

PACS: 62.20.F-, 62.20.fq, 62.30.+d, 81.40.Jj

С.В. Терехов, В.Н. Саяпин

УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ. V. ДИАГРАММЫ НАПРЯЖЕНИЕ–ДЕФОРМАЦИЯ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, 83114, Украина

Статья поступила в редакцию 22 января 2014 года

Предложена синергетическая модель деформированного состояния упругопластической среды. Продемонстрирована ее адекватность экспериментальным данным при описании истинных и инженерных диаграмм напряжение–деформация.

Ключевые слова: материал, напряжение, деформация, блуждания, колебания

Запропоновано синергетичну модель деформованого стану суцільного середовища. Продемонстровано її адекватність експериментальним даним при описі істинних та інженерних діаграм напруження–деформація.

Ключові слова: матеріал, напруження, деформація, блукання, коливання

1. Введение

Любые перемещения частиц изменяют физические и термодинамические поля внутри системы. Поля вынуждают другие частицы занимать в пространстве новые положения, минимизирующие внутреннюю энергию и максимизирующие энтропию системы [1,2]. При сильных отклонениях от положения термодинамического равновесия эти перемещения приводят к самоорганизации и возникновению новых структур в результате кооперативного отклика системы на локальные изменения. Кооперативная реакция системы, в частности, может проявляться в возникновении различного рода течений (например, пластическое течение вещества в диффузионной зоне или эффект Киркендалла–Смигельскаса [3–6]), потоков (например, тепловых) и периодических движений (например, продольных и поперечных волн [7,8], которые, в частности, могут описываться релятивистским инвариантным уравнением Клейна–Гордона [8,9]). Другими словами, кинетическая сторона эволюции неравновесной системы сопровождается возникновением динамических процессов, обусловленных кооперативной реакцией системы (локальной скоростью изменения потока J [10]) на локальные изменения распределения частиц. Следовательно, возникает проблема поиска универсальной модели для описания взаимосвязи между случайными блужданиями частиц и

связи между случайными блужданиями частиц и кооперативным поведением системы на разных организационных уровнях.

В качестве примера рассмотрим макроуровень механического поведения различных материалов при деформировании. Это связано с необходимостью получения и исследования новых материалов с наперед заданными механическими, технологическими и эксплуатационными свойствами (гибридные материалы, аморфные металлы, наноккомпозиты и др.). Деформирование приводит к проникновению через поверхностный барьер материала внешних сил, которые оказывают различное действие на атомы основы материала, атомы внедрения и замещения, дефекты (вакансии, дислокации, дисклинации, трещины, поры и т.д.). Согласно сделанным оценкам [11] металлические образцы, используемые в экспериментах на растяжение (сжатие), кручение или изгиб, содержат в среднем 10^{20} – 10^{40} атомов. Поэтому не представляется возможным аналитически учесть действие внешних сил на каждую в отдельности структурную единицу материала. Компьютерное моделирование, оперирующее всего лишь с 10^3 частицами, дает слишком грубое описание ситуации в материале, поскольку введение в расчетную схему одного дополнительного атома вызывает скачкообразное изменение числа возможных конфигураций, как минимум, на три порядка. Тем не менее атомистический подход [12] позволяет понять, каким образом протекает процесс деформации, какие факторы оказывают влияние на величину механических параметров материала [13].

Для объяснения процессов, протекающих на микроструктурном уровне [13] организации материала, были предложены дислокационная (см., напр., [14–18]) и дисклинационная [19] модели. Они позволили объяснить механизм пластических деформаций, происходящих в результате перемещения дислокаций, при этом, например, движение винтовой дислокации было описано как перемещение волны сдвига [14,15]. Согласно работе [15] поле напряжений краевой дислокации содержит гидростатическую и сдвиговую составляющие, поэтому ее движение порождает продольные (упругие волны сжатия и растяжения) и поперечные (пластические волны сдвига) волны. В предложенных моделях было установлено: дислокации не могут двигаться быстрее скорости звука; их длина уменьшается в направлении движения; винтовая дислокация обладает меньшей скоростью, чем краевая [20] (существование двух видов волн).

Торможение дислокаций на дефектах и границах кристаллитов вызывает зарождение и развитие трещин, объединение которых в единую поверхность приводит к разрушению материала. При комнатной температуре в поликристаллических средах наиболее слабо связаны атомы в кристаллитах, а при повышенных температурах – на границах зерна. Распространение трещин тормозится различной ориентацией кристаллитов и возникновением областей пластичности на краях трещины, возникающих за счет переползания дислокаций. Дальнейшее увеличение напряжения вызывает вращение и разрушение отдельных зерен [13,16], а также распространение трещин. Таким образом, существенное влияние на разрушение материала оказывает под-

вижность дислокаций, которая, в свою очередь, определяется скоростью деформирования материала. Хрупкое и вязкое разрушения материала происходят одновременно, но в силу различных причин одно из них практически всегда является доминирующим. Параллельно с процессом разрушения происходит и самозалечивание трещин, преобладание раскрытия трещин над их схлопыванием происходит при объединении критического числа трещин в единую поверхность разрушения (фрактуризации).

Феноменологическое описание механических реакций материала на внешние нагрузки опирается на его фундаментальные свойства: упругость, вязкость, пластичность, диффузию и теплопроводность [1,21–23]. Учет этих характеристик при описании квазистатических и динамических процессов деформирования сплошных сред привел к ряду механореологических моделей [1,21–26]. Осредненное действие различных факторов при малом растяжении (сжатии) стержня (область случайных блужданий, смещений и колебаний частиц вблизи равновесных положений) приводит к закону Гука, а при малом сдвиге (область вязкого течения и наличие волн в атомарных слоях, например крутильных волн при винтовой деформации [1]) – к закону Максвелла [21,26]. В первом случае поведение материала моделируется упругим телом, при этом приложенное внешнее напряжение σ пропорционально относительному удлинению образца ξ :

$$\sigma = E\xi, \quad (1)$$

где $\xi = \Delta l/l_0$, $\Delta l = l - l_0$ – абсолютное удлинение, l_0 и l – начальная и конечная длина стержня. Во втором случае среда обладает вязкостью (внутренним трением), а напряжение σ связано со скоростью деформации $\dot{\xi}$ линейным законом

$$\sigma = \mu\dot{\xi}, \quad (2)$$

здесь μ – объемный коэффициент вязкого сопротивления, определяемый подвижностью компонентов материала; $\dot{\xi} = d\xi/dt$ – скорость деформации. Коэффициент вязкого сопротивления μ определяется произведением модуля сдвига G на время релаксации t_0 [25,27]:

$$\mu = Gt_0. \quad (3)$$

К недостаткам ранее предложенных атомарных и феноменологических моделей относится отсутствие описания:

- диаграмм зависимости напряжения σ от деформации ξ и скорости ее изменения $\dot{\xi}$;
- появления на механических диаграммах площадки текучести (или зуба), а также площадки ползучести;
- перехода из области вязкоупругого поведения в область пластичности с дальнейшим разрушением объекта механических испытаний.

