся самозацикленный процесс. Возникновение волновых движений неизбежно должно приводить к формированию новых структур, вид которых зависит от граничных условий.

Исследование перестроечных процессов проводится на основе кинетико-динамических уравнений, вывод которых требует развития гиперкомплексного дифференциального анализа, в частности, для установления правила дифференцирования произведения кватернионных функций.

3. Правило дифференцирования произведения кватернионных функций

Коммутаторы, ассоциаторы и астраторы. Вычислим по формуле (19) работы [2] коммутаторы с участием гиперфункций $F = f(\tau, \mathbf{r}) + \gamma \mathbf{F}(\tau, \mathbf{r})$ и $G = g(\tau, \mathbf{r}) + \gamma \mathbf{G}(\tau, \mathbf{r})$ при условии, что их 4-градиенты отличны от нуля:

$$n_{1F} = \left[\left(\Diamond F \right), G \right] = \left[G^*, \left(\Diamond F \right) \right] = 2\gamma \left[\mathbf{G} \times \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} + \nabla f - \operatorname{rot} \mathbf{F} \right) \right], \tag{32}$$

$$n_{2F} = \left[\left(\Diamond F^* \right), G \right] = \left[G^*, \left(\Diamond F^* \right) \right] = 2\gamma \left[\mathbf{G} \times \left(-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} + \nabla f + \operatorname{rot} \mathbf{F} \right) \right], \tag{33}$$

$$n_{3F} = \left[\left(\Diamond^* F \right), G \right] = \left[G^*, \left(\Diamond^* F \right) \right] = 2\gamma \left[\mathbf{G} \times \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} - \nabla f + \operatorname{rot} \mathbf{F} \right) \right], \tag{34}$$

$$n_{4F} = \left[\left(\Diamond^* F^* \right), G \right] = \left[G^*, \left(\Diamond^* F^* \right) \right] = 2\gamma \left[\mathbf{G} \times \left(-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} - \nabla f - \operatorname{rot} \mathbf{F} \right) \right]. \tag{35}$$

Аналогичные формулы имеют место для величин n_{iG} (i = 1, 2, 3, 4), если кватернионы F и G поменять местами. Суммируя формулы (32)–(35), получим

$$n_{1F} + n_{2F} + n_{3F} + n_{4F} = 0\,. \tag{36}$$

Кроме того, из формул (32)–(36) следует, что

$$N_{1F} = n_{1F} + n_{2F} = -\left(n_{3F} + n_{4F} \right) = 4\gamma \left[\mathbf{G} \times \nabla f \right], \tag{37}$$

$$N_{2F} = n_{1F} + n_{3F} = -\left(n_{2F} + n_{4F} \right) = 4\gamma \left[\mathbf{G} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} \right], \tag{38}$$

$$N_{3F} = n_{1F} + n_{4F} = -\left(n_{2F} + n_{3F}\right) = -4\gamma\left[\mathbf{G} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}\right]. \tag{39}$$

Согласно формуле (23) работы [2] вычислим ассоциаторы указанных гиперфункций:

$$m_F = \left[\left(F, \lozenge, G\right)\right] = -\left[\left(F, \lozenge, G^*\right)\right] = -\left[\left(F^*, \lozenge, G\right)\right] = -\left[\left(F, \lozenge^*, G\right)\right] = \left[\left(F^*, \lozenge, G^*\right)\right] =$$
$$= \left[\left(F, \lozenge^*, G^*\right)\right] = \left[\left(F^*, \lozenge^*, G\right)\right] = -\left[\left(F^*, \lozenge^*, G^*\right)\right] = 2\gamma\left(\left(\mathbf{F} \cdot \nabla\right)\mathbf{G} - \mathbf{F}\operatorname{div}\mathbf{G}\right). \tag{40}$$

Из формулы (40) видно, что комплексное сопряжение функций или 4-градиента не меняет величину ассоциатора, но может изменить его знак, если число сопряжений нечетное. Если в формулах (40) поменять местами гиперфункции F и G, то ассоциатор

$$m_G = \left[\left(G, \lozenge, F\right)\right] = 2\gamma\left(\left(\mathbf{G} \cdot \nabla\right)\mathbf{F} - \mathbf{G}\operatorname{div}\mathbf{F}\right). \tag{41}$$

В соответствии с вышеприведенной теоремой 5 для подвижной целлы обращение в нуль ассоциатора вида (40) (или (41)) означает сохранение кватернионной функции F, если кватернионная функция G является скоростью перемещения центра масс локальной области. Следовательно, неассоциативности кватернионов отвечает разрушение закона сохранения той или иной гиперкомплексной функции в процессе перемещения целлы в гиперпространстве.