Отсюда вытекает необходимость построения модели поведения материала в пространстве экспериментальных переменных ($\sigma = f(\xi, \dot{\xi}, t)$ – «поверхность напряжений» [21,22]) для выявления взаимосвязи между параметрами деформационного процесса, а также для описания диаграмм механического состояния и их особенностей.

2. Условия существования «поверхности напряжений»

Рассмотрим при абсолютной температуре T деформированную среду, которая содержит на единицу объема n частиц с химическим потенциалом μ и обладает энтропией s . Если система находится в локальном термодинамическом равновесии, то из соотношения Гиббса–Дюгема (см., напр., [28, с. 89]), записанного для деформированного тела, следует, что при отсутствии внешних сил для единицы объема справедливо соотношение

$$\varepsilon_0 d\sigma_0 = sdT + nd\mu. \quad (4)$$

Формула (4) демонстрирует возникновение локальных напряжений за счет бесконечно малых изменений теплового и химического полей, т.е. определяет область существования напряженного состояния материала в некотором объеме Ω . В областях с объемом, меньшим по сравнению с Ω , взаимодействие флуктуаций температуры системы и концентрации компонентов с ненарушенной решеткой приводит к подавлению напряженного состояния [13].

Перемещения областей напряженного состояния (подвижные дислокации и другие дефекты структуры) и их взаимодействие с флуктуациями порождают случайные локальные изменения напряжения. Эти области являются источниками и стоками для механических изменений состояния сплошной среды. Стохастические смещения источников и стоков (за счет случайных блужданий атомов (диффузия), химических реакций между компонентами или переноса тепла (теплопроводность)) могут приводить к возникновению упругих и пластических волн напряжения [29–31]. Следовательно, процессы на микроуровне оказывают влияние на макроуровень структурной организации материала и сопровождаются возникновением локальных напряжений, стремящихся вернуть систему в термодинамическое равновесие.

При очень малых отклонениях от положения термодинамического равновесия за счет приложения внешних нагрузок формула (4) будет справедлива в локально-равновесных областях. Такая ситуация возможна в зернах поликристаллического материала при малых скоростях деформирования. Следовательно, существование «поверхности напряжений» σ_Λ [23] при действии на систему внешнего потенциала Φ , вызывающего изменение обобщенной координаты состояния q , определяется формулой

$$\varepsilon d\sigma_\Lambda = sdT + nd\mu + qd\Phi = \varepsilon_0 d\sigma_0 + qd\Phi. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) определяют первое условие наличия «поверхности напряжений», т.е. они дают термодинамическое обоснование ее возникновения.

С другой стороны, малое изменение потенциала механического поля $d\sigma_{\Lambda}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, t)$ определяется дифференциалами его аргументов

$$d\sigma_{\Lambda} = \frac{\partial \sigma_{\Lambda}}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma_{\Lambda}}{\partial \dot{\varepsilon}} d\dot{\varepsilon} + \frac{\partial \sigma_{\Lambda}}{\partial t} dt. \quad (6)$$

Отсутствие разрывов на этой поверхности (непрерывность функции $\sigma_{\Lambda}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, t)$) задается равенством смешанных производных

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\Lambda}}{\partial \varepsilon \partial \dot{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 \sigma_{\Lambda}}{\partial \dot{\varepsilon} \partial \varepsilon}; \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\Lambda}}{\partial \varepsilon \partial t} = \frac{\partial^2 \sigma_{\Lambda}}{\partial t \partial \varepsilon}; \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\Lambda}}{\partial t \partial \dot{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 \sigma_{\Lambda}}{\partial \dot{\varepsilon} \partial t}. \quad (7)$$

Невыполнение хотя бы одного из равенств (7) отвечает ограниченности «поверхности напряжений», т.е. является вторым условием ее существования. Кроме того, это условие указывает на возникновение поверхности фрактуризации.

Области «поверхности напряжений», в которых какая-либо из смешанных производных (7) равна нулю, являются областями волновых движений в новых переменных [32, с. 50–51], например

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\Lambda}}{\partial \varepsilon \partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{v t_1}{c \tau} \\ t = \varepsilon_1 - \frac{v t_1}{c \tau} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{\Lambda}}{\partial t_1^2} - \left(\frac{v}{c\tau}\right)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\Lambda}}{\partial \varepsilon_1^2} = 0, \quad (8)$$

где v – скорость волны, c и τ – характерные для данной задачи скорость распространения колебаний и время. Возникновение периодических движений в упругопластической среде возможно при выполнении калибровки Лоренца [33] и линейной теории Онзагера [34,35], тогда система уравнений для потенциала механического поля [36] принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \operatorname{div} \mathbf{W} = 0; & \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \tau} = 0; \\ \mathbf{X} = -\nabla \varphi; & \mathbf{W} = L\mathbf{X} \end{cases}, \quad (9)$$

где L – постоянный кинетический коэффициент. Первое и второе уравнения системы (9) задают состояние неравновесной системы, т.е. система принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \nabla^2 \varphi; \\ \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial \tau} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \Delta \varphi; \\ \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = 0 \end{cases}. \quad (10)$$

Таким образом, поведение неравновесного материала можно описывать движениями имитационной точки по «поверхности напряжений» в пространстве экспериментальных переменных напряжение–время–деформация–ско-

рость деформации. Будем считать, что характер перемещения имитационной точки определяется процессами, протекающими на микроуровне. Например, случайным смещениям и колебаниям атомов вещества соответствует случайное блуждание точки по «поверхности напряжений». Эта гипотеза отвечает одному из синергетических положений о фрактальности явлений и процессов [37–40]: скейлинг формирует между параметрами макроуровня такие же дифференциальные соотношения, которые используют для описания поведения характеристик микроуровня. Она подтверждается молекулярно-динамическим моделированием процесса деформирования (см., напр., [41]).

3. Модели сплошных сред

Статистический подход к изучению механических свойств материала приводит к тому, что случайные неоднородности на микроскопическом уровне организации материала могут приводить к случайным колебаниям макроскопических характеристик деформационного процесса [37,42]. Эти колебания существенно возрастают при внешнем силовом воздействии. Приложенное напряжение представляется в виде суммы нормальных и касательных напряжений (см., напр., [43]). Нормальные напряжения вызывают упругую деформацию решетки, а касательные – упругопластическую.

Упругохрупкая среда. Пусть при фиксированной скорости деформации ($\dot{\xi} = \text{const}$) под действием внешней силы возникают случайные продольные смещения и колебания атомов вещества. Будем считать, что в пространстве $\sigma - \xi - \dot{\xi}$ этим явлениям соответствует одномерное хаотическое блуждание имитационной точки вдоль оси деформации $O\xi$ в некоторой плоскости $\sigma O\dot{\xi}$. Термодинамическую силу X_u и поток J_u упругого напряжения σ_u , вызывающие изменение состояния упругохрупкой среды, определим в рамках модели Онзагера (см., напр., [44]):

$$X_u = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial \sigma_u}{\partial \xi}, \quad J_u = -\frac{L_u}{\theta} \frac{\partial \sigma_u}{\partial \xi}, \quad (11)$$

где $\theta = k_B T$, k_B – постоянная Больцмана; T – температура по абсолютной шкале Кельвина; L_u – кинетический коэффициент Онзагера, который зависит от подвижности атомов, температуры и внутреннего трения среды. Кинетический коэффициент L_u при такой постановке задачи имеет размерность $[L_u] = \text{J/s}$, поэтому он связан с диссипацией механической энергии. Закон сохранения упругого напряжения σ_u в локальной области (кристаллите) определяется первым уравнением системы (10):

$$\frac{\partial \sigma_u}{\partial t} = \omega_u \frac{\partial^2 \sigma_u}{\partial \xi^2}, \quad (12)$$

где $\omega_u = L_u/\theta$ – средняя частота упругих колебаний.

Переходя к безразмерному времени $\tau = \omega_u t$, найдем автомодельное решение уравнения (12) путем введения нового аргумента $\zeta = \xi^2/\tau$. Тогда упругое напряжение σ_u определяется формулой

$$\sigma_u(\zeta) = A_1 I(\zeta) + A_2, \quad (13)$$

где A_1, A_2 – константы интегрирования.

Интеграл $I(\zeta) = \int \zeta^{-1/2} \exp\left(-\frac{\zeta}{4}\right) d\zeta$ вычислим многократным применением метода интегрирования по частям, что приводит к формуле (остаточный член при интегрировании стремится к нулю):

$$I(\zeta) = 2\sqrt{\zeta} \exp\left(-\frac{\zeta}{4}\right) J(\zeta), \quad (14)$$

здесь функция $J(\zeta) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \frac{1}{3 \cdot 5}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^k$.

Приведенный ряд сходится при значениях аргумента ζ из интервала 0–2. Графический вид аналогичной (14) зависимости, полученной в рамках линейной упругой механики разрушения, приведен в работе [45, с. 93].

В области, где справедлива линейная теория упругости, константа $A_2 = 0$, а формула (13) с учетом (14) принимает вид уравнения (1):

$$\sigma_u(\zeta) = 2A_1 \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} = E\xi, \quad (15)$$

константа интегрирования $A_1 = 0.5E\sqrt{\tau}$, т.е. модуль Юнга $E \sim t^{-0.5}$. Таким образом, упругое напряжение σ_u при возбуждении продольных колебаний в атомной цепочке описывается формулой (сохранен только главный член ряда $J(\zeta)$, рис. 1):

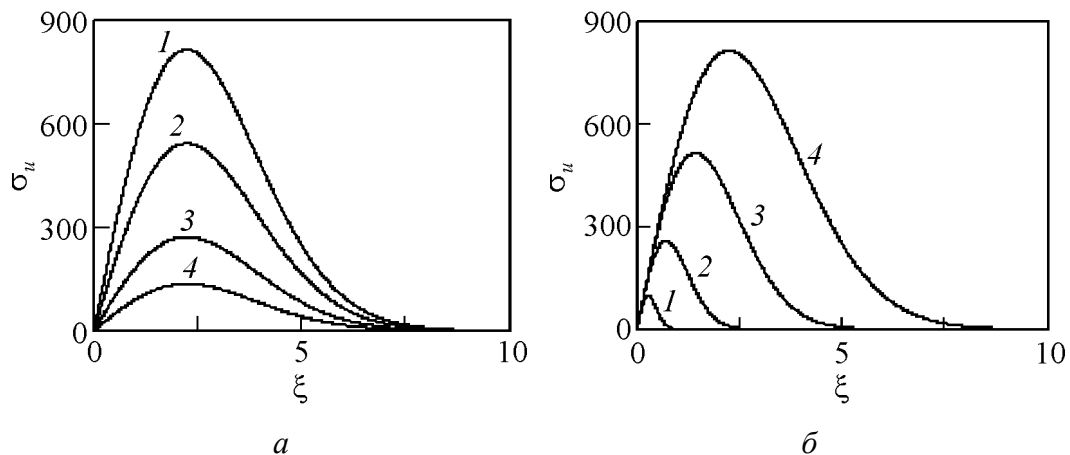


Рис. 1. Влияние параметров a_1 (a : $b_1 = 0.1$) и b_1 (b : $a_1 = 600$) на вид кривой упруго-хрупкой реакции материала: a : 1 – 600, 2 – 400, 3 – 200, 4 – 100; b : 1 – 7, 2 – 1, 3 – 0.25, 4 – 0.1

$$\sigma_u(\xi) \approx 2A_1 \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) = a_1 \xi \exp(-b_1 \xi^2). \quad (16)$$

Упругое напряжение σ_u достигает максимума в момент времени $\tau = \tau_m$ при значении деформации

$$\xi_m = \sqrt{2\tau_m}, \quad (17)$$

после чего оно уменьшается до нуля. Такое поведение упругого напряжения σ_u отображает процесс разрыва связей в атомной цепочке. При достижении критического количества аннулированных связей происходит хрупкое разрушение материала, при этом напряжение текучести больше напряжения разрушения [22].

Упруговязкое твердое тело. При сдвиге одной атомной плоскости относительно другой (движение вдоль оси $O\xi$) возникают два поперечных смещения и одно продольное колебание в атомных цепочках, образующих связанные плоскости. Введем в рассмотрение безразмерное время $\tau = \omega_p t$ ($\omega_p = L_p/\theta$ – средняя частота сдвиговых колебаний, L_p – кинетический коэффициент Онзагера) и кинетическую деформацию как произведение скорости деформации на время релаксации

$$\chi = \dot{\xi} t_0. \quad (18)$$

Тогда при постоянном значении деформации ($\xi = \text{const}$) случайные сдвиги атомных плоскостей кристаллической решетки вызывают одномерное блуждание изображающей точки в плоскости $\sigma O\xi$ вдоль оси $O\chi$. В этом случае уравнение (12) в безразмерных величинах для вязкоупругих напряжений σ_p принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \sigma_p}{\partial \chi^2}. \quad (19)$$

Формулы типа (13) и (14) в линейной области теории пластичности приводят к модели Максвелла (см. формулу (2)):

$$\sigma_p(\dot{\xi}) = 2B_1 \frac{\chi}{\sqrt{\tau}} = \mu \dot{\xi}, \quad (20)$$

где константа интегрирования

$$B_1 = \frac{\mu \sqrt{\tau}}{2\tau_0}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что вязкость среды убывает обратно пропорционально квадратному корню из времени деформирования ($\eta \sim t^{-0.5}$). Отметим, что сумма выражений (15) и (20) определяет напряжение в модели твердовязкого тела Джеффриса [45] (см. также модель Кельвина–Фойхта [21,27]). С учетом формулы (3) можно переписать равенство (21) в виде

$$B_1 = \frac{G\sqrt{\tau}}{2\omega_p}. \quad (22)$$

Разрыв связей между атомными плоскостями происходит в момент времени $\tau \geq \tau_{mp}$ при достижении скоростью деформации величины

$$\dot{\xi}_m = \sqrt{2\tau_{mp}}. \quad (23)$$

При достижении порогового значения количества аннулированных связей происходит вязкое разрушение материала, при этом напряжение текучести меньше напряжения разрушения [22].