По формулам вида (24) работы [2] вычислим астраторы данных гиперфункций

$$h_{1F} = <\left(F, \lozenge, G^*\right)> = 2\left\{\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G} + \gamma\left(f \operatorname{rot}\mathbf{G} + \left[\mathbf{F} \times \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tau} - \nabla g\right)\right]\right)\right\}, \tag{42}$$

$$h_{2F} = <\left(F, \lozenge^*, G\right)> = 2\left\{\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G} + \gamma\left(f \operatorname{rot}\mathbf{G} - \left[\mathbf{F} \times \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tau} - \nabla g\right)\right]\right)\right\}, \tag{43}$$

$$h_{3F} = <\left(F^*, \lozenge, G\right)> = 2\left\{\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G} + \gamma\left(-f \operatorname{rot}\mathbf{G} + \left[\mathbf{F} \times \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tau} + \nabla g\right)\right]\right)\right\}, \tag{44}$$

$$h_{4F} = <\left(F^*, \lozenge^*, G^*\right)> = 2\left\{\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G} + \gamma\left(-f \operatorname{rot}\mathbf{G} - \left[\mathbf{F} \times \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tau} + \nabla g\right)\right]\right)\right\}. \tag{45}$$

Обмен местами гиперкомплексных функций F и G приводит к аналогичным формулам для величин h_{iG} ($i = 1, 2, 3, 4$). Из формул (42)–(45) находим, что

$$H_F = h_{1F} + h_{2F} + h_{3F} + h_{4F} = 8\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G}. \tag{46}$$

Сумма астраторов обращается в нуль при перпендикулярности вектора $\mathbf{F}$ к вихрю $\operatorname{rot}\mathbf{G}$.

Правило дифференцирования произведения кватернионных функций. Установленные формулы позволяют получить правило дифференцирования произведения двух (и более) кватернионных функций. Например, целлярная производная от произведения двух гиперкомплексных функций F и G

$$\lozenge(FG) = (\lozenge F)G + F(\lozenge G) + Q_\Delta, \tag{47}$$

где Q_Δ – дефект кватернионной производной, связанный с неассоциативностью, некоммутативностью и операцией взятия комплексного сопряжения от гиперфункций, равный

$$Q_\Delta = 0.25H_F + \left\{m_G + 0.5\left(N_{1G} - N_{3F}\right)\right\}, \tag{48}$$

здесь выражение, взятое в фигурные скобки, представляет собой векторную часть дефекта кватернионной производной.

Обращение дефекта кватернионной производной в нуль ($Q_\Delta = 0$) приводит к стандартному правилу дифференцирования произведения двух функций. Это происходит при выполнении условий

$$\begin{cases} \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G} = 0, \\ \left[\left(-\nabla g + [\mathbf{G} \times \nabla] \times \mathbf{F}\right)\right] = 0. \end{cases} \tag{49}$$

Первое равенство описывает перпендикулярность вектора **F** к вихрю векторного поля **G**. Второе соотношение системы (49) с учетом формулы (2) преобразуется к виду

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}\operatorname{div}\mathbf{F} + [\mathbf{G} \times \operatorname{rot}\mathbf{F}] + [\mathbf{F} \times \nabla g] = 0. \tag{50}$$

Рассмотрим два случая: а) $(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ (см. теорему 5); б) $(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}\operatorname{div}\mathbf{F} \neq 0$. В первом случае ассоциатор (41) равен нулю, что указывает на индифферентность тройки кватернионов по отношению к способам их группировки. После скалярного умножения соотношения (50) на вектор **G** (rot**F**, **F** или ∇g) оно переходит в равенство

$$\mathbf{G} \cdot [\mathbf{F} \times \nabla g] = 0 \;\; (\operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot [\mathbf{F} \times \nabla g] = 0,\; \mathbf{F} \cdot [\mathbf{G} \times \operatorname{rot}\mathbf{F}] = 0 \text{ или } \nabla g \cdot [\mathbf{G} \times \operatorname{rot}\mathbf{F}] = 0),$$