Упругий хрупковязкий материал (деформируемое тело без упрочнения).
Введем в рассмотрение безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ (ω_0 – коллективная частота колебаний атомов и сдвигов их плоскостей в кристаллической решетке). Тогда спорадические перемещения имитационной точки в пространстве σ - ξ - $\dot{\xi}$ описываются уравнением

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \chi^2}. \quad (24)$$

Введем автомодельный аргумент

$$\zeta = \frac{\xi^2 + \chi^2}{\tau}, \quad (25)$$

который определяет движение изображающей точки по эллипсам

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\chi^2}{b^2} = 1 \quad (26)$$

с переменными полуосями $a = \sqrt{\zeta\tau}$ и $b = \frac{\sqrt{\zeta\tau}}{\tau_0}$. Запишем решение уравнения

(24) в виде интегрального логарифма $Ei(z) = \int \frac{dz}{\ln z}$:

$$\sigma_1 = C_1 Ei(z) + C_2, \quad (27)$$

где аргумент $z = \exp\left(-\frac{\zeta}{4}\right)$. В области его малых значений решение (27) определяется выражением

$$\sigma_1 \approx C_1 \ln z + C_2 = -\frac{C_1}{4} \zeta + C_2. \quad (28)$$

С учетом (25) соотношение (28) определяет параболоид с вершиной в точке $\zeta = 0$ и $\sigma_1 = C_2$ с ветвями, направленными вниз при значениях параметра $C_1 > 0$ и вверх – при $C_1 < 0$. В первом случае параболоиды $\pm\sigma_1$ ограничивают область хрупкоупругого и вязкоупругого поведения материала без упрочнения.

Во втором случае они определяют область существования материала, для течения которого требуется приложить усилие, превышающее значение константы C_2 . Такие модели неньютоновских материалов были предложены Сен Венаном, Прандтлем, Бингамом и Шведовым [17].

Случайные смещения атомов в кристаллических плоскостях, хаотические движения плоскостей по отношению друг к другу и изменчивость локального напряжения с течением времени могут привести к возникновению волн напряжения.

4. Упругие и пластические волны. Разрушение материала

Упругие и пластические волны. Упругопластические деформации возникают при движении дислокаций, плотность которых в реальных кристаллах не менее $10^2-10^3 \text{ см}^{-2}$ (в термообработанном металле их плотность порядка $10^7-10^8 \text{ см}^{-2}$, в интенсивно пластически деформированном – $10^{11}-10^{12} \text{ см}^{-2}$ [46]). В областях, определяемых условием (8), возникают продольные и поперечные волны. Их распространение описывается вторым уравнением системы (10):

$$\frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial \chi^2}, \quad (29)$$

где индекс i определяет тип волны (для продольной (упругой) волны $i = u$, а для поперечной (сдвиговой) – $i = p$), $\tau = \omega t$ – безразмерное время. Для продольной (поперечной) волны введение нового аргумента Лоренца [14,15]:

$$\xi_1 = \frac{\xi - \frac{v_u}{c} \tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_u}{c}\right)^2}} \quad \left(\chi_1 = \frac{\chi - \frac{v_p}{c} \tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_p}{c}\right)^2}} \right) \quad (30)$$

преобразовывает уравнение (29) к виду

$$\frac{\partial^2 \sigma_u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_u}{\partial \chi^2} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \sigma_p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_p}{\partial \chi_1^2} = 0 \right). \quad (31)$$

При движении волн вдоль оси $O\chi$ решение уравнения (31) определяется функцией (рис. 2):

$$\sigma_u = \text{Darctg} \left(\frac{\xi_1}{\chi} \right) = a_2 \text{arctg} (b_2 \xi_1) \quad \left(\sigma_p = \text{Darctg} \left(\frac{\xi}{\chi_1} \right) = a_3 \text{arctg} (b_3 \xi) \right). \quad (32)$$

Отметим, что движение дислокаций в обычном пространстве описывается аналогичной функцией [47]. Это связано с тем, что скорость деформации определяется плотностью дислокаций и скоростью их скольжения [48].

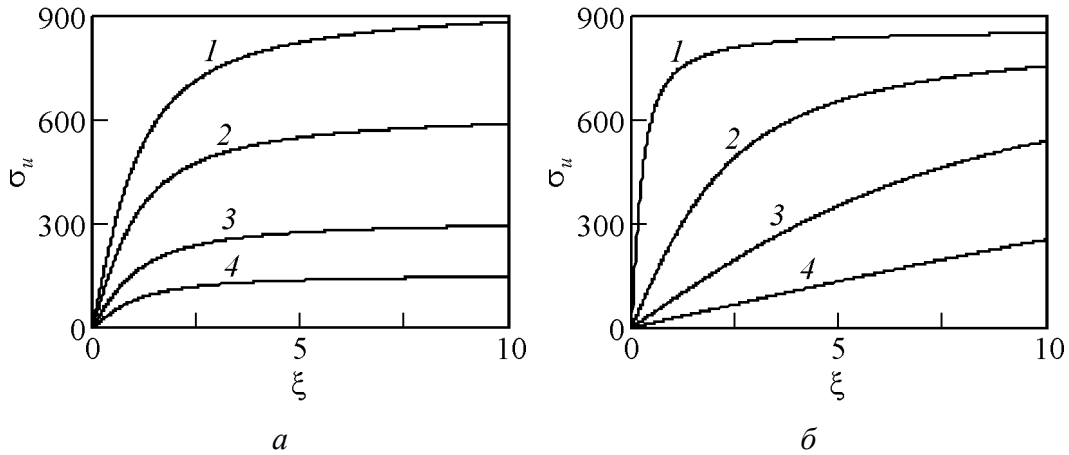


Рис. 2. Влияние параметров a_3 (a : $b_3 = 1$) и b_3 (b : $a_3 = 550$) на вид кривой упруго-пластической реакции материала: a : 1 – 600, 2 – 400, 3 – 200, 4 – 100; b : 1 – 4.0, 2 – 0.5, 3 – 0.25, 4 – 0.05

В области малых деформаций при скоростях распространения упругих волн, значительно меньших скорости звука (для пластических волн – в области малых деформаций), формула (32) принимает вид закона Гука

$$\sigma_u = \frac{D}{\chi} \xi = E \xi \left(\sigma_p = \frac{D}{\chi_1} \xi = E \xi \right). \quad (33)$$

В этом случае модуль Юнга E обратно пропорционален скорости деформации $\dot{\xi}$. Скорости распространения продольной и поперечной волн различаются (пластические волны движутся со значительно меньшей скоростью) [49]. Поэтому при моделировании механических диаграмм состояния материалов необходимо учитывать оба типа волн.

Разрушение материала. Энергия нагружения расходуется не только на деформирование материала, но и на образование новых поверхностей раздела, т.е. на разрушение материала [46]. Предположим, что возникновение и распространение трещин обусловлено перемещением вещества в противоположные стороны под действием кинетических ($\partial^2 \sigma_F / \partial \chi^2$) и потенциальных ($\partial^2 \sigma_F / \partial \xi^2$) воздействий. Тогда динамика разрушения будет описываться уравнением

$$\frac{\partial^2 \sigma_F}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \sigma_F}{\partial \chi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_F}{\partial \xi^2}, \quad (34)$$

где σ_F – напряжение фрактуризации, $\tau = \omega_F t$ – безразмерное время, ω_F – частота разрушения. Воспользовавшись заменой Лоренца (30) (с заменой скорости распространения волны на скорость фрактуризации), перепишем уравнение (34) в виде

$$\frac{\partial^2 \sigma_F}{\partial \chi_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_F}{\partial \xi^2} = 0. \quad (35)$$

Переход к автомодельному аргументу $\zeta = \chi_1^2 - \xi^2$ преобразовывает уравнение (35) в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\zeta \frac{d^2 \sigma_F}{d\zeta^2} + \frac{d\sigma_F}{d\zeta} = 0. \quad (36)$$

Интегрирование уравнения (36) приводит к равенству

$$\sigma_F = H_1 \ln |\zeta| + H_2. \quad (37)$$

Перепишем равенство (37) в виде

$$\sigma_F = \sigma_L + H_1 \ln \left[1 - \left(\frac{\xi}{\chi} \right)^2 \right] = \sigma_L + a_4 \ln \left[1 - \left(\frac{\xi}{b_4} \right)^2 \right]. \quad (38)$$

В выражении (38) (рис. 3) напряжение Людвика [20] определяется скоростью деформации

$$\sigma_L = 2H_1 \ln \left| \dot{\xi} \right| + H_2. \quad (39)$$

Из формулы (38) следует, что материал не разрушается в области

$$-\xi_F < \xi < \xi_F, \quad (40)$$

где критическая деформация $\xi_F = \dot{\xi} t_0 \frac{\omega_0}{\omega_F}$ определяется скоростью деформации $\dot{\xi}$, временем релаксации материала t_0 и отношением частоты релаксации ω_0 к частоте фрактуризации ω_F . Применим полученные формулы для расчета диаграмм механического состояния упругопластического материала, деформируемого в изотермических условиях.

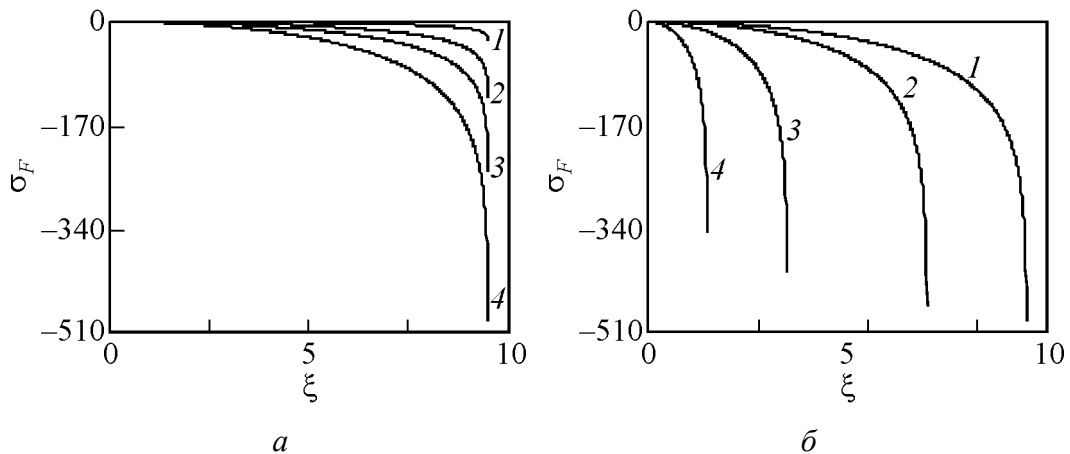


Рис. 3. Влияние параметров a_4 (a : $b_4 = 9.5$) и b_4 (b : $a_4 = 550$) на вид кривой разрушения материала при σ_L : a : 1 – 5, 2 – 20, 3 – 40, 4 – 80; b : 1 – 9.5, 2 – 7.0, 3 – 3.5, 4 – 1.5

5. Диаграммы напряжение–деформация

Разнообразие модельных диаграмм механического состояния материалов показано на рис. 4.

Механическое состояние материалов определяется характеристиками их структуры (упругостью, хрупкостью, вязкостью, пластичностью) и протекающими при деформировании процессами (блуждания и колебания частиц,