которое указывает на компланарность векторов **G**, **F** и ∇g (rot**F**, **F** и ∇g; **F**, **G** и rot**F** или ∇g, **G** и rot**F**). В случае б) ассоциатор (41) отличен от нуля, поэтому с точностью до знака объем параллелепипеда, построенного, например, на **G**, **F** и ∇g, должен быть равен

$$\mathbf{G} \cdot [\mathbf{F} \times \nabla g] = |\mathbf{G}|^2 \operatorname{div}\mathbf{F} - \mathbf{G} \cdot (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}. \tag{51}$$

Если объем параллелепипеда отличен от величины, стоящей в правой части равенства (51), то дефект кватернионной производной будет отличен от нуля.

Развитый математический формализм в последующих работах будет применен к решению различных физических задач, например к выводу эволюционных уравнений неравновесной системы.

4. Заключение

Исследование свойств покоящихся и подвижных локальных областей (целл) проводят с использованием целлярных и субстанциональных производных. Мобильность целлы учитывается в субстанциональном операторе конвективным слагаемым. Состояние локальной области, которое описывается гипераналитической функцией, при перемещении может сохраняться, если выполняются определенные условия. Скалярная и векторная составляющие гипераналитической функции удовлетворяют уравнениям, которые описывают продольные и поперечные волны соответственно. Собственными состояниями целлярного оператора являются затухающие или нарастающие во времени продольные и поперечные волны. Его зеркальным состояниям отвечают области с противоположным временным поведением волн, в которых образуются «заряды» и наблюдаются «токи». Внешнее воздействие на неподвижную локальную область порождает бесконечную иерархию самозацепляющихся периодических процессов, распад которой происходит самопроизвольно в случае пропорциональности кватернионов внешних сил и их целлярных производных.

Предложенная кватернионная модель материи учитывает кинетико-динамический дуализм эволюционных процессов. Ее дальнейшее развитие требует создания гиперкомплексного анализа, в частности вывода правил дифференцирования. Поэтому в данной работе было получено выражение для кватернионной целлярной производной от произведения двух гиперкомплексных функций. В силу особенностей физической алгебры вычисление производной сопровождается возникновением «дефекта». При его обнулении правило дифференцирования произведения двух функций принимает классический вид.

1. *И. Дьярмати*, Неравновесная термодинамика, Мир, Москва (1974).
2. *С.В. Терехов*, ФТВД **25**, № 1–2, 5 (2015).
3. *Н.Н. Лапшев*, Основы гидравлики и теплотехники, Академия, Москва (2012).
4. *Г. Корн, Т. Корн*, Справочник по математике, Наука, Москва (1973).
5. *Н.Е. Кочин*, Векторное исчисление и начала тензорного анализа, Наука, Москва (1965).
6. *Ф.М. Морс, Г. Фешбах*, Методы теоретической физики, Т.1, ИИЛ, Москва (1958).
7. *А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов*, Векторный анализ и начала тензорного исчисления, Вища школа, Харьков (1986).
8. *С.В. Терехов*, ФТВД **25**, № 3–4, 112 (2015).
9. *С.В. Терехов*, ФТВД **22**, № 1, 33 (2012).
10. *С.В. Терехов*, Фракталы и физика подобия, Цифровая типография, Донецк (2011).

S.V. Terekhov

PHYSICAL AND GEOMETRICAL CHARACTERISTICS OF HYPERSPACE. III. CELLAR AND SUBSTANTIVE OPERATORS. DEFECT OF THE QUATERNION DERIVATIVE

A differential quaternion analysis is offered and the wave properties of continuous media are investigational. The rule of calculation of the hypercomplex derivative of the product of two quaternion functions and expression for the defect of this derivative have been obtained. The vanishing of the defect results in a classic expression for the derivative of the product of two real or complex functions.

Keywords: local properties, partial derivative, quaternion, wave