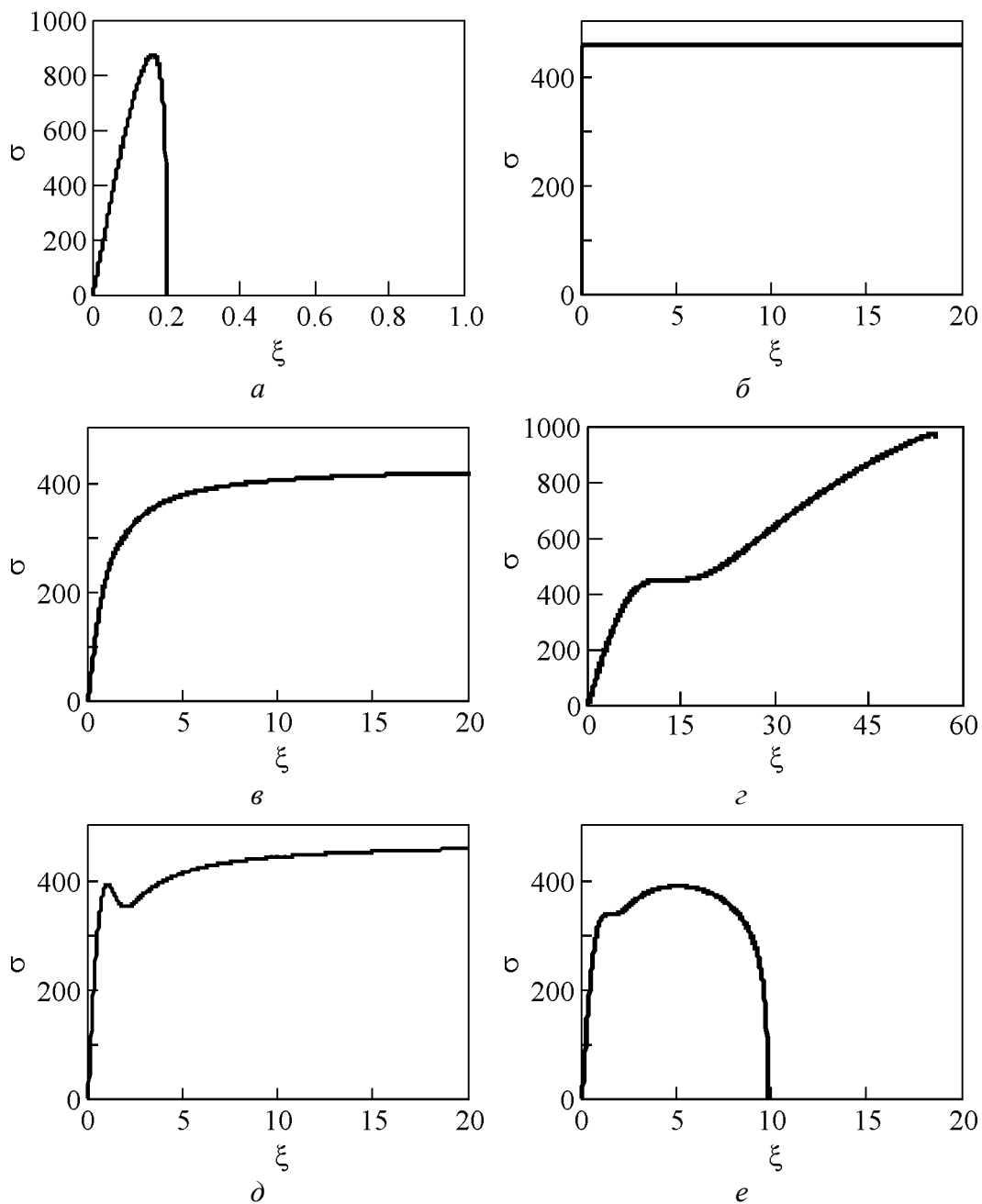


Рис. 4. Модельные диаграммы напряжение–деформация: *a* – упругохрупкий материал; *б* – идеально-пластический; *в* – упругопластический; *г* – упругопластический с площадкой текучести; *д* – упругопластический с зубом текучести; *е* – теоретическая диаграмма механического состояния имитационного материала

волны и образование самоорганизующихся структур, потоки и течения). Рис. 4 демонстрирует широкие возможности предлагаемой модели для аналитического описания диаграмм состояния напряженно-деформированного материала. Поведение имитационного материала, продемонстрированное на рис. 4, описывается функциями вида

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \sigma(\xi) &= a_1 \xi \exp(-b_1 \xi^2) + a_4 \ln \left[1 - \left(\frac{\xi}{b_4} \right)^2 \right]; \\
 \text{б) } \sigma(\xi) &= a_1 \xi \exp(-b_1 \xi^2) + a_2 \operatorname{arctg}(b_2 \xi), \quad b_2 \gg 1; \\
 \text{в) } \sigma(\xi) &= a_1 \xi \exp(-b_1 \xi^2) + a_2 \operatorname{arctg}(b_2 \xi), \quad b_2 \approx 1; \\
 \text{г) } \sigma(\xi) &= a_1 \xi \exp(-b_1 \xi^2) + a_2 \operatorname{arctg}(b_2 \xi) + a_4 \ln \left[1 - \left(\frac{\xi}{b_4} \right)^2 \right], \quad b_2 \ll 1; \\
 \text{д) } \sigma(\xi) &= a_1 \xi \exp(-b_1 \xi^2) + a_2 \operatorname{arctg}(b_2 \xi), \quad a_1 > a_2 b_2; \\
 \text{е) } \sigma(\xi) &= a_1 \xi \exp(-b_1 \xi^2) + a_2 \operatorname{arctg}(b_2 \xi) + a_3 \operatorname{arctg}(b_3 \xi) + a_4 \ln \left[1 - \left(\frac{\xi}{b_4} \right)^2 \right]. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Для сравнения теории с экспериментальными данными воспользуемся формулой (62), при этом учтем, что в линейной области упругости модуль Юнга E определяется выражением

$$E = a_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (42)$$

Например, для меди истинная диаграмма напряжение–деформация [50] (рис. 5,а) описывается формулой

$$\sigma(\xi) = 0.7 \xi \exp(-0.0014 \xi^2) + 3 \operatorname{arctg}(3666 \xi) + 715 \operatorname{arctg}(0.0009 \xi) + 0.1 \ln \left[1 - \left(\frac{\xi}{73} \right)^2 \right], \quad (43)$$

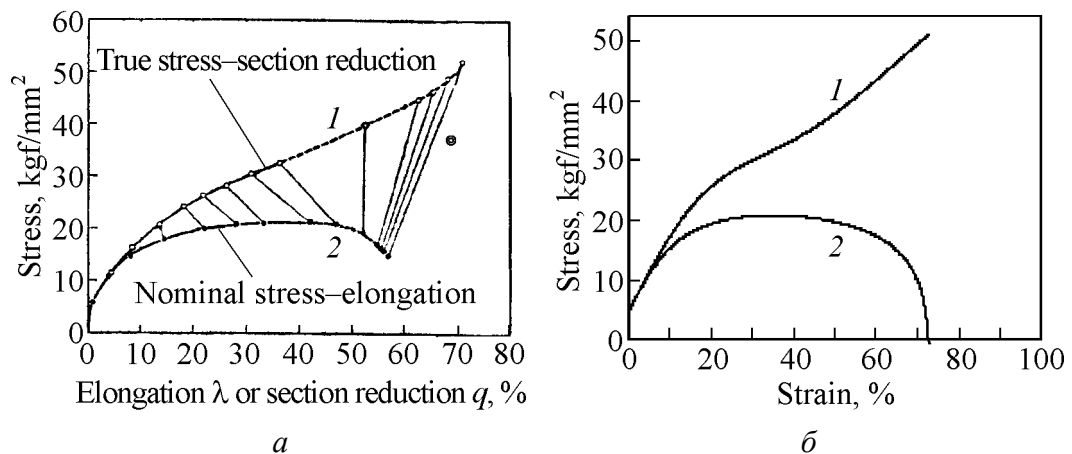


Рис. 5. Сравнение экспериментальной истинной (1) и инженерной (2) диаграмм механического состояния меди (а) [50] с теоретическими кривыми (б). ⊙ – начало сужения

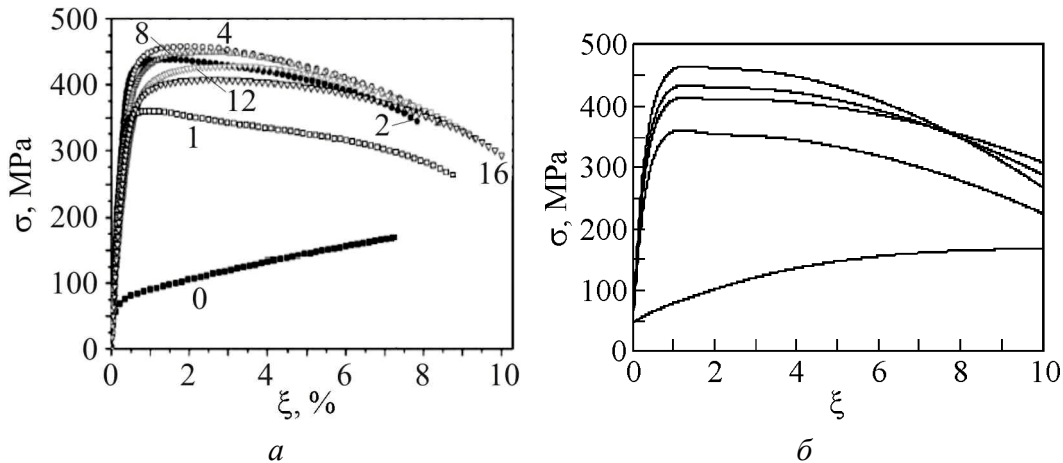


Рис. 6. Экспериментальные (а) [51] и теоретические (б) диаграммы напряжение–деформация для меди после нескольких проходов (числа у кривых) ее равноканального упрочнения

геометрический вид которой показан на рис. 5,б. Модуль Юнга, вычисленный по формуле (43), $E \approx 11000 \text{ kg/mm}^2$ ($E \approx 110 \text{ GPa}$), что соответствует данным [24]. В силу того, что модуль Юнга зависит от скорости деформации, температуры и других параметров, его значение может быть различным даже для одного и того же материала. Так, в работе [51] были получены диаграммы, показанные на рис. 6,а. Теоретические расчеты проводились по формулам

$$\sigma(\xi) = \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \chi\sigma_3 + \delta\sigma_F, \quad (44)$$

где $\alpha, \beta, \chi, \delta$ – коэффициенты, связанные с количеством проходов при равноканальном упрочнении, функции

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 7\xi \exp(-0.9\xi^2), \quad \sigma_2 = 30 \operatorname{arctg}(3666\xi), \\ \sigma_3 &= 130 \operatorname{arctg}(0.25\xi), \quad \sigma_F = 1000 \ln \left[1 - \left(\frac{\xi}{73} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

После первого прохода функция σ_3 принимает вид $\sigma_3 = 212 \operatorname{arctg}(4.25\xi)$. При различном числе проходов N (цифры у кривых на рис. 6,б) коэффициенты $\alpha, \beta, \chi, \delta$ равны:

$$\begin{aligned} N=0 &- \alpha = 1.0, \quad \beta = 1.0, \quad \chi = 1.0, \quad \delta = 1.0; \\ N=1 &- \alpha = 10.0, \quad \beta = 1.0, \quad \chi = 1.0, \quad \delta = 8.0; \\ N=2 &- \alpha = 10.0, \quad \beta = 1.0, \quad \chi = 1.25, \quad \delta = 9.0; \\ N=4 &- \alpha = 10.0, \quad \beta = 1.0, \quad \chi = 1.36, \quad \delta = 12.0; \\ N=16 &- \alpha = 10.0, \quad \beta = 1.0, \quad \chi = 1.18, \quad \delta = 6.7. \end{aligned}$$

Проведенный расчет показывает, что упругость меди повышается (параметр α возрастает до 10): при числе проходов не более четырех происходит перераспределение механической энергии между упругими и пластическими

волнами (изменяется параметр χ), увеличение числа проходов более четырех приводит к залечиванию нарушений кристаллической решетки (снижение значения параметра δ с 12.0 до 6.7).

6. Заключение

Проведенный анализ позволяет сделать следующие заключения:

- применение синергетического подхода к проблеме формоизменения материала позволяет получить простую, но адекватную реальности физико-математическую модель;
- полученные аналитические выражения для связи напряжения с деформацией позволяют с высокой степенью точности описывать истинные и инженерные диаграммы механического состояния упругопластического материала;
- модельные представления могут быть использованы при построении микроскопической теории напряженно-деформированного состояния материала;
- взаимное влияние случайных блужданий атомов и их кооперативного волнового движения на процесс деформирования приводит к формированию поверхности напряжений. Вид этой поверхности формируется при взаимодействии механических, тепловых и других физико-химических полей, консенсус между которыми приводит к возникновению неравновесных, но стационарных структур. Эти структуры определяют механические и другие характеристики материала;
- управление структурой материала при заданном виде диаграммы его механического состояния позволит не только корректировать внутренние процессы в нужном направлении, но и формировать необходимые виды агломератов частиц (например, нанокластеры). В свою очередь, это приведет к управлению физико-химическими свойствами макроскопических фаз и получению материалов с требуемыми для практических целей параметрами.

1. В.Е. Новиков, С.С. Моисеев, В.П. Семиноженко, Физика и техника полупроводников **14**, 402 (1980).
2. Г.Ф. Коняхин, А.Ю. Мелашенко, З.Ю. Литвина, В.Е. Новиков, С.С. Моисеев, Радиофизика и радиоастрономия **4**, 160 (1999).
3. Г. Циглер, Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды, Мир, Москва (1966).
4. Л.А. Парс, Аналитическая динамика, Наука, Москва (1971).
5. Г.С. Кандаурова, УФН **172**, 1165 (2002).
6. И.Ю. Еремчев, Ю.Г. Вайнер, А.В. Наумов, L. Kador, ФТТ **55**, 652 (2013).
7. Н.Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного анализа, Наука, Москва (1965).
8. Ю.Г. Рудой, А.Д. Суханов, УФН **170**, 1265 (2000).

9. *А.И. Олемской, А.В. Хоменко*, Синергетика конденсированной среды, СумДУ, Сумы (2002).
10. *С.В. Терехов, И.К. Локтионов*, ФТВД **23**, № 4, 5 (2013).
11. *А.А. Ильюшин*, Пластичность. Т. 1. Упругопластические деформации, Гостехтеоретиздат, Москва–Ленинград (1948).
12. *В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин*, Математические модели термомеханики, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2002).
13. *В.Е. Панин, Ю.В. Гриняев, В.И. Данилов*, Структурные уровни пластической деформации и разрушения, Наука, Новосибирск (1990).
14. *А.Х. Коттрелл*, Дислокации и пластическое течение в кристаллах, Metallurgizdat, Москва (1958).
15. *А. Коттрелл*, Теория дислокаций, Мир, Москва (1969).
16. *А.Г. Залужный*, Дислокации в кристаллах, их движение и упругие свойства, МИФИ, Москва (1990).
17. *Р.К. Мозберг*, Материаловедение, Высшая школа, Москва (1991).
18. *В.Ф. Терентьев, А.Г. Колмаков, Ю.А. Курганова*, Теория и практика повышения надежности и работоспособности конструкционных металлических материалов, УлГТУ, Ульяновск (2010).
19. *В.А. Лихачев, Р.Ю. Хайров*, Введение в теорию дисклинаций, ЛГУ, Ленинград (1975).
20. *К.Г. Шмитт-Томас*, Металловедение для машиностроения, Metallurgiya, Москва (1995).
21. *А. Надаи*, Пластичность и разрушение твердых тел, Изд-во иностр. лит., Москва (1954), т. 1.
22. *А.А. Ильюшин, В.С. Ленский*, Сопротивление материалов, Физматгиз, Москва (1959).
23. *А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря*, Основы математической теории термовязкоупругости, Наука, Москва (1970).
24. *А.А. Ильюшин*, Механика сплошной среды, МГУ, Москва (1971).
25. *Ж.-П. Пуарье*, Ползучесть кристаллов. Механизмы деформации металлов, керамик и минералов при высоких температурах, Мир, Москва (1988).
26. *С.А. Евтюков, А.А. Овчаров, И.В. Замараев*, Построение механореологических моделей процессов взаимодействия рабочих органов строительного-дорожного машин со средой, СПбГАСУ, Санкт-Петербург (2011).
27. *М.В. Классен-Неклюдова, Т.А. Конторова*, УФН **24**, 217 (1944).
28. *И. Пригожин, Р. Дефэй*, Химическая термодинамика, Наука, Новосибирск (1966).
29. *Р.М. Дейвис*, Волны напряжений в твердых телах, Изд-во иностр. лит., Москва (1961).
30. *Л.И. Слепян*, Нестационарные упругие волны, Судостроение, Ленинград (1972).
31. *В.И. Ерофеев, В.В. Кажяев, Н.П. Семерикова*, Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2002).
32. *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский*, Уравнения математической физики, Наука, Москва (1977).
33. *Ф.М. Морс, Г. Фешбах*, Методы теоретической физики, Изд-во иностр. лит., Москва (т. 1 – 1958; т. 2 – 1960).

34. *L. Onsager*, Phys. Rev. **37**, 405 (1931).
35. *L. Onsager*, Phys. Rev. **38**, 2265 (1931).
36. *С.В. Терехов, И.К. Локтионов*, ФТВД **23**, № 4, 5 (2013).
37. *Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения*, Г. Либовиц (ред.), Мир, Москва (1975).
38. *О.Б. Наймарк, Ю.В. Баяндин, В.А. Леонтьев, С.Л. Пермьяков*, Физическая мезомеханика **8**, № 5, 23 (2005).
39. *П.В. Макаров*, Физическая мезомеханика **8**, № 6, 39 (2005).
40. *С.В. Терехов*, ФТВД **22**, № 1, 33 (2012).
41. *И.Л. Нагорных*, Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, ИПМ УрО РАН, Ижевск (2011).
42. *А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Излев*, Математическая теория пластичности, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2003).
43. *Н.Ф. Болховитов*, Металловедение и термическая обработка, Машгиз, Ленинград (1952).
44. *В.Т. Койтер*, Общие теоремы теории упругопластических сред, Изд-во иностр. лит., Москва (1961).
45. *В.С. Иванова, Л.К. Городиенко, В.Н. Геминев и др.*, Роль дислокаций в упрочнении и разрушении металлов, Наука, Москва (1965).
46. *Ю.Г. Матвиенко*, Модели и критерии механики разрушения, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2006).
47. *Л.Б. Потапова*, Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения?, Машиностроение-1, Москва (2005).
48. *Ю.Н. Работнов*, Введение в механику разрушения, Наука, Москва (1987).
49. *Н.Ф. Морозов, Ю.В. Петров*, Проблемы динамики разрушения твердых тел, СПбУ, Санкт-Петербург (1997).
50. *Г. Закс*, Практическое металловедение. Т. 2. Пластическое деформирование, ОНТИ НКТП, Москва–Ленинград (1938).
51. *F. Dalla Torre, R. Lapovok, J. Sandlin, P. Thomson, C.H.J. Davies, and E.V. Pereloma*, Acta Mater. **52**, 4819 (2004).

S.V. Terekhov, V.N. Sayarin

UNIVERSALITY OF SYNERGETICS LAWS.

V. STRESS–STRAIN DIAGRAMS

The synergetics model of the deformed state of continuous environment is offered. The adequacy is shown with respect to the experimental data when describing the veritable and engineering stress–strain diagrams.

Keywords: material, stress, strain, wandering, oscillations

Fig. 1. Effect of parameters a_1 ($a: b_1 = 0.1$) and b_1 ($b: a_1 = 600$) on the curve of elastic-brittle reaction of the material: $a: 1 - 600, 2 - 400, 3 - 200, 4 - 100$; $b: 1 - 7, 2 - 1, 3 - 0.25, 4 - 0.1$

Fig. 2. Effect of parameters a_3 ($a: b_3 = 1$) and b_3 ($b: a_3 = 550$) on the curve of elastic and plastic reaction of the material: $a: 1 - 600, 2 - 400, 3 - 200, 4 - 100$; $b: 1 - 4.0, 2 - 0.5, 3 - 0.25, 4 - 0.05$

Fig. 3. Effect of parameters a_4 ($a: b_4 = 9.5$) and b_4 ($b: a_4 = 550$) on the fracture curve at σ_L : $a: 1 - 5, 2 - 20, 3 - 40, 4 - 80$; $b: 1 - 9.5, 2 - 7.0, 3 - 3.5, 4 - 1.5$

Fig. 4. Model stress–strain diagrams: a – elastic and brittle; b – ideal plastic; c – elastic and plastic; d – elastic and plastic with an yield plateau; e – elastic and plastic with an yield point; e – theoretical diagram of the mechanical state of the simulation material

Fig. 5. Comparison of the true experimental (1) and engineering (2) diagrams of the mechanical state of copper (a) [50] with the theoretical curves (b). \odot – start of reduction

Fig. 6. Experimental (a) [51] and theoretical (b) stress–strain diagrams for copper after severe passes of equal-channel strengthening: $a: \blacksquare - 0, \square - 1, \bullet - 2, \circ - 4, \triangle - 8, \nabla - 12$; b – numbers at the curves